TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 10, pp. 99—108, 1984, UDK 534.12

ДВУХЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Р. Павловић

(Поступило 26. октября 1983)

Двухчастотные колебания являются в упругом теле когда оно находится под воздействием внешней двухчастотной возбудительной силы и когда начальные условия дают возможность формирования двухчастотных колебаний.

В работе рассматриваются колебания пологой цилиндрической оболочке на которую действует внешнаяя сила, распределенная по поверхности оболочки с двумя медленно изменяющими, частотами близкими двум собственным частотам оболочки.

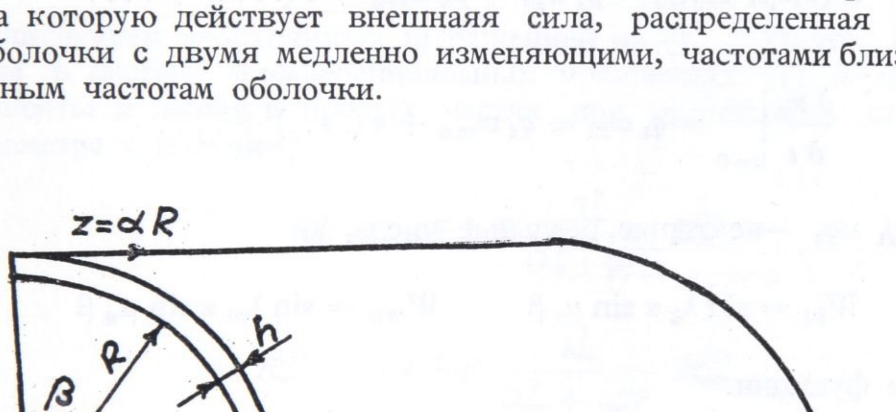

Рис. 1.

Дифференциальные уравнения колебаний оболочки известны;

$$\frac{1}{E\,h}\,\nabla^4\,\phi - R\,\frac{\partial^2 w}{\partial\,\alpha^2} = 0$$

(1)

$$R\,\frac{\partial^2\,\phi}{\partial\,\alpha^2} + D\,\triangle^4\,w + \rho\,h\,R^4\,\frac{\partial^2\,w}{\partial\,t^2} = \varepsilon f\left(\tau,\,\alpha,\,\beta,\,w,\,\frac{\partial\,w}{\partial\,t},\,\ldots\frac{\partial^4\,w}{\partial\,\beta^4},\,\theta_1,\,\theta_2\right)$$

где; ф—функция напряжения, w—функция перемещения, R—радиус оболочки, h—толщина оболочки, ρ—плотность, E—модуль упругости, ε—малый параметр, $f(\tau, \alpha, \beta, w \ldots \theta_1 \theta_2)$ — 2π—периодическая функция по аргументнам θ_1 и θ_2 которую можно разложить по ними в конечный ряд фурье. Функция $f(\tau, \alpha, \beta, w \ldots \theta_1, \theta_2)$ является целой рациональной функцией всех других аргументов и достаточно дифференцируемой при всех конечных значения аргументов, $d\theta_1/dt = \nu_1(\tau) \approx \omega_{k1}$ и $d\theta_2/dt = \nu_2(\tau) \approx \omega_{mn}$ мгновенние частоты внешней силы, зависяющых от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и неходятся вблиз соответствующых собственых частотах невозмущеного колебания болочки.

Рассматривается оболочка с шарнирно закреплеными концами;

$$\left.\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha = \dfrac{1}{R} \end{matrix}\right\} w = v = M_1 = 0 \qquad \left.\begin{matrix} \beta = 0 \\ \beta = \beta_0 \end{matrix}\right\} w = u = M_2 = 0 \tag{2}$$

Начальные условия которые дают возможность формирования двухчастотных колебаний следующего вида:

$$\begin{aligned} w(\alpha, \beta, t)|_{t=0} &= p_1 w_{k1} + p_2 w_{mn} + \varepsilon(\ldots) + \ldots \\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} &= q_1 w_{k1} + q_2 w_{mn} + \varepsilon(\ldots) + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

где p_1, p_2, q_1 иq_2 —некторые реальные числа, а

$$W_{k1} = \sin\lambda_k \alpha \sin\mu_1 \beta \qquad W_{mn} = \sin\lambda_m \alpha \sin\mu_n \beta \tag{4}$$

собственные функции.

