

ОСЕСИМЕТРИЧНЫЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

Д. Д. Николијевић

(Поступило 27 июля 1984.)

1. Введение

В статье рассматривается, с практической точки зрения, интересная задача стационарного, осесимметричного слоя при оптекании тел вращения несжимаемой, проводимой жидкостью а под влиянием перпендикулярного магнитного поля в отсутствии электрического поля. Исследуются жидкости у которых диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость близкие единицы что считается обыкновенным в магнитной гидродинамике. Предполагается что плотность электрических зарядов незначительная, электропроводимость жидкости постоянная и тоже незначительная, тело вращения достаточно удлиненное и что постоянное магнитное поле в отношении на внешнее течение находится в относительном покое.

Что бы решить выше определенную магнитогидродинамическую (МГД) задачу используется метод Лойцяского [1], усовершенствованный Сальниковым [2], который уже дал хорошие результаты при рассмотрении других моделей пограничного слоя.

2. Уравнения рассматриваемой задачи

При исследовании данной задачи выводится система соответствующих дифференциальных уравнений, исходя от уравнения Навье-Стокса дополненного силой Лоренца [3];

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{w} + \vec{F}_L, \quad (2.1)$$

и уравнения неразрывности

$$\nabla \vec{w} = 0, \quad (2.2)$$

при чем сила Лоренца, в случаях течения проводящей жидкости с малой плотностью электрических зарядов и отсутствия внешнего электрического поля, определяется выражением [3]:

$$\vec{F}_L = \sigma (\vec{v}_r \times \vec{B}) \times \vec{B}, \quad (2.3)$$

где;

σ — электропроводимость жидкости,

\vec{v}_r — относительная скорость жидкостных частиц в пограничном слое

в соотношении с линиями силы магнитной индукции и

\vec{B} — магнитная индукция.

Так как магнитное поле в относительном покое в соотношении с внешним течением, относительная скорость \vec{v}_r определяется следующим соотношением:

$$\vec{v}_r = \vec{w} - \vec{U}, \quad (2.4)$$

где U — продольная скорость внешнего течения.

Имея в виду предположение о достаточном удлинении тела вращения, можно принять с незначительным отклонением, что перпендикулярное магнитное поле по направлению радиальное (рис. 1). В этом случае рисунки течений в меридиальных сечениях одинаковы и следовательно это течение двумерное. При помощи (2.3) и (2.4) уравнения (2.1) и (2.2) в развитой форме в цилиндрической системе координат имеют следующий вид:

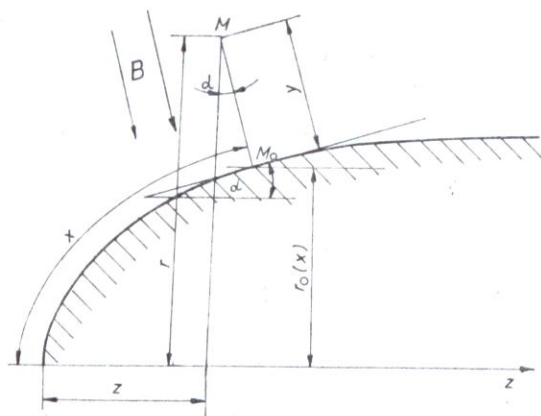


Рис. 1

$$V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) -$$

$$- N(V_z - U),$$

$$V_z \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (r V_z) + \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = 0 \quad (2.5)$$

где:

V_r — проекция скорости на радиальное направление

V_z — проекция скорости на осевое направление

$aN = \sigma B^2 / \rho$ — магнитное число.

При предположении о достаточном удлинении тела вращения можно считать что угол α , между касательной на меридиальном контуре тела и оси тела, малый [4]. Однако, хотя Это предположение не соответствует окрестности кормовой критической точки, а иногда и окрестности передней критической точки его принимают потому что методы пограничного слоя в окрестности кормовой критической точки становятся неприменимыми и так как отклонение от точного решения в окрестности передней критической точки незначительно влияет на его дальнейшее развитие.

