

АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНОГО РЕЗОНАНСНОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Р. Павлович

(Поступило 26. октября 1983)

В работе рассматриваются нестационарные колебания при двухчастотных колебаниях пологой цилиндрической оболочки лежащей на нелинейно упругом основании, в условиях линейного сопротивления среды. Оболочка находится под воздействием внешней, распределенной по поверхности, силы с двумя медленно меняющимися, находящимися вблизи к двух собственных частот невозмущенного колебания оболочки.

Дифференциальные уравнения колебания оболочки имеют вид:

$$\frac{1}{Eh} \cdot \nabla^4 \Phi - R \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (1)$$

$$R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + D \nabla^4 w + cR^4 w + \rho h R^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varepsilon R^4 (-k w^3 - \delta \frac{\partial w}{\partial t} + E_1 \sin \theta_1 + E_2 \sin \theta_2)$$

где c и εk — коэффициенты упругого основания, $\varepsilon \delta$ — коэффициент внешнего трения, εE_1 и εE_2 — амплитуды распределенных внешних двухчастотных сил. Рассматривается оболочка с шарнирно закрепленными концами.

С учетом (5—35) можно записать дифференциальные уравнения первого приближения в виде:

$$\frac{dR_{kl}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon \delta}{2\rho h} R_{kl}^{(2)} - \frac{16 \varepsilon E_1 R}{\rho h l \beta_0 \lambda_{2k-1} \mu_{2l-1} (\omega_{kl} - \nu_1)} \cos \varphi_{kl}$$

$$\frac{d\varphi_{kl}}{dt} = \omega_{kl} - \nu_1 + \frac{3 \varepsilon k}{128 \rho h \omega_{kl}} [9 (R_{kl}^{(2)})^2 + 8 (R_{mn}^{(2)})^2] + \frac{16 \varepsilon E_1 R}{\rho h l \beta_0 \lambda_{2k-1} \mu_{2l-1} R_{kl}^{(2)} (\omega_{kl} + \nu_1)} \sin \varphi_{kl}$$

$$R_{kl}^{(1)} = -EhR \frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \mu_l^2)^2} R_{kl}^{(2)} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_{mn}^{(2)}}{dt} &= -\frac{\varepsilon \delta}{2 \rho h} R_{mn}^{(2)} - \frac{16 \varepsilon E_2 R}{\rho h l \beta_0 \lambda_{2m-1} \mu_{2n-1} (\omega_{mn} + \nu_2)} \cos \varphi_{mn} \\ \frac{d\varphi_{mn}}{dt} &= \omega_{mn} - \nu_2 + \frac{3 \varepsilon k}{128 \rho h \omega_{mn}} [9 (R_{mn}^{(2)})^2 + 8 (R_{kl}^{(2)})^2] + \\ &+ \frac{16 \varepsilon E_2 R}{\rho h l \beta_0 \lambda_{2m-1} \mu_{2n-1} R_{mn}^{(2)} (\omega_{mn} + \nu_2)} \sin \varphi_{mn} \\ R_{mn}^{(1)} &= -E h R \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^{(2)} + \mu_n^2)} R_{mn}^{(2)} \end{aligned}$$

Примем для расчета следующие данные: $R = 1$ м, $l = 4$ м, $h = 1$ см, $\beta_0 = \pi/3$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7 \cdot 8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu = 1/3$, $c = 2 \cdot 10^6$ Н/м³, $\varepsilon \beta = 3 \cdot 10^9$ Н/м⁵, $\varepsilon \delta = 5 \cdot 10^2$ Нс/м³, $\varepsilon E_1 = 4800$ Н/м² и $\varepsilon E_2 = 16000$ Н/м².

