TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 11, pp. 155—168, 1985. UDK 531.014

ОБ ИНВАРИАТНОСТИ ПРИНЦИПОВ В МЕХАНИКЕ

В. А. Вуйичич

(Поступило 1. марта 1984.)

В классической механике под ,,принципом инвариантности" принято понимать сохранение форм математических выражений при точечном, контактном или каноническом преобразованиях. Хотя известно, что вектор, характеризующий основные понятия в кинематике и динамике, инвариантен относительно любых преобразований, аналитическая механика в большей степени в качестве инвариантов использует скалярные величины. В число этих скалярных инвариантов входят и принципы механики (Даламбера-Лагранжа, Журдена, Гаусса, Гамильтона, Мопертюи-Лагранжа, Герца). Во всех этих инвариантных принципах, кроме точечных преобразований, приходится вводить и векторные преобразования, чтобы не потерялось полное физическое значение рассматриваемых характеристик механического движения. Поэтому инвариантными принципами в механике считаются те, которые при переходе от одной координатной системы к другой или при отображении механических явлений из одного пространства на другое сохраняются все физические свойства рассматриваемого объекта. Другими словами, инвариантные принципы должны удовлетворять точечним и векторным преобразованиям. Изучение одних и тех же движений разными принципами должно приводить к эквивалентным результатам. Вариационные принципы механики так себя и ведут применительно к механическим склерономным системам. Если же движение точек происходит при наличии реономных голономных связей, то можно указать на некоторые неэквивалентности принципов, о чем пойдет речь в этой статъе

Расматривается система N материальных точек M_ν $(\nu = 1, \dots, N)$ массы которых $m_\nu = \text{const}$. Пусть на систему точек наложены конечные удерживающие связи вида $f_\mu(\vec{r}_1 \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, $(\mu = 1, \dots, k < 3N)$ или, в параметрическом представлении $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q^1, \dots, q^n, t)$ где $\vec{r}_\nu$ — радиус-векторы точек, а $q^1, \dots, q^n$, $(n = 3N - k)$ обобщеные и независимые координаты Лагранжа, принадлежащие конфигурационному пространству K_n. Векторы скорости

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\alpha = 1, \dots, n) \tag{1}$$

точек $M_\nu \in R_n$, на касаются пространства K_n, так как они содержат $n+1$ компоненту. Иначе обстоит дело с вариациями $\delta \vec{r}_\nu$, которые принадлежат касательному пространству $\vec{K}_n$, базисные векторы которого $\vec{g}_{(\nu)\alpha} = \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$, так как

$$\delta \vec{r}_\nu = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha. \tag{2}$$

Известно, что принцип Деламбера-Лагранжа при наличии голономных связей $f_\mu = 0$ можно привести к виду

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\vec{F}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \, grad_\nu f_\mu - m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt}\right) \cdot \delta \vec{r} =$$
$$= \left(Q_\alpha - a_{\alpha i} \frac{D\dot{q}^i}{dt}\right) \delta q^\alpha = \left(Q_\alpha - \frac{D q_\alpha}{dt}\right) \delta q^\alpha = 0, \tag{3}$$

$$(i = 1, \ldots, n, \; n+1),$$

откуда получаем n ковариантных дифференциальных уравнений

$$a_{\alpha i} \frac{D\dot{q}^i}{dt} = a_{\alpha i}\left(\frac{d\dot{q}^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \frac{dq^k}{dt}\right) = Q_\alpha \tag{4}$$

или

$$\frac{D p_\alpha}{dt} = \frac{d p_\alpha}{dt} - \Gamma^k_{\alpha j} p_k \frac{dq^j}{dt} = Q_\alpha, \tag{5}$$

эквивалентных дифференциальным уравнениям Лагранжа второго рода. Латинские индексы суммирования $i, j, k, \ldots$ принимают значения $1, 2, \ldots, n$, $n+1$ или $0, 1, 2, \ldots, n$, а греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, — $1, 2, \ldots, n$.