Принимая согласно этому, предположение о малом значении угла α , в (2.5) вместо V_z вводим u , вместо V_r вводим v , в место $\frac{\partial}{\partial z}$ вводим $\frac{\partial}{\partial x}$, вместо $\frac{\partial}{\partial r}$ вводим $\frac{\partial}{\partial y}$ и таким образом получаем приближенную систему уравнений:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - N(u - U), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{r^2} \right), \\ \frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

С целью оценки порядка величины отдельных членов уравнений (2.6) в них вводят, в случае $r \geq r_0 > 0$, как уже это сделано в теории плоского пограничного слоя [4], при посредстве выражения;

$$u = U u^*, v = \frac{U}{\sqrt{Re}} v^*, \bar{p} = \rho U^2 \bar{p}^*, x = Lx^*, y = \frac{L}{\sqrt{Re}} y^*, r = Lr^* \quad (2.7)$$

безразмерные величины обозначены звездочкой, а где L — представляет масштаб продольных координат и Re — число Рейнольдса.

После предельного перехода, (те. для $Re \rightarrow \infty$), таким образом полученные уравнения по возвращению выражении снова с размерными величинами и после введения внешней скорости $U(x)$ преобразуются в:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - N(u - U),$$

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} = 0. \quad (2.8)$$

Как из рис. 1. следует что

$$r = r_0(x) + y \cos \alpha, \quad (2.9)$$

и то всюду в пограничном слое кроме в области близкой точки отрыва то в уравнениях (2.8) можно приблизительно заменить r са r_0 .

Нужно напомнит что в дальнейшем изложении задержим r для обозначена радиуса r_0 поперечной кривизны поверхности тела вращения.

Граничные условия рассматриваемой задачи не различаются от граничных условий соответствующего плоского МГД пограничного слоя [5], те

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0, \quad \text{для } y = 0; \\ u &\rightarrow U(x) \quad \text{для } y \rightarrow \infty; \\ u &= u_0(y) \quad \text{для } x = x_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для рассматривания данной задачи необходимо решить уравнения (2.8) с граничными условиями (2.10).

3. Обобщение преобразования Манглер — Степанова

Для случая плоского МГД пограничного слоя параметры, определяющие вид тела, как уже известно из [5], не входят явно в уравнения, а только влияют посредством распределения скорости внешнего течения $U(x)$. Для осесимметрического МГД пограничного слоя на телах вращения данные параметры, входят явно в уравнения (2.8) и то в виде радиуса поперечного сечения.

Следуя за идеями Степанова [6] т. е. Манглера, происходит что уравнения (2.8) можно свести на соответствующие уравнения плоской задачи [5] введением следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{1}{L^2} \int_0^x r^2(x) dx; \quad \tilde{y} = \frac{r(x)}{L} y; \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x, y); \quad \tilde{U}(\tilde{x}) = U(x); \\ \tilde{v} &= \frac{L}{r} \left(v + \frac{y u}{r} \frac{dr}{dx} \right); \quad \tilde{N}(\tilde{x}) = \frac{L^2}{r^3} N(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

представляющих обобщение известных преобразований Манглер-Степанова на рассматривание исследуемой задачи. Пользуясь именно преобразованиями (3.1) и дифференциальными операторами

$$\frac{\partial}{\partial x} = r^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + y \frac{dr}{dv} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = r \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}, \quad (3.2)$$

уравнения (2.8) сводятся на соответствующие уравнения плоской задачи:

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{x}} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{N}(\tilde{u} - \tilde{U}); \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{u} = 0; \quad \tilde{v} = 0 &\text{ для } \tilde{y} = 0, \\ \tilde{u} \rightarrow \tilde{U} &\text{ для } \tilde{y} \rightarrow \infty, \\ \tilde{u} = \tilde{u}_0(\tilde{y}) &\text{ для } \tilde{x} = \tilde{x}_0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

при чем между характерными величинами пограничного слоя [4], для обеих задач, соответствуют следующие соотношения:

— для напряжения трения на стенке

$$\tau_w = \frac{r}{L} \tilde{\tau}_w, \quad (3.5)$$

— для толщины вытеснения

$$\delta^* = \frac{L}{r} \tilde{\delta}^*, \quad (3.6)$$

и для толщины потери импульса

$$\delta^{**} = \frac{L}{r} \tilde{\delta}^{**} \quad (3.7)$$

где с "˜" обозначены соответствующие величины плоского МГД пограничного слоя.