Рассматривается случай когда частоты возмущающей силы ν_1 и ν_2 вблизи первых двух собственных частот невозмущенного колебания оболочки: $\nu_1 \approx \omega_{11}$ и $\nu_2 \approx \omega_{12}$. Собственные частоты определяются из выражений:

$$\omega_{ij}^2 + \frac{1}{\rho h R^4} \left[E h R^2 \frac{\lambda_i^4}{(\lambda_i^2 + \mu_j^2)^2} + D (\lambda_i^2 + \mu_j^2)^2 + c R^4 \right] \quad (3)$$

Собственные частоты рассматриваемой оболочки:

$$\omega_{11} = 391.62105 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_{12} = 596.00585 \text{ с}^{-1} \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения первого приближения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dR_{11}^{(2)}}{dt} &= -1.6025614 R_{11}^{(2)} - \frac{99.7624}{391.62105 + \nu_1} \cos \varphi_{11} \\ \frac{d\varphi_{11}}{dt} &= 391.62105 - \nu_1 + 2301.823 [9 (R_{11}^{(2)})^2 + 8 (R_{11}^{(2)})^2] + \\ &+ \frac{99.7624}{(391.62105 + \nu_1) R_{11}^{(2)}} \sin \varphi_{11} \\ \frac{dR_{12}^{(2)}}{dt} &= -1.6025641 R_{12}^{(2)} - \frac{110.8471}{596.00585 + \nu_2} \cos \varphi_{12} \\ \frac{d\varphi_{12}}{dt} &= 596.00585 - \nu_2 + 1512.4722 [9 (R_{12}^{(2)})^2 + 8 (R_{11}^{(2)})^2] + \\ &+ \frac{110.8471}{(596.00585 + \nu_2) R_{12}^{(2)}} \sin \varphi_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

В системе уравнений (5) отсутствуют алгебраические уравнения для определения амплитуды напряжения, потому что их можно независимо определить по определению амплитуды перемещения.

Система дифференциальных уравнений (5) удобна для анализа стационарного и нестационарного колебания оболочки. В стационарном режиме колебаний амплитуды и фазы постоянны и систему (5) приводим к системе трансцендентных уравнений. Дискретным фиксированием, с начала фиксируем первую частоту внешней силы, а потом вторую, получим кривые стационарного резонансного состояния. Для анализа устойчивости использована теорема Ляпунова об устойчивости в первом приближении.

Кривые нестационарного резонансного состояния получены интегрированием системы дифференциальных уравнений (5). Интегрирование выполнено методом Рунге-Кутты.

Рассматриваются три случая: 1. частота ν_2 фиксирована, а частота ν_1 изменяется линейно в времени в окрестности первой собственной частоты ω_{11} , 2. частота ν_1 фиксирована, а частота ν_2 изменяется линейно в времени в окрестности второй собственной частоты ω_{12} , и 3. частоты ν_1 и ν_2 вместе изменяются линейно в окрестности соответствующих собственных частот.

Проанализируем каждый случай отдельно:

$$1. \nu_1 = \nu_{10} \pm \beta t \quad \nu_2 = const$$

Когда частота ν_2 фиксирована вне резонансной области второй собственной частоты невозмущенного колебания, можно отметить что для больших скоростей (β) изменения частоты ν_1 максимумы амплитуды снижаются и перемещаются в направлении изменения частоты.

В области резонансного скачка амплитуды первого гармоника быстрее падают в случае меньших скоростей изменения частоты, а локальные максимумы ближайщие друг другу.

Для $\nu_2 = 610 \text{ с}^{-1}$ и $\nu_2 = 620 \text{ с}^{-1}$ передние констатации не можно уважить и для полное замечание поведения нестационарных амплитуд, анализ необходимо выполнить при помощи кривого стационарного резонансного состояния (Рис. 1.б и 2.б).

Для $\nu_2 = 610 \text{ с}^{-1}$ когда частота ν_1 уменьшается (Рис. 1.в), при больших скоростей изменения частоты, у амплитуды „нет времени” попадатся на нижней устойчивой ветве кривые стационарного состояния, потому в этом случае максимумы самые выразительные.

Для $\nu_2 = 620 \text{ с}^{-1}$ полный анализ тоже можно осуществить использованием кривого стационарного состояния. Есть ли меньшая скорость β изменения частоты ν_1 , придет до перехода амплитуды от одного местного максимума на второй и затем наступает резонансный скачок а для больших скоростей ($\beta = 20 \text{ с}^{-2}$, 40 с^{-2}) резонансный скачок наступает в окрестности первого максимума кривой стационарного состояния (Рис. 2.а и 2.в).

Можно тоже заключить что местные максимумы кривых стационарного состояния вызывают, увеличению частоты ν_1 , увеличение нестационарных амплитуд тем больше, чем скорости изменения частоты больше.