Из принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} p_\alpha\, dq^\alpha - H\, dt = 0 \tag{6}$$

так же получаются дифференциальные уравнения движдения (4) потенциальной системы в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \tag{7}$$

или в канонической форме

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \qquad p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \tag{8}$$

где принято функцию Гамильтона

$$H = H\ (t,\ q^1, \ldots, q^n;\ p_1, \ldots, p_n) \tag{9}$$

рассматривать как функцию от $2n$ фазовых или канонических переменных q^α и p_σ и времени t. Превращая время t в $(n+1)$—ую переменную $t = t(q^0) \leftrightarrow q^0 = q^0(t)$, пространство конфигураций расщиряется до $(n+1)$ — мерного пространства K_{n+1}, а фазовое пространство $ф_{2n}$ до $(2n+1)$—мерного пространства состояний. При таком увеличении числа координат количество дифференциальных уравнений (7) или (8) не повышается. Для того, чтобы не нарушалась симметрия между координатами и импульсами, к пространству состояний $ф_{\ n+1}$ добавляется импульс $p_t = p_0$ сотвествующий времени $t = q^0$ и расширенное пространство теперь будет иметь $2n+2$ измерений. Импульс соотвествующий временной переменной

$$p_0 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \tag{10}$$

это $(n+1)$—я ковариантная координата вектора импульса $\vec{p}$ рассматриваемой реономной системы. В самом деле, импульсы точек будут равны

$$\vec{p}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}. \tag{11}$$

Если каждый этот вектор спроектировать на касательное направление координатной линии, т.е. если скалярно умножить эти векторы на соотвествующие координатные векторы $\dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$ и сложить то получатся „обобщенные импульсы":

$$p_\beta = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\beta} \right) = a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha + a_{0\beta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\beta}. \tag{12}$$

В этом определении обобщенные импулсы суть координаты инваримнтного вектора $\vec{p}$, который не теряет физические свойства при точечном и векторном преобрзованиях. Несоблюдение ковариантной природы обобщенных импульсов приводит и к другим более существенным выводам о неинвариантности: „... в общем случае реономного преобразования функция Гамильтона уже не является инвариартом" ([3], стр. 232). Проанализируем этот вывод подробнее. Инвестно, что для склъономной потенциальной системы функция Лагранжа

$$L = T - V(q, t) \tag{13}$$

представляет кинетический потенциял, а функция Гамильтона

$$H = (p_\alpha \dot{q}^\alpha - L)_{\dot{q} = \dot{q}(p)} = T + V = E, \quad (\alpha = 1,2, \ldots n) \tag{14}$$

полную механическую энергию. Между прочим, для реономной системы функция H принимается в той же форме $H = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L = T_2 - T_0 + V$, но, как это видно, не совпадает со значением полной механической энергии.

Для того, чтобы сохранить инвариантное значение функции Гамильтона и для реономной системы, мы будем эту функцию записывать в виде

$$H^* = (p_i \dot{q}^i - L^*)_{\dot{q}^i = \dot{q}^i(p)} = T + V^* = E, \; (i = 0,1, \ldots n), \tag{15}$$

где при этом функция $L^* = T - V^*$ кинетийески потенциал, а

$$V^* = V(q^1, \ldots q^n; \; t) + P = \Pi(t, q^1, \ldots, q^n) \tag{16}$$

потенциальная энергия реономной системы. Она складывается из „натуральной" потенциальной энергии V и энергии

$$P = -\int_{t_0}^{t} R_0 [q(t), \; \dot{q}(t), \; t] \, dt \tag{17}$$

связной с изменеием голономных связей во времени.

Хотя определение функци

$$H^* = H^*(p_0, p_1, \ldots p_n; \; q^0, \; q^1, \ldots q^n) \tag{18}$$

находитсяи в согласи с первоначальным определением функции Гамильтона (см. [1], стр. 237) и с уже принятой формой (14) (разница лишь в том, что индекс суммирования в (15) принимает значения на единицу больше, чем в выражении (14)), будем в дальнейшем функцию H^* обозначат буквой E, чтобы было легче отличать „функцию Гамильтона" $H = T_2 - T_0 + V$ для реономной системы от $H^* = T_2 + T_1 + T_0 + V^* = E$.