Данные преобразования (3.1) значит, дают возможность решить рассматриваемую задачу при помощи решения соответствующих плоских аналогий.

4. Универсальные уравнения рассматриваемой задачи

Для решения рассматриваемой задачи применяется метод обобщенного подобия Лойцянского усовершенствованного Сальниковым, из-за всех тех преимуществ которые предлагает. С этой целью прежде всего вводится функция тока $\psi(x, y)$, выражениями

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial y}; \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial x}, \quad (4.1)$$

в уравнения (2.8) после чего они принимают следующий вид;

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\psi}{r} \frac{dr}{dx} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - N \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - U \right), \quad (4.1)$$

причем граничные условия (2.10) можно представить в виде:

$$\psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{для } y = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U(x) \quad \text{для } y \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 \quad \text{для } \tilde{x} = x_0. \quad (4.3)$$

Однако нужно заметить что в этой статье пользуется переменными осесимметрической проблемы

$$\tilde{x} = \frac{1}{L^2} \int_0^x r^2(x) dx, \quad \eta = \frac{r}{L} \frac{\tilde{U}^{b_0/2} y}{\left(\frac{a_0 v}{L^2} \int_0^x r^2(x) \tilde{U}^{b_0-1} dx \right)^{1/2}},$$

$$\psi = \frac{L}{r} \left[\frac{a_0 v}{L^2} \int_0^x \tilde{U}^{b_0-1} r^2(x) dx \right]^{1/2} \tilde{U}^{1-b_0/2} \Phi(\tilde{x}, \eta) \quad (4.4)$$

полученными в [7] в ведением формул Манглер-Степанова в координаты Сальникова [2]. А именно если ввести переменные (4.4) в уравнение (4.2) и воспользоваться соотношением

$$d\tilde{x} = \frac{r^2(x)}{L^2} dx, \quad (4.5)$$

приходим к следующему уравнению соответствующему плоской задаче

$$\frac{\partial^3 \varnothing}{\partial \eta^3} + \left[\frac{a_0}{2} + \left(1 - \frac{b_0}{2}\right) \tilde{S} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{x}} \right] \varnothing \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} + \tilde{S} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{x}} \left[1 - \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ + \tilde{N} \tilde{S} \left(1 - \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right) = \tilde{U} \tilde{S} \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \tilde{x} \partial \eta} - \frac{\partial \varnothing}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} \right), \quad (4.6)$$

где

$$\tilde{S} = \frac{a_0}{\tilde{U}^{b_0}} \int_0^x \tilde{U}^{b_0-1} d\tilde{x}, \quad (4.7)$$

при чем граничные условия следующие:

$$\varnothing = 0, \quad \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} = 0, \quad \text{для } \eta = 0;$$

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{для } \eta \rightarrow \infty;$$

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right)_0 \quad \text{для } \tilde{x} = \tilde{x}_0. \quad (4.8)$$

Вводя в рассмотрение толщину потери импульса $\tilde{\delta}^{**}$ (3.7), ее преобразованием при помощи (3.1) и (3.4) и имея в виду (4.7) получим:

$$\tilde{\delta}^{**} = (\nu \tilde{S})^{1/2} D, \quad (4.9)$$

где:

$$D = \int_0^\infty \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right) d\eta. \quad (4.10)$$

При помощи формпараметра $\tilde{f}_1(\tilde{x})$ и магнитного параметра $\tilde{g}_1(\tilde{x})$ определенных выражениями

$$\tilde{f}_1(\tilde{x}) = \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{x}} \frac{\tilde{\delta}^{**2}}{\nu}, \quad \tilde{g}_1(\tilde{x}) = \frac{\tilde{N} \tilde{\delta}^{**2}}{\nu} \quad (4.11)$$