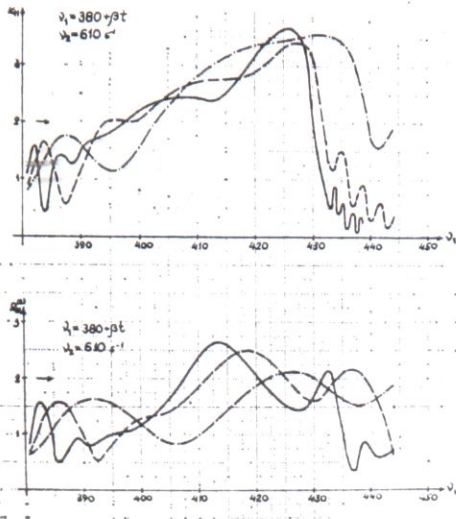


Рис. 1.а

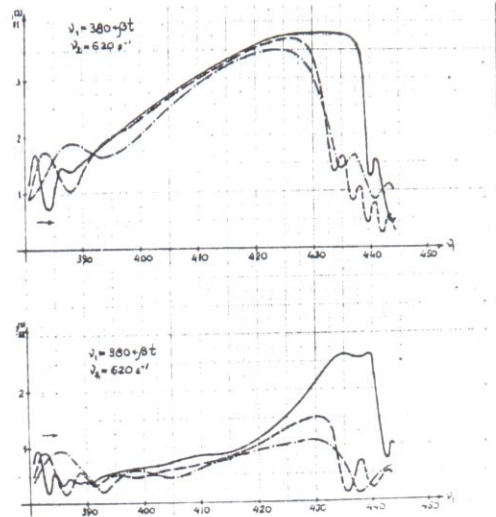


Рис. 2.а

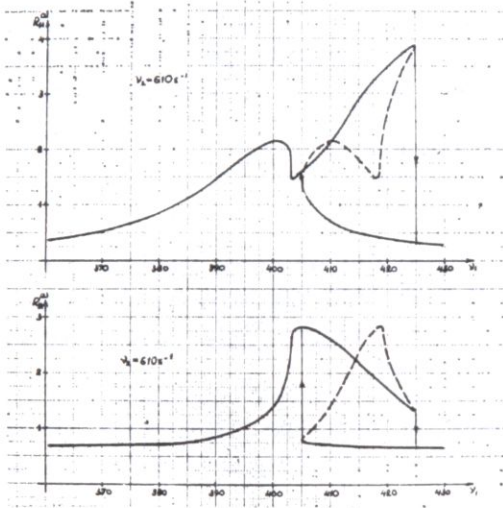


Рис. 1.б

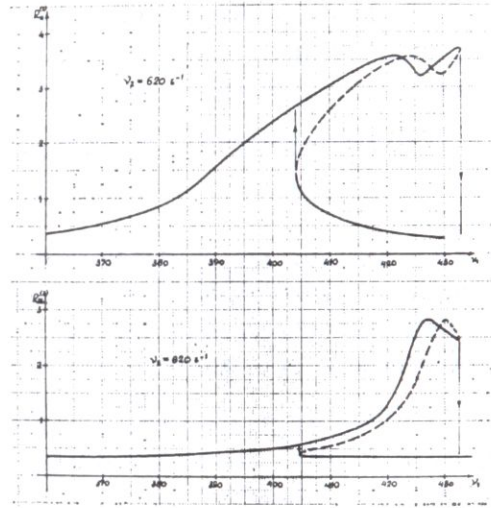


Рис. 2.б

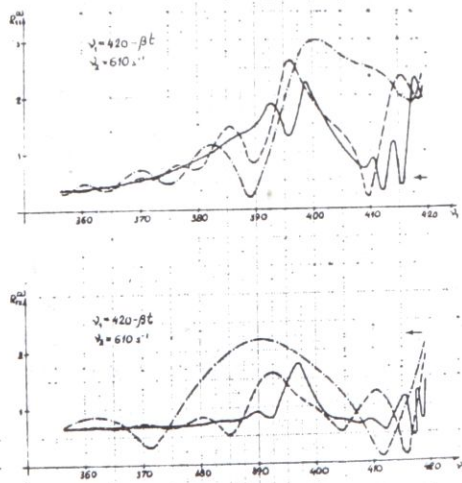


Рис. 1.в

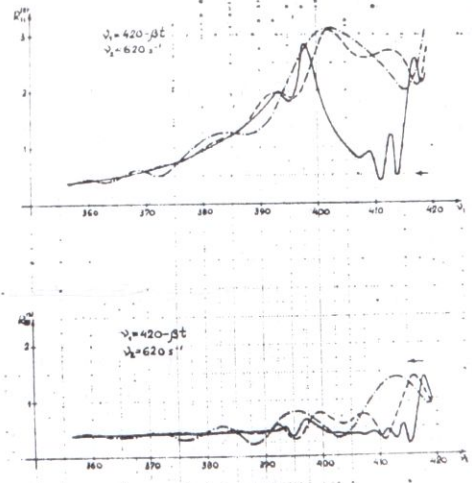


Рис. 2.в

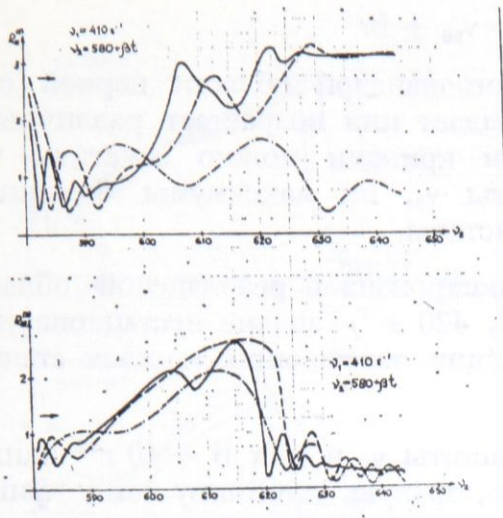


Рис. 3.а

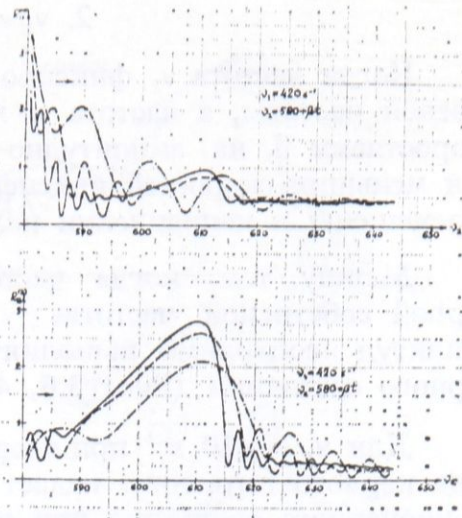


Рис. 4.а

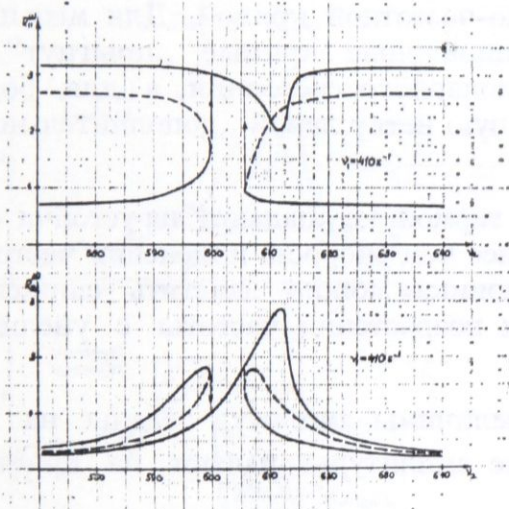


Рис. 3.б

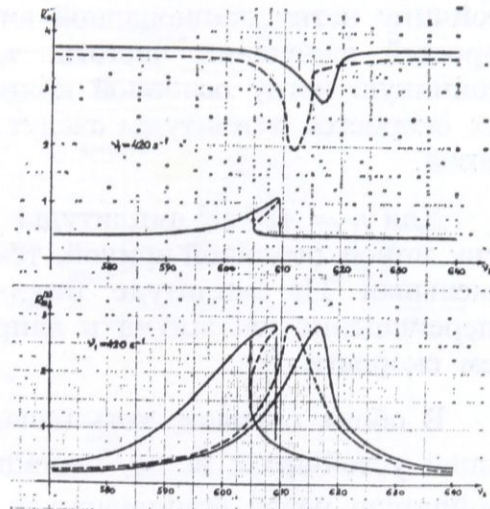


Рис. 4.б

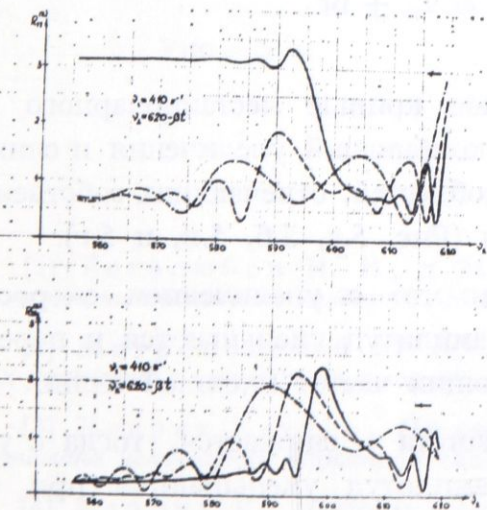


Рис. 3.в

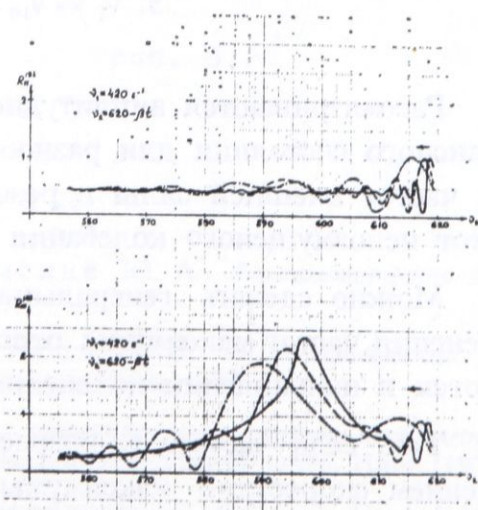


Рис. 4.в

$$2. \nu_1 = \text{const} \quad \nu_2 = \nu_{20} \pm \beta t$$

Когда частота ν_1 фиксирована вне резонансной области первой собственной частоты, а частота ν_2 линейно опадает или возрастает различными скоростями β , на амплитудно-частотными кривыми можно заметить, что для меньших скоростей изменения частоты ν_2 , их максимумы больше и перемещены в направлении изменения частоты.

