TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 11, pp. 147—154, 1985. UDK 531.011

О РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАХ ТЕОРЕМЫ О КИНЕТИЧКОЙ ЭНЕРГИИ

В. В. Румянцев

(Поступило 1. июня 1984)

Расматривается вопрос о различных формах теоремы энергии для неголономных систем. Известно, что теорема о кинетичкой энергии и теорема об обобщенной кинетичкой энергии, выводимые, сответственно, из уравнений Лагранжа со множителями в декартовых и обобщенных координатах, неэквивалентны в случае нестационарных конечных связей. Это объясняется тем, что уравнения в обобщенных координатах не содержат реакций конечных связей, которые при нестационарности последних производят работу на действительном перемещении. Из сравнения этих теорем получено выражение для мощности реакций связей, которое представ яется в виде уравнения Лагранжа для времени $t = q_0$. Это уравнение можно вывести и непосредствено из уравнений в декартовых координатах [1]; система уравнений для q_i. q_0 позволяет получить общую теорему о кинетичкой энергии в дифференциальном или конечной формах.

Расмотрим систему N материјальных точек с массами m_ν, находящихся под действием заданых сил $\mathbf{F}_\nu$ и стесненных независимыми одна от другой идеальными связями, как конечными

$$f_\alpha(t,\ \mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, a) \tag{1}$$

так и дифференциальным неинтегрируемыми

$$\varphi_\beta(t,\ \mathbf{r}_\nu,\ \dot{\mathbf{r}}_\nu) = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, b) \tag{2}$$

в общем случае нелинейными относительно $\dot{\mathbf{r}}_\nu$. Здесь $\mathbf{r}_\nu$ — радиусы- векторы точек относительно начала инерцильной системы координат, t — время, $\dot{\mathbf{r}}_\nu = \dfrac{d\,\mathbf{r}_\nu}{d\,t}$ $(\nu = 1, \ldots, N)$. В частоости, линейные связи (2) имеют вид

$$\varphi_\beta(t,\ \mathbf{r}_\nu,\ \dot{\mathbf{r}}_\nu) = \sum_\nu \mathbf{A}_{\beta\nu}\,(t,\ \mathbf{r}_\mu)\cdot\dot{\mathbf{r}}_\nu + A_\beta(t,\ \mathbf{r}_\nu) = 0 \tag{3}$$

Реакции идеальнцх связей равны

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_\beta \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, N)$$

где λ_α, μ_β — неопределенные множители Лагранжа.

Уравнения движения системы

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = F_\nu + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial t_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_\beta \mu_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{4}$$

вместе с уравнениями связей позволяют, как известно, получить общую теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме

$$d \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}^2{}_\nu = \sum_v \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt + \sum_{\beta, o} \mu_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu \tag{5}$$

Введем в расмотренние обобщеные лагранжевы координаты q_i $(i = 1, \ldots, n = 3\,N\text{-}a)$. При этом

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu (t, q_i, \ldots, q_n), \quad \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i, \tag{6}$$

связи (1) общаются в тождества, а связи (2) принимают вид

$$\Phi_\beta (t, q, \dot{q}) = 0, \qquad (\beta = 1, \ldots, a). \tag{7}$$

В частности, связи (3) преобразуются к виду

$$\Phi_\beta (t, q, \dot{q}) = \sum_i B_{\beta i} (t, q) \, \dot{q}_i + B_\beta (t, q) = 0$$

где

$$B_{\beta i} = \sum_\nu \mathbf{A}_{\beta\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad B_\beta = \mathbf{A}_\beta + \sum_\nu A_{\beta\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}$$

Отметим, что в случае нестационарных связей (1) $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \neq 0$, вследствие чего, вообще говоря, $B_\beta \neq 0$ при $A_\beta = 0$; возможны и случаи, когда $B_\beta = 0$ при $A_\beta \neq 0$. В случае стационарных связей (1) однородные по $\dot{q}_i$ связи (2) преобразуются в однородные по $\dot{q}_i$ связи (7).