Если для кинетического потенциала берется

$$L^* = L + P \tag{19}$$

где L функция Лагранжа, а $P = -\int\limits_{t_0}^{t} R_0\, dt$, то

$$E = p_\alpha\, \dot{q}^\alpha + p_0\, \dot{q}^0 - L + P = H + p_0\, \dot{q}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} R_0\, dt. \tag{20}$$

При наличии склерономных связей $R_0 = 0$ и поэтому в точности сохраняется хорошо известная инвариантность принципов механики. Чтобы принципы механики были эквивалентны и инвариантны для реономных систем, надо их рассматривать в расширеном конфигурационном или расширеном фазовом пространстве и пользоваться кинетическим потенциалом и энергией реономной системы (15), т.е. (18).

Из вариационого соотношения

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L^*\ dt = 0 \tag{21}$$

аналогичном (6), при $\delta\, q^\alpha \neq 0$, $\delta^0\, q^0 \neq 0$ для $t_0 < t < t_1$ и $\delta\ q_0^0 = \delta\, q_1^0 = 0$ следует $n + 1$ дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\, \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L^*}{\partial q^i} = 0 \tag{22}$$

или, более подробно

$$\frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \qquad (\alpha = 1,2, \ldots, n) \tag{22a}$$

$$\frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0} - \frac{\partial L}{\partial q^0} = R_0, \tag{22b}$$

а из соотношения

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} p_i\, d q^i - E\, dt = 0, \qquad (i = 0,\ 1, \ldots, n) \tag{23}$$

без затруднений получаются $2n + 2$ дифференциальных уравнений

$$\dot{q}^i = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial E}{\partial q^i} \tag{24}$$

или

$$\dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}}, \tag{24a}$$

$$\dot{q}^{0} = \frac{\partial H}{\partial p_{0}}, \quad \dot{p}_{0} = -\frac{\partial H}{\partial q^{0}} + R_{0}, \tag{24b}$$

которые эквивалентны соотвественно уравнениям (22a) и (22b). Таким образом, получаем общее интегральное вариационное инвариантное соотношение Гамильтона (6). Но уравнение (3) еще пока не эквивалентно соотношению (23). Дело в том, что в соотношение (3) не входит вариация $\delta q^0 = \delta t$ в том же смысле как в принцип инвариантности ([3], стр. 236). Такого подхода требует инвариантность принципов механики, так как в интегральном инварианте и интегральном вариационном принципе используется вариация времени δt. Между тем в уравнении (3) варианция (2) присуствует. Поэтому надо пересмотреть вариацию $\delta \vec{r}_{\nu}$ радиус-векторов $\vec{r}$ при наличии реономных связей. Если принять возможное перемещение $\delta \vec{r}$ по расширенному определению*, согласно которому $\delta \vec{r}_{\nu} = d'\vec{r}_{\nu} - d\,\vec{r}_{\nu}$, то на основании (1) можно прийти к выводу, что

$$\delta \vec{r}_{\nu} = \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial \nu^{\alpha}} \delta q^{\alpha} + \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_{0}} \delta q^{0} \tag{25}$$

где $\delta q^i = d'q^i - d\,q^i$. Это соотвествует формальной точки эрения о $(n+1)$—ой координате $q^{n+1} = q^0$ и собpажениям о возможном перемещении в $(n+1)$—мерном пространстве. Это приводит нас к решению задачи об эквивалентности и инвариантности принципов механики для реономных систем. Общее уравнение (3) расширается до $n+1$ слагаемого

$$\left(Q^{*}{}_{i} - a_{ij}\frac{D\,\dot{q}^{j}}{d\,t}\right)\delta q^{i} = \left(Q_{\alpha} - Q_{\alpha j}\frac{D\dot{q}^{j}}{d\,t}\right)\delta q^{\alpha} + \left(Q_{0}^{*} - a_{0j}\frac{D\,\dot{q}^{j}}{d\,t}\right)\delta q^{0} = 0 \tag{26}$$