Между тем, когда частота ν_1 фиксирована в резонансной области первой собственной частоты ($\nu_1 = 410 \text{ s}^{-1}$, 420 s^{-1}) анализ нестационарных амплитуд необходимо выполнять при помощи отвечающих кривых стационарного состояния (Рис. 3.б, 4.б).

Для $\nu_1 = 410 \text{ s}^{-1}$ при возрастании частоты ν_2 и для $\beta = 40 \text{ s}^{-2}$ амплитуда первого гармоника падает на нижнюю, правую, устойчивую ветвь кривой стационарного состояния при чему для меньших скоростей нестационарные амплитуды следуют основную кривую стационарного состояния. Когда частота ν_1 уменьшается, амплитуды первого гармоника „падают” и следуют нижнюю устойчивую ветвь стационарной амплитудно-частотной кривой. Для меньших скоростей изменения частоты ν_2 , нестационарные кривые „прыгнут” на устойчивую ветвь основной кривой стационарного состояния, а для больших скоростей амплитуды следуют устойчивую ветвь левой „дополнительной” кривой.

Для $\nu_1 = 420 \text{ s}^{-1}$ амплитуды первого гармоника „падают” на устойчивую ветвь новой основной кривой, тем быстрее чем скорость изменения частоты ν_2 меньшая. На амплитуде второго гармоника можно заметить снижение и перемещение максимума в направлении возрастания частоты с увеличением скорости β .

В обоих случаях, хоть начальные величины амплитуд заданы на основной устойчивой ветви, нестационарные амплитуды падают на нижнюю устойчивую ветвь стационарных кривых.

$$3. \nu_1 = \nu_{10} \pm \beta t \quad \nu_2 = \nu_{20} \pm \beta t$$

Рассматриваются амплитудно-частотные кривые нестационарного резонансного состояния для разнообразных комбинаций увеличения и снижения частот внешней силы в резонансных областях, отвечающих собственных частот невозмущенного колебания оболочки (Рис. 5.а, 5.б, 5.в, и 5.г).