Для суммы элементарных работ заданных сил на действительном перемещении имеем выражение

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_i Q_i \, d q_i + Q_o \, d t$$

в котором обобщенные силы

$$Q_i = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}, \ (i = , \dots , n), \quad Q_0 = \sum_o \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}$$

соответствуют координатам q_i и времени $t = q_0$.

Сумма элементарных работ реакций связей (2) равна

$$\sum_{\beta,\nu} \mu_\beta \frac{\partial \overline{\varphi}_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_\beta \mu_\beta \left[\sum_i \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_i} dq_i + \sum_\nu \frac{\partial \overline{\varphi}_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} dt \right]$$

для связей (3) $\sum\limits_{\beta,\nu} \frac{\partial \overline{\varphi}_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} d\mathbf{r}_\nu = - \sum\limits_\beta \mu_\beta A_\beta (t, \mathbf{r}_\mu (t, \mathbf{r}_\mu (t, q_i) \, dt$

С учетом приведенных выше соотношений теорема о кинетической энергии (5) представляется в обобщенных координатах в виде

$$d\, T (t, q, \dot{q}) = \sum_i Q_i + (Q_0 + M)\, dt \tag{8}$$

где $T (t, q, \dot{q}) = T_2 + T_1 + T_0$ — кинетическая энергия системы, причем

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i, \quad T_0 = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \right)^2,$$

$$a_{ij} (t, q) = \sum_\nu m_r \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}, \quad a_i (t, q) = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t},$$

$$M = - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \sum_\beta \mu_\beta \left[\sum_i \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_\nu \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \right] \tag{9}$$

мощность реакций нестационарных связей (1) и неоднородных по $\dot{r}_\nu$ связей (2), причем в правой части (9) должна быть произведена замена (6). В случае, когда связи (1) не зависят явно оу времени, а связи (2) однородны по $\dot{\mathbf{r}}_\nu$, величина $M = 0$.

Величина M связана с величиной суммарной обобщенной реакции связей (1), (2), соответствующей времени t

$$R_0 = - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \sum_{\mu, o} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \tag{10}$$

соотношением

$$M = R_0 + \sum_{\beta, i} \mu_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

Для стационарных связей (1) величины $Q_0 = R_0 = 0$.

Уравнения движения в обобщенных координатах в форме уравнений Лагражна со множителями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_\beta \mu_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot q_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

приводят к известной теореме об обобщенной кинетической енергии

$$d(T_2 - T_0) = -\frac{\partial T}{\partial t} dt + \sum_i Q_i \, dq_i + \sum_{\beta, i} \mu_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot q_i} dq_i \tag{12}$$

Теорема (12) отличается, очевидно, от теоремы (8) в случае нестационарных связей (1), т.е. одни только уравнения (11), (7) не позволяют получить общю теорему о кинетичкой энергии. Это обстоятельство вполне понятно, так уравнения (11) не содержат реакций связей (1), которые в случае их нестационарности производят работу на действительном перемещении системы. Уравнения (12) и (8) совпадают только в случае, когда связи (1) не зависят явно от времени.

Сравнивая уравнсния (8) и (12), получаем выражение для величины обобщенной реакции связей (1) и (2)

$$R_0 = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} - Q_0 \tag{13}$$

ранее получеkое [2] дла случая линейных однородных связей (7).

Если принять обозначения $q_0 = t$. $\dot q_0 = 1$, то кинетическую энергию можно формально представить в виде однородной квадратичной формы скоростей $\dot q_\alpha$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n)$ [1]

$$2T = \sum_\nu m_\nu \left(\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \dot q_\alpha \right)^2 = \sum_{\alpha, \beta = 0}^{n} a_{\alpha\beta} \dot q_\alpha \dot q_\beta$$

где $a_{\alpha\beta} = a_{ij}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$, $a_{i0} = a_i$ $a_{00} = 2T_0$, и получить равенство

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_0} = \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \dot q_i + a_{00} \dot q_0 = T_1 + 2T_0.$$

Тогда уравнение (13) представляется в виде уравнения Лагранжа второго рода для переменной $q_0 = t$;

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_0} - \frac{\partial T}{\partial q_0} = Q_0 + R_0. \tag{14}$$

Это уравнение позволяет определить обобщенную реакцию связей (1), (2) после интегрирования уравнений (11), (7), чем и определяется его физический смысл. В случае стационарных связей (1) уравнение (14) обращается в тождество.