и дает нам возможность получить $n+1$ дифференциальных уравнений, эквивалентных для потенциальных систем уравнениям (22, a, б). Через Q_i^* обозначены обобщенные силы и $Q_{\alpha}^* = Q_{\alpha}$ и $Q_0^* = Q_0 + R_0$, т. е,

$$Q_i^* = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q^{i}} \quad \text{и} \quad R_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{K} \lambda_{\mu}\, grad_{\nu} f_{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q^{0}}.$$

Тогда получим уравнения движения в следующей форме:

$$a_{ij}\frac{D\,\dot{q}^{j}}{d\,t} = Q_i^*\,, \quad (i,\ j = 0, 1, \ldots, n). \tag{27}$$

---

* Смотри, например, Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, ,,Наука", изд. II, М. Стр. 16, в рядом с ([4], стр. 141).

Смысл $(n+1)$—го дифференциального уравнения (27) или (22b) в рамках принципов механики станет более ясным, если то же самое движение представим с помощью принципа Даламбера в его первоначельной форме

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu + \vec{\mathcal{J}}_\nu = 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{28}$$

где $\vec{\mathcal{J}}_\nu = - m_\nu \dfrac{d \vec{v}_\nu}{d t}$ — силы интерции точек, а $\vec{R}_\nu$ реакции связей. Уравнения (28) векторные и не зависят от выбора координатной системы. Это — основной инвариантный принцип механики. Из выражения (1) видно, что $n+1$ независимых координатных векторов $\vec{g}_{(\nu)\alpha} = \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$ и $\vec{g}_{(\nu)} = \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}$ определяют направление векторов скорости $\vec{v}_\nu$ каждой ν—той точки m_ν. Для того, чтобы спроектировать уравнение движения на все независимые направления, умножим скалярно каждое уравнение (28) на координатный вектор $\dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Таким образом, получается $(n+1)$ дифференциальное уравнение вида (27), т.е.

$$a_{\alpha j} \frac{D \dot{q}^j}{d t} = Q_\alpha, \tag{27a}$$

$$a_{0j} \frac{D \dot{q}^j}{d t} = Q_0 + R_0, \tag{27b}$$

где $Q_0 = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^0}$ ковариантная координата действующих сил, соответствующая временной координате q^0 и

$$R_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{K} \lambda_\mu \, grad_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^0} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{R}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^0} \tag{29}$$

обобщенная ковариантная координата вектора реакции связей, появляющаяся из-за явной зависимости связей от времени t.

Отметим, что указанный потход приводит к эквивалентности принципа Даламбера (28), дифференциального уравнения (26) и интегрального вариационного уравнения (23) для реономной системы. В расширенном конфигурационнoи пространстве эти принципы инвариантны, так как сохраняют форму и физические свойства при точечном и векторном преобразованиях. Расширение конфигурационого пространства K_n до K_{n+1} при наличии реономных связей не только математическая формальност, но и физечеслое явление. Движение системы материальных точек в пространстве K_n происходит вследствие влияния обобщенных сил Q_x $(x = 1, \ldots, n)$. Между прочим, известно, что действительное движение происходит и в следствие изменения реономных связей. В работам [6] и [7] показано, что и закон изменения механической энергии реоннмных систем в пространстве K_{n+1} отлитечся от соотвествующего закона в простанстве K_n. Действительно, если умножить каждое уравнение (27) на сответзующий дифференциал $d\,q^i = \dot{q}^i\,dt$ и просуммировать по индексу i, то получится

$$a_{ij}\dot{q}^i D\,\dot{q}^j = Q_i^*\;d\,q^i = Q_\alpha\,d\,q^\alpha + (Q_0 + R_0)\,d\,t. \tag{30}$$

Если силы Q_i^* потенциальные с потенциалом V^*, то соотношение (30) приводится к более простому виду

$$d\left(\frac{1}{2}\;a_{ij}\;\dot{q}^i\dot{q}^j\right) + d\,V = R_0\,d\,t$$

или

$$\frac{d}{d\,t}(T + V) = R_0. \tag{31}$$

Это показывает, что R_0 имеет размерность $M\,L^2\,T^{-3}$. Следовательно, R_0 можно трактовать как мощность реономных связей. Закон изменения механической энергии (31) потенциальной реономной голомной системы можно выразить в интегральной форме

$$T + V^* = T + V - \int\limits_{t_0}^{t} R_0\,d\,t = C. \tag{32}$$

При этом надо заметить, что фуикция $R_0 = R_0(t,\;q,\;\dot{q})_{q=q(t)} = R_0(t)$ в общем случае становится известной после определения $q^\alpha = q^\alpha(t)$ и $\dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(t)$ из диффереииальных уравнений (22а) или (24а).