которые после введения выражения (4.9) принимают вид:

$$\tilde{f}_1(\tilde{x}) = \tilde{S} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{x}} D^3; \quad \tilde{g}_1(\tilde{x}) = \tilde{S} \tilde{N} D^2, \quad (4.12)$$

уравнение (4.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varnothing}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2D^2} [a_0 D^2 + (2 - b_0) \tilde{f}_1] \varnothing \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{D^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{g_1}{D^2} \left(1 - \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right) = \\ = \frac{\tilde{U} \tilde{f}_1}{D^2 \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{x}}} \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \tilde{x} \partial \eta} - \frac{\partial \varnothing}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

причем граничные условия (4.8) остаются неизменными.

Уравнение (4.13) позволяет введение совокупностей параметров:

$$\tilde{f}_k = \tilde{U}^{k-1} \frac{d^k \tilde{U}}{d\tilde{x}^k} \tilde{z}^{**k}, \quad \tilde{g}_k = \tilde{U}^{k-1} \frac{d^{k-1} \tilde{N}}{d\tilde{x}^{k-1}} \tilde{z}^{**k}, \quad (4.14)$$

где

$$\tilde{z}^{**} = \frac{\tilde{\delta}^{***}}{\nu}, \quad (4.15)$$

а $k = 1, 2, 3, \dots$ причем параметры (4.14) удовлетворяют дифференциальные рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 \frac{d\tilde{f}_k}{d\tilde{x}} \frac{\tilde{U}}{d\tilde{U}} = [(k-1)\tilde{f}_1 + k\tilde{F}^*] \tilde{f}_k + \tilde{f}_{k+1} = E_k, \\ \tilde{f}_1 \frac{d\tilde{g}_k}{d\tilde{x}} \frac{\tilde{U}}{d\tilde{U}} = [(k-1)\tilde{f}_1 + k\tilde{F}^*] \tilde{g}_k + \tilde{g}_{k+1} = I_k, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где [1], [5]:

$$\tilde{F}^* = 2[\tilde{\xi} - (2 + H)\tilde{f}_1] - 2\tilde{g}_1 H, \quad \tilde{\xi} = \frac{\tilde{\tau}_w \tilde{\delta}^{**}}{\mu \tilde{U}}, \quad H = \frac{\tilde{\delta}^*}{\tilde{\delta}^{**}}. \quad (4.17)$$

Принимая параметры \tilde{f}_k и \tilde{g}_k (4.14) в качестве новых независимых переменных и пользуясь дифференциальным оператором

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\tilde{f}_k}{d\tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \tilde{f}_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\tilde{g}_k}{d\tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \tilde{g}_k}, \quad (4.18)$$

уравнение (4.13) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 \varnothing}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2D^2} [a_0 D^2 + (2 - b_0) \tilde{f}_1] \varnothing \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} + \frac{\tilde{f}_1}{D^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{\tilde{g}_1}{D^2} \left(1 - \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{D^2} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \tilde{f}_k \partial \eta} - \frac{\partial \varnothing}{\partial \tilde{f}_k} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} \right) + \\
& + \frac{1}{D^2} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \tilde{g}_k \partial \eta} - \frac{\partial \varnothing}{\partial \tilde{g}_k} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} \right), \quad (4.19)
\end{aligned}$$

причем граничные условия следующие;

$$\begin{aligned}
& \varnothing = 0, \quad \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} = 0 \quad \text{для } \eta = 0; \\
& \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{для } \eta \rightarrow \infty; \\
& \varnothing = \varnothing_0 \quad \text{для } \tilde{f}_k = 0, \quad \tilde{g}_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Поскольку уравнение (4.19) и граничные условия (4.20) явно не содержат характеристики какого либо конкретного внешнего течения, эта система считается универсальной для рассматриваемой задачи.