Уравнение (14) можно получить и непосредственно при помощи уравнений (4), умножая последние на $\dfrac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_0}$, суммируя по ν и используя очевидные соотношения

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_0}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_0} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_0}.$$

Таким путем уравнение вида (14) для голономной системы впервые было получено в работе[1]. Автор[1] полагает, однако, что уравнения Лагража для переменых q_i $(i = 1, \ldots, n)$ „не охватывают полносью действительное движение системы, стесненных нестацинарными связями" и поэтому в раширенном конфигурационном пространстве R_{n+1} к ним „надо добтвить днфференциальное уравнение, соответствующее координате $q_0 = t$". На самом же деле уравнения (1), (7) полностю описивают[3] движение $q_i = q_i(t)$ в пространстве R_{n+1}, а уравнение (14) межет служить для определения обобщенной реакции R_0 связей. Реакции сязей (1) можно, как известно[4], определить также при помощи уравнений Лагранжа, вводя избыточные координаты при мысленном освобождении системы от связеь (1). Отметим, что в работе[5] также предложено определение реакций нестационарных связей путем проектирорания уравнений (4) на направления векторов $\dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}$.

Добавление выведенного независимо от уравнений (8) и (12) уравнения (14) к уравнениям (11), (7) полезно также для получения из этих уравнений или общей теоремы о кинетической энергии (8), или для получения из (8) теоремы об обобщенной кинетической энергии (12). Для этого достаточно или сложить уравнения (12), (13), или вычесть из уравнения (8) уравнение (13), эквивалентное уравненю (14).

Рассмотрим теперь случай наличия среди заданых потенциальных сил, производных от силовой функции $U(t, \mathbf{r}_\nu)$. Пусть заданные силы

$$\mathbf{F}_\nu = \operatorname{grad}\, \mathbf{r}_\nu\, U(t,\ \mathbf{r}_\nu) + \tilde{\mathbf{F}}_\nu(t,\ \mathbf{r}_u\ \dot{\mathbf{r}}_u), \tag{15}$$

где $\tilde{F}_\nu(t,\ t_\mu,\ \dot{r}_\mu)$ — непотенциальные силы. Тогда обобщенные силы

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad Q_0 = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{Q}_0,$$

где $U(t,\ q) = U\ (t,\ \mathbf{r}_\nu)\ |_{(6)}$, $\tilde{Q}_j$ — непотенциальные обобщенные силы. Вводя в рассмотрение функцию Лагранжа $L(t,\ q,\ \dot{q}) = T + U$, перепишем уавнение (14) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = -\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{Q} + R_0 \tag{16}$$

В этом случае теорема (8) принимает вид теоремы о полной механической энергии в дифференциальной форме

$$d\,[T(t,\ q,\ \dot{q}) - U(t,\ q)] = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i\, d\,q_i + \left(\tilde{Q}_0 + M - \frac{\partial U}{\partial t}\right) d\,t \tag{17}$$

Интегрируя это равенство, получаем тторему об энергии в конечной форме

$$T(t,\ q,\ \tilde{q}) - U(t,\ q) = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i\, q_i + \tilde{Q}_0 + M - \frac{\partial U}{\partial t}\right) d\,t + \text{const} \tag{18}$$

Уравнение такого вида для голономной системы в случае $U = U(\mathbf{r}_\nu)$‘ $\tilde{Q}_j = 0$ выведено в работе[1] из уравнений вида (1), (14) и названо интегралом энергии нестациоарных систем. Однако интеграл в правой части (18) вообще может быть найден только после интегрирования диффеуенциальных уравнений движения, в связи с чем равенство (18) вообще не имеет другого значения, кроме представляемой им зависимости между полной и роботой непотенциальных сил и реакций связей[6]. И лишь в случае выполнения условий