Поясным этот подход на примере реономной системы, кинетическая энергия которой

$$T = \frac{1}{2}\,a\,(t)\,\dot{q}^2 + b\,(t), \qquad (b = b\,(\dot{q}^0)^2)$$

и потенциальная

$$V^* = V\,(q) + P\,(t), \qquad \left(P = -\int\limits_0^t R_0\,d\,t\right).$$

Дифференциальные уравнения (22) для данного примера приводится к виду

$$a(t)\ddot{q} + \dot{a}(t)\,\dot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \tag{П22a}$$

$$\dot{b}(t) - \frac{1}{2}\,\dot{a}(t)\,\dot{q}^2 = -\frac{\partial P}{\partial t} = R_0(t). \tag{П22b}$$

Умножая уравнения (П22a) на $d\,q = \dot{q}\,d\,t$, а уравнение (П22b) на $d\,q_0 = \dot{q}_0\,d\,t$ и суммируя, получим

$$d\left(\frac{a(t)\,\dot{q}^2}{2}\right) + d\,b(t) + d\,V = -\,d\,P = R_0\,d\,t,$$

откуда следует соотношение (32) для этого примера, т.е.

$$\frac{a(t)\,\dot{q}^2}{2} + b(t) + V^*(q,t) = \text{const}. \tag{П32}$$

Похожая на эту систему модель приблизительно осуществляется в подьёмных кранах при малых колебаниях. Если длина маятника, например $l(t) = l_0(1-\beta^2 t^2)$ то кинетическая энергия малих колебаний поднимающегося груза массы m будет $T = \frac{m\,l_0^2}{2}(1-\beta^2 t^2)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{m\,\beta^2 t^2}{2}$, а потенциальная энергия $V = mgl_0[1-(1-\beta^2 t^2)\cos\varphi]$; $V^* = V + P$. Для нахождения импульса p_0 надо знать, что $T_0 = \frac{m\,\beta^4 t^2}{2}\,\dot{q}^0\,\dot{q}^0$. Таким образом получится два уравнения (22)

$$l_0(1-\beta^2 t^2)\,\ddot{\varphi} - 4\,\beta^2\,t\,l_0\,\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0,$$

$$\beta^2 t + 2\,\beta^2\,t\,l_0^2(1-\beta^2 t^2)\,\dot{\varphi}^2 + 2\,g\,l_0\,\beta^2\,t\cos\varphi = R\,m^{-1}.$$

Если умножить первое на $m\,l_0(1-\beta^2 t^2)\,d\varphi$, а второе на $d\,t = \dot{q}^0\,d\,t$ и суммировать, следуя (31), т.е.

$$d\left\{\frac{m\,l_0^2}{2}(1-\beta^2 t^2)^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{m\,\beta^2 t^2}{2} + m\,g\,l_0\,[1-(1-\beta^2 t^2)\cos\varphi]\right\} = R_0\,d\,t,$$

то отсюда получим (32), т. е. $T + V^* = T + V - \int\limits_0^t R_0\,d\,t = C.$

Для $\frac{g}{l_0} = 4\,\beta^2$ и $\sin\varphi \approx \varphi$ следует

$$\varphi = \dot{\varphi}_0\,t - \frac{\varphi_0}{2}\left(\beta\,t\,ln\left|\frac{\beta\,t+1}{\beta\,t-1}\right| - 2\right).$$

Поставляя это решение во второе уравнение определим $R_0(t)$.