5. Решение двухпараметрического однажды локализованного уравнения

Так как полученное универсальное уравнение (4.19) содержит на правой стороне бесконечные суммы членов то его решение в принципе невозможно получить. Поэтому прибегаем к интегрированию уравнения (4.19) в определенном параметрическом приближении и то либо полном либо локализованном.

Учитывая что в универсальном уравнении (4.19) являются два сорта независимых влияний на развитие пограничного слоя, было бы целесообразно задержать в первом приближении, оба параметра \tilde{f}_1 и \tilde{g}_1 . Таким образом из (4.19) после введения $\tilde{f}_k = 0$ и $\tilde{g}_k = 0$ (для $k = 2, 3, \dots$) следует полное двухпараметрическое уравнение;

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 \varnothing}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2D^2} [a_0 D^2 + (2 - b_0) \tilde{f}_1] \varnothing \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} + \frac{\tilde{f}_1}{D^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{\tilde{g}_1}{D^2} \left(1 - \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right) = \frac{\tilde{F}^* \tilde{f}_1}{D^2} \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \tilde{f}_1 \partial \eta} - \frac{\partial \varnothing}{\partial \tilde{f}_1} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} \right) + \\
& + \frac{\tilde{F}^* \tilde{g}_1}{D^2} \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \tilde{g}_1 \partial \eta} - \frac{\partial \varnothing}{\partial \tilde{g}_1} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2} \right). \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Однако, учитывая трудности, возникающие при численном интегрировании уравнения (5.1) связанным с превышением границы памяти электроно-счетной машины которая была нам в распоряжении, в этой статье выполнено ее интегрирование в двухпараметрическом однажды локализованном приближении причем локализация осуществляется по динамическом параметру \tilde{f}_1 . А именно, поскольку динамические и магнитные силы одного и того же порядка величин, цель этих исследований представляет изучение влияния локализации по динамическом параметру \tilde{f}_1 на развитие пограничного слоя. Таким образом уравнение (5.1) в данном приближении принимает вид;

$$\frac{\partial^3 \emptyset}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2 D^2} [a_0 D^2 + (2 - b_0) \bar{f}_1] \emptyset \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{f}_1}{D^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\tilde{g}_1}{D^2} \left(1 - \frac{\partial \emptyset}{\partial \eta} \right) = \frac{\tilde{F}^* \tilde{g}_1}{D^2} \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \tilde{g}_1 \partial \eta} - \frac{\partial \emptyset}{\partial \tilde{g}_1} \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \eta^2} \right), \quad (5.2)$$

а соответствующие граничные условия;

$$\emptyset = 0, \quad \frac{\partial \emptyset}{\partial \eta} = 0 \quad \text{для} \quad \eta = 0;$$

$\bar{f}_1 = -0.01$								
\tilde{g}_1	A	D	\tilde{F}^*	$\tilde{\zeta}$	n	\tilde{g}_1/D^2	$\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \eta^2}(0)$	\bar{f}_1/D^2
0.0000	2.6491	0.9957	0.4943	0.2005	2.6606	0.0000	0.2014	-0.0101
0.0200	2.5009	0.9718	0.4479	0.2297	2.5736	0.0212	0.2364	-0.0106
0.0400	2.3659	0.9466	0.4039	0.2569	2.4992	0.0446	0.2714	-0.0112
0.0600	2.2403	0.9204	0.3619	0.2826	2.4342	0.0708	0.3071	-0.0118
0.0800	2.1215	0.8928	0.3216	0.3071	2.3762	0.1004	0.3440	-0.0125
0.1000	2.0073	0.8638	0.2830	0.3307	2.3237	0.1340	0.3828	-0.0134
0.1200	1.8961	0.8332	0.2460	0.3533	2.2757	0.1729	0.4241	-0.0144
0.1400	1.7861	0.8005	0.2104	0.3753	2.2314	0.2185	0.4688	-0.0156
0.1600	1.6758	0.7652	0.1762	0.3966	2.1900	0.2732	0.5183	-0.0171
0.1800	1.5630	0.7266	0.1434	0.4174	2.1510	0.3409	0.5744	-0.0189
0.2000	1.4451	0.6836	0.1120	0.4377	2.1141	0.4280	0.6403	-0.0214
0.2200	1.3177	0.6339	0.0821	0.4576	2.0787	0.5475	0.7218	-0.0250
0.2400	1.1719	0.5729	0.0526	0.4768	2.0456	0.7313	0.8323	-0.0305