При условии исполнения определенных предположениях для применение асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского, асимптотические решения уравнения (1) в первом приближении с краевыми условиями (2) и начальными (3) предположим в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta, t) &= R_{k1}^{(1)} W_{k1} \cos\psi_{k1} + R_{mn}^{(1)} W_{mn} \cos\psi_{mn} + \\ &+ \varepsilon \Phi_1(\tau, \alpha, \beta, R_{kl}^{(2)}, R_{kl}^{(2)}, \psi_{kl} \psi_{mn}, \theta_1, \theta_2) \\ w(\alpha, \beta, t) &= R_{kl}^{(2)} W_{kl} \cos\psi_{kl} + R_{mn}^{(2)} W_{mn} \cos\psi_{mn} + \\ &+ \varepsilon w_1(\tau, \alpha, \beta, R_{kl}^{(2)}, R_{mn}^{(2)}, \psi_{kl}, \psi_{mn}, \theta_1, \theta_2) \end{aligned} \tag{5}$$

где:

$$\psi_{kl} = \theta_1 + \varphi_{kl} \qquad \psi_{mn} = \theta_2 + \varphi_{mn} \tag{6}$$

Как между амплитудами $R_{rs}^{(1)}$ и $R_{rs}^{(2)}$ можно установить связь пользуя первое уравнение системы (1), то дифференциальные уравнения в первом приближению выражаются:

$$\frac{d R_{kl}^{(2)}}{d t} = \varepsilon A_1^{(k1)} (\tau, R_{kl}^{(2)}, R_{mn}^{(2)}, \varphi_{kl}, \varphi_{mn})$$

$$\frac{d \varphi_{kl}}{d t} = \omega_{kl} - \nu_1 + \varepsilon B_1^{(k1)} (\tau, R_{kl}^{(2)}, R_{mn}^{(2)}, \varphi_{kl}, \varphi_{mn})$$

$$\frac{d R_{mn}^{(2)}}{d t} = \varepsilon A_1^{(mn)} (\tau, R_{k1}^{(2)}, R_{mn}^{(2)}, \varphi_{kl}\ \varphi_{mn}) \tag{7}$$

$$\frac{d \varphi_{mn}}{d t} = \omega_{mn} - \nu_2 + \varepsilon B_1^{(mn)} (\tau, R_{kl}^{(2)}, R_{mr}^{(2)}, \varphi_{kl}\ \varphi_{mn})$$

Как функции ϕ_1 и w_1 в уравнениях (5) являются 2π—периодическими по аргументам $\psi_{k1}\ \psi_{mn}$, θ_1 и θ_2 их можно разложить в ряд по ортогональной системы собственных функций W_{ij}.

Вычислением неопходимых выражениеи из (5) с учетом системы (7) подставим в системе дифференциальных уравнениях (1) и приравнивая коэффициенты в левых и правых частях при одинаковых степенях малого параметра ε получим;

$$R_{kl}^{(1)} = - E\, h\, R \frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \mu_l^2]^2} R_{kl}^{(2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{8}$$

$$R_{mn}^{(1)} = - E\, h R \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n)^2} R_{mn}^{(2)}$$

$$\frac{1}{E\, h} \nabla^4 \phi_1 - R \frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha^2} = 0 \tag{9}$$

$$R \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \alpha^2} + D \nabla^4 w + \rho\, h\, R^4 \left(\omega_{kl} \frac{\partial}{\partial \psi_{kl}} + \omega_{mn} \frac{\partial}{\partial \psi_{mn}} + \nu_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \right.$$