Более простой, но также интересный пример — это движение тяжелой точки по инерции по горизонтальной окружности, радиус которой изменяется по закону $r = r_0(1 - \beta^2 t^2)$. Для этого примера дифференциальные уравнения (П22a) и (П22b) более простые, т.е.

$$(1 - \beta^2 t^2)\ddot{\varphi} - 4\beta^2 t\dot{\varphi} = 0,$$

$$m\beta^2 t\dot{q}_0 + 2\beta^2 m r_0^2 t(1 - \beta^2 t^2)\dot{\varphi}^2 = R_0.$$

Следовательно $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(1 - \beta^2 t^2)^{-2}$ и $R_0 = 2m\beta^2 r_0^2 \dot{\varphi}_0 (1 - \beta^2 t^2)^{-3} + \beta^2 t m$ При этом справедливо соотношение (32).

Результат $\dot{\varphi} = \text{const.}$ „противречит" положению о движении по инерции и показывает, что реономные связи действуют на материалные точки, движение которых они ограничивают. И это обстоятельство указивает на неопходимость рассмотрения $n + 1$ уравнений в пространстве для решения задачи движения точек стесненых реономными связями. Это классический поход к основным задачам динамики. В класическом случае склерономных систем обычно задаются: 1) либо m обобщенных координат $q^\alpha = f^\alpha(t)$ как функции времени t, 2) либо m обобщенных сил Q_α как функции от времени t, координат q и обобщенных скоростей $\dot{q}$. Такой же классический подход и к реономной системе хотя в сущности задача не одна и та же. Механическая энергия реономной системы значительно отличается от энергии соотвествующей склерономной системы. Причина изменения связей в течении времени не рассматривается. Даже различные понятия и определения конфигурационног K_n и расширеного конфигурационного пространства K_{n+1} (различны: векторные базы, координаты, число измерений, метрика) указывают, что число данных для решения задачи в K_n и в K_{n+1} отличаются друг от друга [5]. В системе от $m = n + 1$ независимых уравнений (22) или 24 фактически имет $2n + 2$ неизвестных функций: q^α, Q_α, Q_0, R_0. Поэтому для решения любой задаче к системе уравнений надо $n + 1$ дополнительных условый или соотношений. Надо задать либо 1) n функций $q^\alpha = f^\alpha(t)$ и $R_0 = f_0(t)$ либо 2) $n + 1$ **функций** $Q_i = Q_i(t, q, \dot{q})$.

Положение о достатичности n дифференциальных уравнений движения для решения задач в K_n надо отличать от той же задаче в K_{n+1} и их инвариантность относительно физического значения.

Пересмор функции Гамильтона. Функцию $H = T + V$ (точнее $H = T - U$) „для краткости" ввел Гамильтон ([1], стр. 236). Остроградски также „для краткости" ввел более общую соотвествующую функцию ([1], стр. 323) из которой следовало $H = T + V = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L$. Это самое значение функции H, „кинематического потенциала" L и „импулсов" p_α рассматривал Г. Гельмгольц в своей работе „О физическом значении принципа найменшего действия" ([1], стр. 431). В этой работе ясно что функция Гамильтона полная механическая энергия E, т. е.

$$H = (T + V)_{\dot{p} = \dot{q}(t)} = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L = E \tag{33}$$

Во всех работах этих авторов индексы суммирования принимают значения числа импульсов (12). Согласно этим определениям, а особенно общему определению Остроградского, инвариануую функцию $H = H(q_0, \ldots q^n, p_0 \ldots p_n)$ надо писать в виде (15), т.е.

$$H = E = p_i \dot{q}^i - L^* \tag{34}$$

где L^* функция от $q^0, q^1, \ldots, q^n; \dot{q}^0, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n$. Так как импульсы (12) ([1], стр. 438) согласно определению Гамильтона ([1], стр. 237), Якоби ([2], стр. 50 и Остроградского ([1], стр. 326) для любого числа $i \in N$, в рамках которых и $n+1$, $n \in N$ следует, что функция (15) не что иное, как функция Гамильтона. Зависимость функции Гамильтона от времени t рассматривают классики, в первую очередь Якоби ([2], стр. 126—131) через силовую функцию, а кинетическая энергия однородной функцией второй степени от обобщенных скоростей. Между тем, функция кинетической энергии реономной системы не такого вида, если не рассматривать время как $(n+1)$—ю координату $q^{n+1} = t$. Вследствие этого, кроме доказательства что функция

$$H = T - T_0 + V = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - \frac{1}{2} a_{00} + V(q, t) \tag{35}$$