табела

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{для} \quad \eta \rightarrow \infty;$$

$$\varnothing = \varnothing_0(\eta, \bar{f}_1) \quad \text{для} \quad \tilde{g}_1 = 0. \quad (5.3)$$

Для численного интегрирования уравнения (5.2) с граничными условиями (5.3) применяется известный в литературе метод „прогонки“ [8] обоснованный на методе конечных разностей с неявной схемой при чем сами расчеты осуществлены на электронно-счетной машине PDP 11/40. Нужно заметить что приняты оптимальные значения для $a_0 = 0,4408$ $b_0 = 5,7140$ установлены при рассмотрении плоской задачи.

При этом затабулированы универсальные функции $A, D, \tilde{F}^* \tilde{\xi}, H, \tilde{g}_1/D^2, \bar{f}_1/D^2, \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2}(0), u/U$ и \varnothing необходимые для расчета конкретных практических задач для различных значений динамического параметра. В статье даны значения соответствуют $\bar{f}_1 = -0.01$ (табела) а все остальные решения можно найти в работе [9].

6. Анализ результатов и их применение

Чтобы легче следить за распределениями отдельных выше указанных универсальных величин они графически изображены на соответствующих диаграммах.

Так напр. на рис. 2. изображено распределение безразмерного коэффициента трения $\tilde{\xi}$ в функции магнитного параметра \tilde{g}_1 . Замечается возрастание величины $\tilde{\xi}$ с увеличением магнитного параметра, что указывает на влияние магнитного поля на положение точки отрыва погра-

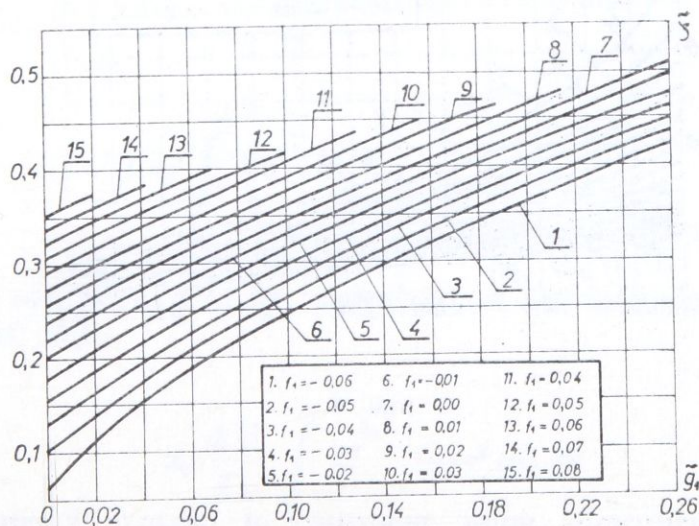


рис. 2.

ничного слоя. А имено, с усилением магнитного поля точка отрыва пограничного слоя предвигается вниз по течению. Такой же эффект замечается и при возрастании динамического параметра \bar{f}_1 , а при постоянном значении магнитного параметра \tilde{g}_1 , т.е. постоянной интенсивности магнитного поля. На том же рисунке замечается и эквидистантность кривых $\tilde{\xi}$, определенных для различных значений динамического параметра \bar{f}_1 .

На рис. 3. замечается незначительное отклонение функции \tilde{F}^* от прямой что дает возможность ее линеаризации что касается магнитного параметра \tilde{g}_1 .