$$\left. + \nu_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right)^{(2)} w_1 = f_0 (\tau, \alpha, \beta, R_{kl}^{(2)} R_{mn}^{(2)}, \psi_{kl}, \psi_{mn}, \theta_1, \theta_2) + \rho\, h\, R^4 \Bigg\{ \Bigg[2\, A_1^{(kl)}\ \omega_{kl} +$$

$$+ R_{kl}^{(2)} \left\langle \frac{\partial B_1^{(kl)}}{\partial \varphi_{kl}} (\omega_{kl} - \nu_1) + \frac{\partial B_1^{(kl)}}{\partial \varphi_{mn}} (\omega_{mn} - \nu_2) \right\rangle \Bigg] W_{kl} \sin \psi_{kl} +$$

$$+ \left[2\omega_{kl} R_{kl}^{(2)} B_1^{(kl)} - \left\langle \frac{\partial A_1^{(kl)}}{\partial \varphi_{k1}} (\omega_{k1} - \nu_1) + \frac{\partial A_1^{(kl)}}{\partial \varphi_{mn}} (\omega_{mn} - \nu_2) \right\rangle \right] W_{kl} \cos \psi_{kl} + \tag{10}$$

$$+ \left[2\, A_1^{(mn)}\, \omega_{mn} + R_{mn}^{(2)} \left\langle \frac{\partial\, B_1^{(mn)}}{\partial\, \varphi_{kl}} (\omega_{kl} - \nu_1) + \frac{\partial\, B_1^{(mn)}}{\partial\, \varphi_{mn}} (\omega_{mn} - \nu_2) \right\rangle \right] W_{mn} \sin \psi_{mn} +$$

$$+ \left[2\, \omega_{mn}\, R_{mn}^{(2)}\, B_1^{(mn)} - \left\langle \frac{\partial\, A_1^{(mn)}}{\partial\, \varphi_{kl}}\, \omega_{kl} - \nu_1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial\, A_1^{(mn)}}{\partial\, \varphi_{mn}} (\omega_{mn} - \nu_2) \right\rangle \right] W_{mn} \cos \psi_{mn} \Big\}$$

где:

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho\, h\, R^4} \left[E\, h\, R^2 \frac{\lambda_i^4}{(\lambda_i^2 + \mu_j^2)^2} + D\, (\lambda_i^2 + \mu_j^2)^2 \right] \tag{11}$$

квадраты собственных частот невозмущеного колебания оболочки. В уравнении (10) принято следующее обозначение:

$$f_0\, (\tau, \alpha, \beta, R_{kl}^{(2)}, R_{mn}^{(2)}, \psi_{kl}, \psi_{mn}, \theta_1, \theta_2 = f \left(\tau, \alpha, \beta, w, \frac{\partial\, w}{\partial\, t}, \ldots \frac{\partial^4\, w}{\partial\, \beta^4}, \theta_1, \theta_2 \right) \Bigg|$$

$$\left| \begin{array}{l} w = R_{kl}^{(2)}\, W_{kl} \cos \psi_{kl} + R_{mn}^{(2)}\, W_{mn} \cos \psi_{mn} \\ \dfrac{\partial\, w}{\partial\, t} = -\, R_{kl}^{(2)}\, \omega_{kl}\, W_{kl} \sin \psi_{kl} - R_{mn}^{(2)}\, \omega_{mn}\, W_{mn} \sin \psi_{mn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^4\, w}{\partial\, \beta^4} = \mu_l^4\, R_{kl}^{(2)}\, W_{kl} \sin \psi_{kl} - R_{mn}^{(2)}\, \omega_{mn}\, W_{mn} \cos \psi_{mn} \end{array} \right. \tag{12}$$

Неизвестные функции ϕ_l и w_l определяются из дифференциальных уравнений (9) и (10). Потому нужно претположить решения в двойном ряде по собственных функциях W_{ij}.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{i,\, j=1}^{\infty} \phi_1^{(ij)}\, (\tau, R_{kl}^{(2)}, R_{mn}^{(2)}, \psi_{kl}, \psi_{mn}, \theta_1, \theta_2)\, W_{ij} \\ w_1 &= \sum_{i,\, j=1}^{\infty} w_1^{(ij)}\, (\tau, R_{kl}^{(2)}, R_{mn}^{(2)}, \psi_{kl}, \psi_{mn}, \theta_1\, ,\theta_2)\, W_{ij} \end{aligned} \tag{13}$$

где $\phi_1^{(ij)}$ и $w_1^{(ij)}$ неизвестные функции.