не инвариантная при точечном преобразовании ([3], стр. 232—236), не трудно показать что она неинвариантная и относительно преобразований Гамильтона ([4], стр, 481). Надо только заметить что $a_{\alpha 0}$ коэффициенты принадлежат только функции $T = a_{\alpha 0} \dot{q}^\alpha \dot{q}^0$; этих коэффициентов нет в (35) и их не должно быть ни после этого преобразования. Однако, это не так. В самом деле, из n соотношений

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = a_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta + a_{\alpha 0} = p_\alpha \text{ следует } \dot{q}^\gamma = a^{\gamma\alpha}(p_\alpha - a_{\alpha 0}).$$

Подстановкой в (35) получим, что

$$H = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} (p_\gamma - a_{\gamma 0})(p_\delta - a_{\delta 0}) - \frac{1}{2} a_{00} + V(q, t) =$$

$$= \frac{1}{2} a^{\gamma\delta} p_\gamma p_\delta - 2 a^{\gamma\delta} a_{\gamma 0} p_\delta + a^{\gamma\delta} a_{\gamma 0} a_{\delta 0} - \frac{1}{2} a_{00} + V,$$

а это очевидно не инвариантная „функция Гамильтона“ (35); она инвариантна в только в том случае когда $a_{\alpha 0} = 0$. Это ясно, если иметь в виду, что $a_{\alpha\beta}$ — основный тензор n—мерного пространства K_n, а $a_{\alpha 0}$ — ковариантная координата основного $(n+1)$—мерного тензора a_{ij} пространства K_{n+1}. Между тем функция (15), т. е.

$$H^* = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + V^* = \left(\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + a_{\alpha 0} \dot{q}^\alpha \dot{q}^0 + \frac{1}{2} a_{00} \dot{q}^0 \dot{q}^0\right)_{\dot{q} = \dot{q}(p)} + V^*$$

инвариантна относительно такого преобразования. Так как $|a_{ij}|_{ij=0}^{n} \neq 0$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = p_i = a_{ij}\,\dot{q}^j \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q}^j = a^{ij}\,p_i \tag{36}$$

Отсюда следует

$$H^* = \frac{1}{2}\,a^{ij}\,p_i\,p_j + V^* = \frac{1}{2}\,a^{\alpha\beta}\,p_\alpha\,p_\beta + a^{\alpha 0}\,p_\alpha\,p_0 + \frac{1}{2}\,a^{00}\,p_0\,p_0 + V^*$$

что и хотели показать.

Теперь становится ясно, что равенство „$p_{n+1} = -H$" нельзя привести в согласие ни с определением импульса ([1], стр. 431), ни с определением кинетической энергии, ни с преобразованием (36). При вычислении скорости $\dot{q}^0$ и импульса p_0, соотвествующим временной переменной q^0, надо обратитить внимание на формальную сторону аналитичекого метода, особенно при вычислении с частных производных. В смысле этого предупреждения заметим что $p_0 = a_{0\alpha}\,\dot{q}^\alpha + a_0{}^0\,\dot{q}^0 \neq T_1 + 2\,T_0$, так как $T_1 = a_{\alpha 0}\,\dot{q}^\alpha\,\dot{q}^0$ и $2\,T_0 = a_{00}\,\dot{q}^0\,\dot{q}^0$, Если упустить из виду эту особеность дифференциального исчисления, можно прийти к ошибочном выводу о существованию обобщеного интеграла энергии $T_2 - T_0 + V = h$ даже и тогда, когда кинетическая энергия явно зависит от времени t. Дело в том, что если подставить „$p_0 = T_1 + 2\,T_0$" в уравнение $D\,p_0 = (Q_0 + R_0)\,d\,t$, то получится $D\,(T_1 + 2\,T_{c0}) = (Q_0 + R_0)\,d\,t$. Между тем, правильное соотношение $p_0\,\dot{q}_0 = a_{0\alpha}\,\dot{q}^\alpha\,\dot{q}^0 + a_{00}\,\dot{q}^0\,\dot{q}^0 = T_1 + 2\,T_0$ приводит к иному выражению $\dot{q}^0\,D\,p_0 = D\,(p_0\dot{q}^0) - p_0\,D\,\dot{q}^0 = D\,(T_1 + 2\,T_0) - p_0\,D\,\dot{q}^0$, так как видно, что $D\,\dot{q}^0 = d\,\dot{q}^0 + \Gamma^0_{ij}\,\dot{q}^i\,d\,q^j = \Gamma^0_{ij}\,\dot{q}^i\,d\,q^j = a^{0k}\,\Gamma_{ij,\,k}\,\dot{q}^i\,d\,q^j$ в общем случае отличается от нуля если тензор a_{ij} завист от времени.