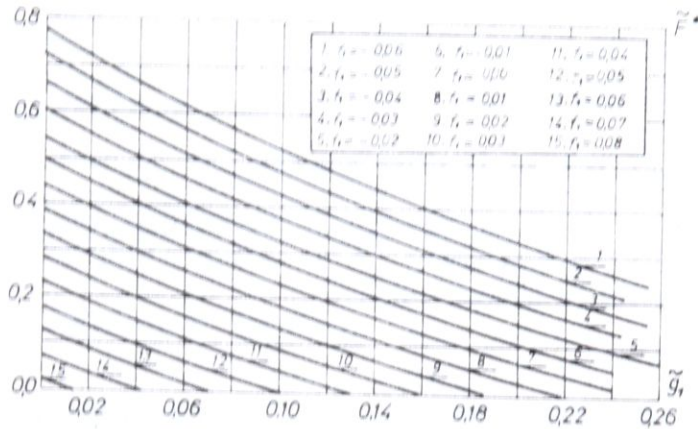


рис. 3.

Из графического изображения величины N в функции магнитного параметра \tilde{g}_1 данного на рис. 4., видно что величина N уменьшается с возрастанием магнитного параметра \tilde{g}_1 . Из этого можно заключить что

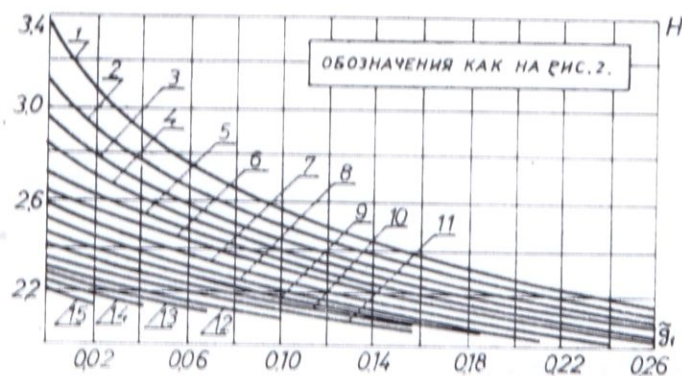


рис. 4.

существование магнитного поля действует в смысле уменьшения соотношения между толщиной вытеснения и толщиной потери импульса. Такое же влияние на соотношение N оказывает и динамический параметр \bar{f}_1 ,

что видно на том же рисунке. А именно, для постоянного значения магнитного параметра \tilde{g}_1 величина H уменьшается с возрастанием динамического параметра \tilde{f}_1 .

Что бы полученные универсальные решения могли быть применены к расчету МГД пограничного слоя для какого либо конкретного случая течения преобразуются, прежде всего, посредством выражения (4.4) соотношения (4.5), (4.6), (4.7). Таким образом получается:

для напряжения трения на стенке

$$\tau_w = \mu \frac{r(x) U^{\frac{b_0}{2}+1}(x)}{\left[a_0 \nu \int_0^x r^2(x) U^{b_0-1}(x) dx \right]^{1/2}} \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \eta^2}(0), \quad (6.1)$$

для толщины вытеснения

$$\delta^* = \frac{\left[a_0 \nu \int_0^x r^2(x) U^{b_0-1}(x) dx \right]^{1/2}}{r(x) U^{b_0/2}(x)} A, \quad (6.2)$$

и для толщины потери импульса

$$\delta^{**} = \frac{\left[a_0 \nu \int_0^x r^2(x) U^{b_0-1}(x) dx \right]^{1/2}}{r(x) U^{b_0/2}(x)} B, \quad (6.3)$$

где:

$$A = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \varnothing}{\partial \eta} \right) d\eta. \quad (6.4)$$

Кроме этого выражения (4.12) посредством соотношений (3.1) принимают следующий вид:

$$\frac{f_1}{D^2} = \frac{a_0 \frac{dU}{dx} \int_0^x U^{b_0-1}(x) r^2(x) dx}{r^2(x) U^{b_0}(x)} \quad (6.5)$$

и

$$\frac{g_1}{D^2} = \frac{a_0 N \int_0^x U^{b_0-1}(x) r^2(x) dx}{r^2(x) U^{b_0}(x)} \quad (6.6)$$