Аналогично развиваем функцию f_0:

$$f_0 = \sum_{i,\, j=1}^{\infty} f_0^{(ij)}\, (\tau, R_{kl}^{(2)}, R_{mn}^{(2)}, \psi_{kl}\;\psi_{mn}, \theta_1\; \theta_2)\, W_{ij}$$

где $f_0^{(ij)}$ — известные коэффициенты разложения.

Подставив (13) в уравнение (9) получается:

$$\Phi_1^{(ij)} = E\,h\,R\,\frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i^2+\mu_j^2)^2}\,w_1^{(ij)}$$

Внося выражения (12)—(15) в уравнение (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях W_{ij}, получается система уравнений в частных производных:

$$\rho\,h\,R^4\left[\omega_{ij}^2+\left(\omega_{kl}\frac{\partial}{\partial\,\psi_{kl}}+\omega_{mn}\frac{\partial}{\partial\,\psi_{mn}}+\nu_1\frac{\partial}{\partial\,\theta_1}+\nu_2\frac{\partial}{\partial\,\theta_2}\right)^{(2)}\right]w_1^{(ij)}=f_0^{(ij)}$$

$$(i\neq k\neq m,\quad j\neq 1\neq n) \tag{16}$$

$$\rho\,h\,R^4\left[\omega_{kl}^2+\left(\omega_{kl}\frac{\partial}{\partial\,\psi_{kl}}+\omega_{mn}\frac{\partial}{\partial\,\psi_{mn}}+\nu_1\frac{\partial}{\partial\,\theta_1}+\nu_2\frac{\partial}{\partial\,\theta_2}\right)^{(2)}\right]w_1^{(kl)}=f_0^{(kl)}+$$

$$+\rho\,h\,R^4\left\{\left[2\,\omega_{kl}\,A_1^{(kl)}+R_{kl}^{(2)}\left\langle\frac{\partial\,B_1^{(kl)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{k1}-\nu_1)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\,B_1^{(kl)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)\right\rangle\right]\sin\psi_{kl}+\left[2\,\omega_{kl}\;R_{kl}^{(2)}\,B_1^{(kl)}-\left\langle\frac{\partial\,A_1^{(kl)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{kl}-\nu_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial\,A_1^{(kl)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)\right\rangle\right]\cos\,\psi_{kl}\right\}$$

$$(i=k,\quad j=l) \tag{17}$$

$$\rho\,h\,R^4\left[\omega_{mn}^2+\left(\omega_{kl}\frac{\partial}{\partial\,\psi_{kl}}+\omega_{mn}\frac{\partial}{\partial\,\psi_{mn}}+\nu_1\frac{\partial}{\partial\,\theta_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu_2\frac{\partial}{\partial\,\theta_2}\right)^{(2)}\right]w_1^{(mn)}=f_0^{(mn)}+\rho\,h\,R^4\left\{\left[2\,A_1^{(mn)}\,\omega_{mn}+R_{mn}^{(2)}\left\langle\frac{\partial\,B_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{kl}-\nu_1)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\,B_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)\right\rangle\right]\sin\psi_{mn}+\left[2\,\omega_{mn}\,R_{mn}^{(2)}\,B_1^{(mn)}-\left\langle\frac{\partial\,A_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{kl}-\nu_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial\,A_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)\right\rangle\right]\cos\psi_{mn}\right\}$$

$$(i=m,\quad j=n) \tag{18}$$

Для составления решений системы (16) применяем метод неопределеных коэффициентов. Потому неизвестные функции $w_1^{(ij)}$ разложим в рад Фурье:

$$w_1^{(ij)} = \sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} w_{1\,(r_1 r_2 s_1 s_2)}^{(ij)} (\tau, R_{kl}^{(2)} R_{mn}^{(2)})\, e^{i\,(r_1 \psi_{kl} + r_2 \psi_{mn} + s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2)} \tag{19}$$