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i\ \dot{q}_i = 0,\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0\ \ (\alpha = 1, \ldots, a), \frac{\partial U}{\partial t} = 0,\ \ \sum_{\nu} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = 0 \tag{19}$$

уравнение (18) становится первым интегралом — интегралом энергии

$$T(q,\ \dot{q}) - U(q) = \text{const}. \tag{20}$$

эквивалентным интегралу $\dfrac{1}{2} \sum\limits_{\nu} m_\nu\, \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 - U(\mathbf{r}_\nu) = \text{const}$. уравнений (4), (1), (2)

Возможны также случаи когда заданные силы $\mathbf{F}_\nu$ непотенциальны, т.е. не существует силовой функции $U(t,\ \mathbf{r}_\nu)$, а обощенные силы Q_j — потенциальные, производные от силовой функции $U(t,\ q_i)$

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n),\ Q_0 = \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{21}$$

В этих случаях уравнение (12) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0 - U) = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{\alpha,\, i} \mu_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_i}\, \dot{q}_i \tag{22}$$

и при условиях

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 0 \quad (\beta = 1, \dots, b) \tag{23}$$

дает обобщенный интеграл энергии

$$T_2(q, \dot{q}) - T_0(q) - U(q) = \text{const} \tag{24}$$

С другой стороны, при условиях (21) уравнение (8) принимает вид

$$d(T - U) = M = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta, \nu} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu$$

и дает интеграл энергии (20), если выполняются условия

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \; \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, a, \; \beta = 1, \dots, b) \tag{25}$$

При условиях (25) интеграл (24) также принимает вид интеграл (20).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вуйичич, В. А,, *Об интеграле энергии системи*, стесненых нестационарными связями. Теоретическая и прикладная механика, 6, Београд. стр. 133—143, (1980),

[2] Румянцев, В. В., *К теореме о кинетической энергии*. Вестник МГУ. Математика. механика, №3. страна 104—105, (1967).

[3] Rumjantsev, V. V., *On some problems of analytical dynamics of nonholonomic systems*. Proseedings of the IUTAM-ISIMM symposium on modern developments in analytical mechanics, vol. II, Academy of Sciences of turin, p.p. 697—716, (1983).

[4] Лурье. А. М., *Аналитическая механика*. Москва. Физматгиз, (1961).

[5] Сильде. О.. Рельвик. Х.. *Уравнение возможной мощности в аналитической механике*. Известия АН ЭССР, Хизика. Математика, т. 32, No 4. стр. 398—409, (1983).

[6] Ляпунов, А. М., *Лекции по теоретической механике*. Киев. Наукова Думка, (1982).

ON DIFFERENT FORMS OF THE THEOREM OF KINETIC ENERGY

Different forms of the kinetic energy are considered for nonholonomic systems. Starting from the fact that the theorems on cinetic energy derived from the equations of Lagrange of the first and second kind are not equivalent in the case of finite rheonomous constraints, an expression for the determination of the powor ef the constraints reaction is derived in the form of the equations of Lagrange of the second kind for the variable $t = q_0$. The system of equations for q_i, q_0 allows the formulation of a general theorem on kinetic energy in a differential or in a finite form.

O RAZLIČITIM FORMAMA TEOREME O KINETIČKOJ ENERGIJI

Razmatra se pitanje različitih oblika teoreme energije za neholonomne sisteme. Polazeći od stava da teoreme o kinetičkoj energiji izvedene pomoću Lagranžovih jednačina prve vrste i Lagranžovih jednačina druge vrste nisu ekvivalentne u slučaju konačnih reonomnih veza, izvodi se izraz za određivanje snage reakcije veza, koji je predstavljan u obliku Lagranžove jednačine druge vrste za promenljivu vremena $t = q^0$.

Sistem jednačina q^i, q^0 omogućava da se dobije opšta teorema o kinetičkoj energiji u diferencijalnom ili konačnom obliku.

В. Г. Румянцев
Вычислительный центр Академии наук СССР
ул. Вавилова, 40
117967, Москва, В—333