Самый расчет осуществляется таким образом что для конкретных распределении $U(x)$, $N(x)$ и $r(x)$ при помощи выражения (6.5) и (6.6), а для определенного значения продольной координаты $x = x_0$ вычисляются величины f_1/D^2 и g_1/D^2 . Потом после этого для определенной пары значений f_1/D^2 и g_1/D^2 из соответствующих таблиц берутся значения универсальных величин A , D , $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}(0)$. После этого посредством выражения (6.1), (6.2) и (6.3) а для того же значение $x = x_0$ определяются характерные величины пограничного слоя:

Расчет конкретного примера который из-за объема в статье не приводим будет в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский, Г. Л., *Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя*, Прикладная математика и механика. Том 29, выпуск 1, Москва, (1965).
- [2] Saljnikov N. V., *A contribution to universal solutions of the boundary layer theory*, Teorijska i primenjena mehanika 4, Beograd (1978).
- [3] Landau L., Lifšic, M. E., *Elektrodinamika kontinualnih sredina*, Zavod za izdavanje udžbenika NRS Beograd, (1961).
- [4] Лойцянский, Г. Л., *Ламинарный пограничный слой*, Москва, (1962).
- [5] Boričić, B. Z., *Strujanje provodnog fluida u MHD graničnom sloju*, Zbornik radova XI Jugoslovenskog kongresa racionalne i primenjene mehanike, Baško polje, (1972).
- [6] Степанов, Е. И., ПММ т. XI. в. 1, (1947).
- [7] Kukić, M. D., *Metoda za računanje osnosimetričnog graničnog sloja na obrtnim telima*, Magistarski rad, PMF Beograd, (1974).
- [8] Симуни, Л. М., Терентьев, Н. М., *Численное решение уравнений „однопараметрической“ теории пограничного слоя*, Тр. Ленинг. ин-та, № 248 (1965).
- [9] Nikodijević, D. D., *Univerzalizacija osnosimetričnog MHD graničnog sloja na obrtnim telima*, Magistarski rad, PMF Beograd (1981).

AXISYMMETRICAL MHD BOUNDARY LAYER AT ROTATIONAL BODIES

The problem of a stationary axisymmetrical incompressible MHD boundary layer at rotational bodies was discussed. In accordance with the purpose, the system of the starting differential equation is derived first of all, and then the Mangler-Stepanov's transformations are generalized. With this, there is the possibility of solving the problem of axisymmetrical MHD boundary layer at rotational bodies by using the solutions of corresponding plane analogies.

By applying the method of Loitsyanskii, improved by Saljn'kov, one reach the universal equation of the problem observed. The equation in two-parameter once localized approximation, according to the dynamic parameter was numerically solved on a digital computer. But in this paper, the results obtained are presented only partially. Besides that, the procedure for calculation of the special cases of flow was given finally.

OSNOSIMETRIČNI MHD GRANIČNI SLOJ NA OBTNIM TELIMA

Rasmatra se problem stacionarnog osnosimetričnog nestišljivog MHD graničnog sloja na obrtnim telima. U tom cilju se najpre izvodi sistem polaznih diferencijalnih jednačina a zatim vrši uopštavanje Mangler-Stepanov-ih transformacija. Time je stvorena mogućnost za rešavanje problema osnosimetričnog MHD graničnog sloja na obrtnim telima korišćenjem rešenja odgovarajućih ravanskih analogija.

Korišćenjem metode Lojčanskog usavršene od strane Saljn'kova dolazi se do univerzalne jednačine posmatranog problema. Jednačina je u dvoparametarskom jedared lokalizovanom približenju po dinamičkom parametru numerički rešena na elektronskom računaru. Deo dobijenih rezultata je u radu prikazan. Osim toga je na kraju dat i postupak za proračun konkretnih slučajeva strujanja.

Dragiša D. Nikodijević Mašinski fakultet
Beogradska br. 14, 18000 Niš
Jugoslavija