Аналогично разложим функцию $f_0^{(ij)}$:

$$f_0^{(ij)} = \sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} f_{1\,(r_1 r_2 s_1 s_2)}^{(ij)} (\theta, R_{kl}^{(2)} R_{mn}^{(2)})\, e^{i\,(r_1 \psi_{kl} + r_2 \psi_{mn} + s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2)} \tag{20}$$

где:

$$f_{0\,(r_1,\, r_2,\, s_1,\, s_2)}^{(ij)} = \frac{1}{16\,\pi^4} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^{(ij)}\, e^{-i\,(r_1 \psi_{kl} + r_2 \psi_{mn} + s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2}$$

$$d\,\psi_{kl}\;\, d\,\psi_{mn}\, d\,\theta_1\, d\,\theta_2 \tag{21}$$

После ряда выкладок получается:

$$w_1 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} W_{ij} \frac{f_{0\,(r_1 r_2 s_1 s_2}^{(ij)}\, e^{i\,(r_1 \psi_{kl} + r_2 \psi_{mn} + s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2}}{\rho\, h\, R^4\, [\omega_{ij}^2 - (r_1\, \omega_{kl} + r_2\, \omega_{mn} + s_1\, \nu_1 + s_2\, \nu_2)^2} \tag{22}$$

Неизвестную функцию ϕ_1 определяем из уравнения (15).

Подставив выражения (19) и (20) в уравнениях (17) и (18) их приводим в виде:

$$\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} \rho\, h\, R^4\, [\omega_{kl}^2 - (r_1\, \omega_{kl} + r_2\, \omega_{mn} + s_1\, \nu_1 + s_2\, \nu_2)^2]\, w_{1\,(r_1 r_2 s_1 s_2)}^{(kl)}$$

$$e^{i\,(r_1 \psi_{kl} + r_2 \psi_{mn} + s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2)} = \sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} f_{0\,(r_1 r_2 s_1 s_2)}^{(kl)}\, e^{i\,(r_1 \psi_{k1l} + r_2 \psi_{mn} + s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2)} +$$

$$+ \rho\, h\, R^4 \left\{2\, A_1^{(kl)}\, \omega_{kl} + R_{kl}^{(2)} \left[\frac{\partial\, B_1^{(kl)}}{\partial\, \varphi_{mn}} (\omega_{kl} - \nu_1) + \frac{\partial\, B_1^{(kl)}}{\partial\, \varphi_{mn}}\, (\omega_{mn} - \nu_2)\right]\right\} \sin \psi_{kl} + \tag{23}$$

$$+ \rho\, h\, R^4 \left\{2\, \omega_{kl}\, R_{kl}^{(2)}\, B_1^{(kl)} - \left[\frac{\partial\, A_1^{(kl)}}{\partial\, \varphi_{kl}}\, (\omega_{kl} - \nu_1) + \frac{\partial\, A_1^{(kl)}}{\partial\, \varphi_{mn}}\, (\omega_{mn} - \nu_2)\right]\right\} \cos \psi_{kl}$$

$$\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} \rho\, h\, R^4\, [\omega_{mn}^2 - (r_1\, \omega_{kl} + r_2\, \omega_{mn} + s_1\, \nu_1 + s_2\, \nu_2)^2]\, w_{1\,(r_1 r_2 s_1 s_2)}^{(mn)}$$

$$e^{i\,(r_1 \psi_{kl} + r_2 \psi_{mn} + s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2)} = \sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} f_{0\,(r_1 r_2 s_1 s_2)}^{(mn)}\, e^{i\,(r_1 \psi_{kl} + r_2 \psi_{mn} + s_1 \theta_1 + s_2 \theta_2)} + \tag{24}$$

$$+\rho\,h\,R^4\left\{2\,A_1^{(mn)}\,\omega_{mn}+R_{mn}^{(2)}\left[\frac{\partial\,B_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{k1}-\nu_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\,B_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)\right]\right\}\sin\psi_{mn}+\rho\,h\,R^4\left\{2\,\omega_{mn}\,R_{mn}^{(2)}\,B_1^{(mn)}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial\,A_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{kl}-\nu_1)+\frac{\partial\,A_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)\right]\right\}\cos\psi_{mn}$$