В заключение статьи считаю стоим приятным долгом выразить благодарность В. В. Румянцеву за проявленный интерес к затранутым вопросам. Особено признателен В. В. Козлову за редактирование статьи, полезные предложения и оказаную поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hamilton, W. R., *Second Essay on a General Method in Dynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc., N. 1, 1835; русск. пер. Гамильтон У, Второй очерк об общем метде в динамике,

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ, сборник статъей, М. (1959).

[2] Jacobi's, C. G. J., *Vorlesungen Uber Dynamik*, Berlin, 1984;

русск. пер. Якоби К., Лекции по динамике, Л—М, ОНТИ, (1936).

[3] Lancsos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, Toronto 1962;

русск. пер. Ланцош К., Вариационные принцицы менаники, Москва, „Мир“ (1965)

[4] Ляпунов, А. М., *Лекции по теоретической механике*, Киев, „Наукова думка“, (1982).

[5] Singe, J. L. *Tensorial Methods in Dynamics*, University of Toronto, (1936). русск. пер. Синж Дж. К., Тензорные методы в динамике, Москва. стр. 26, (1947).

[6] Румянцев, В. В. *К теореме о кинетической энергии*, Вестник Московского университета, № 3, (1967)

[7] Вуйичич В. А., Об интеграле энергии систем стесненных нестационарними связями, Т. Р. Mehanika. 6, Beograd, str. 138, (1980).

[8] Vujičić, V. A., *Kovariantna dinamika*, Beograd, Matematički institut, 132 s., (1981).

ON THE IVARIANCE OF THE PRINCIPLES ON MECHANICS

This paper deals with the iнvariance of the mechanical system with rheonomious constraints. Hamilton function is suggested to be in form (20). In such a case invariance is proved by the relations (33) to (36). That implies another approach to the kinetic potential (19). The strenght of the rate of change of the rheonomous constraints is introduced. Such an approach modifies Hamilton's and D'Alambert's principles for preseving their invariance. The approach theoretically proved is ilustrated with a few examples.

O INVARIANTNOSTI PRINCIPA U MEHANICI

U redu se izučava invarijantnost mehaničkih sistema s reonomnim vezama. Primećuje se da ako se generalisanim koordinatama $q^1, \ldots, q^n$ doda i $n+1$. koordinata koja odgovara vremenu, tada odgovarajuća $n+1$. koordinata impulsa nije u saglasnosti u fizičkom smislu s definicijom impulsa i narušava se invarijantnost varijacionih principa, koja je karakteristična za sisteme sa skleronomnim vezama. Da bi se otklonio taj nesklad između principa predlaže se da se Hamiltonova funkcija za reonomne sisteme piše u obliku (20), čija se invariantnost u tom slučaju dokazuje relacijama od (33) do (36). To povlači i drugi pristup kinetičkom potencijalu (19), u kome se javlja „reonomni" potencijal. To potiče od tuda što se uvodi kao novi element u ovu dinamiku snaga promene reonomnih veza, koja se može odrediti iz diferencijalnih jednačina kretanja. To je dovelo do modifikacije Hamiltonovog i Dalamber-Lagranžovog principa da bi očuvali svoju invarijantnost. Teorijski dokazani pristup ilustrovan je pomoću dva-tri primera raznih nivoa.

Veljko Vujičić
Njegoševa 72
11000 Beograd