Выражения в знаменателе уравнения (22) будет равно нулю когда:

$$\pm\,\omega_{kl}=r_1\,\omega_{kl}+r_2\,\omega_{mn}+s_1\,\nu_1+s_2\,\nu_2 \tag{25}$$

$$\pm\,\omega_{mn}=r_1\,\omega_{kl}+r_2\,\omega_{mn}+s_1\,\nu_1+s_2\,\nu_2 \tag{26}$$

т. е. когда индексы суммирования связаны следующими соотношениями:

$$r_1\pm 1+s_1=0 \qquad r_2+s_2=0 \tag{27}$$

$$r_2\pm 1+s_2=0 \qquad r_1+s_1=0 \tag{28}$$

В случае когда исполнены условия (25), тогда левая сторона уравнения (23) нулевая, а на правой:

$$e^{i\,(r_1\,\psi_{kl}+r_2\,\psi_{mn}+s_1\,\theta_1+s_2\,\theta_2)}=e^{i\,(\pm\psi_{kl}-t_1\,\varphi_{kl}-s_2\,\varphi_{mn})} \tag{29}$$

Как последствые соотношения и индексов (27) является распадение четырехкратной сумме в двухкратную, сменой $\sigma_1=-s_1$, $\sigma_2=-s_2$, уравние (23) по приравниванию членов при одинаковых гармоников распадается на два уравнения:

$$\frac{\partial\,A_1^{(kl)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{kl}-\nu_1)+\frac{\partial\,A_1^{(kl)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)-2\,\omega_{kl}\,R_{kl}^{(2)}\,B_1^{(kl)}=$$

$$=\sum_{\sigma_1\,\sigma_2}c_{\sigma_1\sigma_2}^{(kl)}\,e^{i\,(\sigma_1\,\varphi_{kl}+\sigma_2\,\varphi_{mn})} \tag{30}$$

$$2\,\omega_{kl}\,A_1^{(kl)}+R_{kl}^{(2)}\frac{\partial\,B_1^{(kl)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{k1}-\nu_1)+\frac{\partial\,B_1^{(kl)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)=$$

$$=\sum_{\sigma_1\,\sigma_2}d_{\sigma_1\,\sigma_2}^{(kl)}\,e^{i\,(\sigma_1\,\varphi_{kl}+\sigma_2\,\varphi_{mn})}$$

Аналогично, из уравнения (24) получим:

$$\frac{\partial\,A_{kl}^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{kl}}(\omega_{kl}-\nu_1)+\frac{\partial\,A_1^{(mn)}}{\partial\,\varphi_{mn}}(\omega_{mn}-\nu_2)-2\,\omega_{mn}\,R_{mn}^{(2)}\,B_1^{(mn)}=$$

$$= \sum_{\sigma_1 \sigma_2} c^{(mn)}_{\sigma_1 \sigma_2} e^{i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})} \tag{31}$$

$$2\,\omega_{mn} A_1^{(mn)} + R^{(2)}_{mn} \frac{\partial B_1^{(mn)}}{\partial \varphi_{kl}} \omega_{kl} - \nu_1) + \frac{\partial B_1^{(mn)}}{\partial \varphi_{kl}} (\omega_{mn} - \nu_2) =$$

$$= \sum_{\sigma_1 \sigma_1} d^{(mn)}_{\sigma_1 \sigma_2} e^{i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})}$$

В системе уравнений в частных производных (30) и (31) введени обозначения;

$$c^{(kl)}_{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{8\,\pi^4\,\rho\,h\,R^4} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^{(kl)} e^{-i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})} \cos\psi_{kl}\, d\,\psi_{kl}\, d\,\psi_{mn} d\,\theta_1\, d\,\theta_2$$

$$d^{(kl)}_{\sigma_1\,\sigma_1} = -\frac{1}{8\,\pi^4\,\rho\,h\,R^4} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^{(kl)} e^{-i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})} \sin\psi_{kl}\, d\psi_{kl}\, d\psi_{mn}\, d\theta_1\, d\theta$$

$$c^{(mn)}_{\sigma_1\,\sigma_2} = \frac{1}{8\,\pi^4\,\rho\,h\,R^4} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^{(mn)} e^{-i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})} \cos\psi_{mn}\, d\psi_{kl}\, d\psi_{mn}\, d\theta_1\, d\theta_2$$

$$d^{(mn)}_{\sigma_1\,\sigma_2} = -\frac{1}{8\,\pi^4\,\rho\,h\,R^4} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^{(mn)} e^{-i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})} \sin\psi_{mn}\, d\psi_{kl}\, d\psi_{mn}\, d\theta_1 d\theta_1$$

Предполагая частные решения системы дифференциальных уравнений (30) и (31) в виде;

$$\begin{aligned}
A_1^{(kl)} &= \sum_{\sigma_1 \sigma_2} g^{(kl)}_{\sigma_1\,\sigma_2} e^{i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})} \\
B_1^{(kl)} &= \sum_{\sigma_1 \sigma_2} h^{(kl)}_{\sigma_1\,\sigma_2} e^{i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})} \\
A_1^{(mn)} &= \sum_{\sigma_1 \sigma_2} g^{(mn)}_{\sigma_1\,\sigma_2} e^{i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})} \\
B_1^{(mn)} &= \sum_{\sigma_1 \sigma_2} h^{(mn)}_{\sigma_1\,\sigma_2} e^{i(\sigma_1 \varphi_{kl} + \sigma_2 \varphi_{mn})}
\end{aligned} \tag{34}$$

Система сводится на систему линейных алгебраических уравнений и конечно получаем дифференциальные уравнения в первом приближении для амплитуды и фазы в виде:

$$\frac{d R_{kl}^{(2)}}{d t} = \varepsilon \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{i\left[\sigma_1\left(\omega_{kl}-\nu_1\right)+\sigma_2\left(\theta_{mn}-\nu_2\right)\right] c_{\sigma_1 \sigma_2}^{(kl)}+2 \omega_{kl} d_{\sigma_1 \sigma_2}^{(kl)}}{4 \omega_{kl}^2-\left[\sigma_1\left(\omega_{kl}-\nu_1\right)+\sigma_2\left(\omega_{mn}-\nu_2\right)\right]^2} e^{i\left(\sigma_1 \varphi_{kl}+\sigma_2 \varphi_{mn}\right)}$$

$$\frac{d \varphi_{kl}}{d t} = \omega_{kl}-\nu_1+$$

$$+\varepsilon \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{-2 \omega_{kl} c_{\sigma_1 \sigma_2}^{(kl)}+i\left[\sigma_1 \omega_{kl}-\nu_1\right)+\sigma_2\left(\omega_{mn}-\nu_2\right)\right] d_{\sigma_1 \sigma_2}^{(kl)}}{R_{kl}^{(2)}\left\{\omega_{kl}^2-\left[\sigma_1\left(\omega_{kl}-\nu_1\right)+\sigma_2\left(\omega_{mn}-\nu_2\right)\right]^2\right\}} e^{i\left(\sigma_1 \varphi_{kl}+\sigma_2 \varphi_{mn}\right)}$$

$$R_{kl}^{(1)} = -E h R \frac{\lambda_k^2}{\left(\lambda_k^2+\mu_1^2\right)^2} R_{kl}^{(2)}$$

$$\frac{d R_{mn}^{(2)}}{d t} = \varepsilon \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{i\left[\sigma_1\left(\omega_{kl}-\nu_1\right)+\sigma_2\left(\omega_{mn}-\nu_2\right)\right] c_{\sigma_1 \sigma_2}^{(mn)}+2 \omega_{mn} d_{\sigma_1 \sigma_2}^{(mn)}}{4 \omega_{mn}^2-\left[\sigma_1\left(\omega_{kl}-\nu_1\right)+\sigma_2\left(\omega_{mn}-\nu_2\right)\right]^2} e^{i\left(\sigma_1 \varphi_{kl}+\sigma_2 \varphi_{mn}\right)} \qquad (35)$$

$$\frac{d \varphi_{mn}}{d t} = \omega_{mn}-\nu_2+$$

$$+\varepsilon \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{-2 \omega_{mn} c_{\sigma_1 \sigma_2}^{(mn)}+i\left[\sigma_1\left(\omega_{kl}-\nu_1\right)+\sigma_2\left(\omega_{mn}-\nu_2\right)\right] d_{\sigma_1 \sigma_2}^{(mn)}}{R_{mn}^{(2)}\left\{4 \omega_{mn}^2-\left[\sigma_1\left(\omega_{kl}-\nu_1\right)+\sigma_2\left(\omega_{mn}-\nu_2\right)\right]^2\right\}} e^{i\left(\sigma_1 \varphi_{kl} \times \sigma_2 \varphi_{mn}\right)}$$

$$R_{mn}^{(1)} = -E h R \frac{\lambda_m^2}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2} R_{mn}^{(2)}$$

Уравнения (35) представляют дифференциальные уравнения в первом приближении, для амплитуды функции напряжения и перемещения, и фазы двухчастотных колебаний пологих цилиндрических оболочек. Колебания оболочки под воздействием возмущающей силы, в общем случае нелинейные, с двумя медленно меняющами частотами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боголюбов, Н. Н. и МитрополскиБ, Ю. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва, (1958).

[2] Митрополский, Ю. А. и Мосеенков, Б. И. *Аспмтотические решения уравнений в частных производных*, „Вища школа", Киев, (1976).

[3] Hedrih, K. *Primena energijske interpretacije asimptotske metode na izučavanje nelinearnih oscilacija elastičnih tela*, doktorska disertacija, Niš, (1975).

[4] Hedrih, K., *Izabrana poglavlja teorije nelinearnih oscilacija*, Niš, (1975).

TWO-FREQUENCIES OSCILLATIONS OF SHALLOW CYLINDRICAL SHELLS

Summary

This article deals with two-frequency oscillations of the shallow cylindrical shell on which acts small, superficial, disturbing force directly to middle shell surface. This force is with two frequencies of the undisturbing shell oscillation.

By means of asymptotic methode Krilov-Bogoljubov-Mitropolski's the differential equations of the first approximation are derived and they enable the analysis of amplitudes and phasis behaviour during stationary and nonstationary oscillation mode. Since the frequencies of the forced power are close to two own frequencies, the resonance modes that are the most interesting for the point of the processes that are arising are exemiend.

DVOFREKVENTNE OSCILACIJE PLITKIH CILINDRIČNIH LJUSKI

Izvod

U radu su razmatrane dvofrekventne oscilacije plitke cilindrične ljuske na koju dejstvuje mala, površinska, poremećajna sila, upravna na srednju površinu ljuske. Sila je sa dvema frekvencijama koje su bliske dvema sopstvenim frekvencijama neporemećenog oscilovanja ljuske.

Preko asimptotske metode Krilov-Bogoljubov-Mitropoljskog dobijene su diferencijalne jednačine prve aproksimacije koje omogućavaju analizu ponašanja amplituda i faza pri stacionarnom i nestacionarnom režimu oscilovanja. Kako su frekvencije prinudne sile bliske dvema sopstvenim frekvencijama ljuske, to se izučavaju rezonantni režimi koji su i najinteresantniji sa gledišta procesa koji se javljaju.

Pavlović Ratko
Mašinski fakultet
Beogradska 14, Niš