Можно сделать генеральный вывод: что с увеличением скоростей изменения частот максимумы отвечающих амплитуд уменьшаются и перемещаются в направлении изменения отвечающих частот внешней силы.

Так, если частота ν_1 возрастает, а частота ν_2 снижается, тогда с увеличением скорости β максимумы обеих амплитуд уменьшаются при чем максимумы первого гармоника перемещаются на право, а второго гармоника на лево.

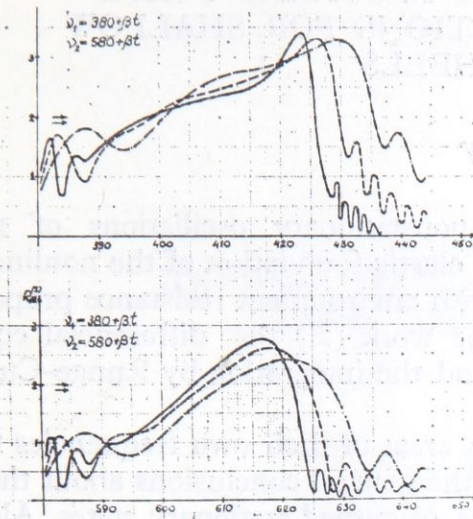


Рис. 5.а

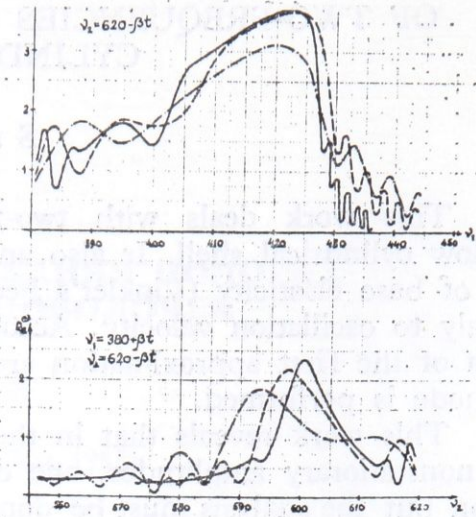


Рис. 5.б

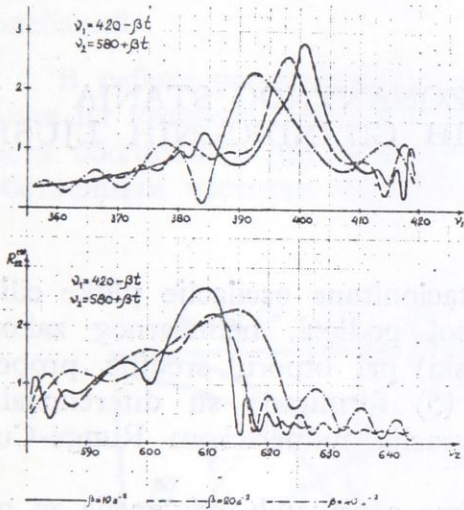


Рис. 5.в

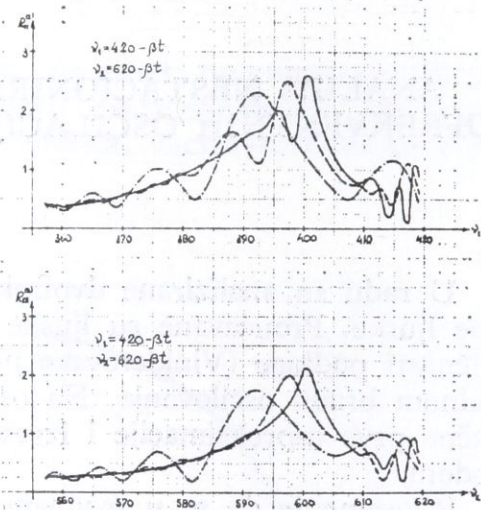


Рис. 5.г

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боголюбов Н. Н., и Митрополский Ю. А., *Асимптотические Методы в теории нелинейных колебаний*, Москва, (1958).
- [2] Митрополский Ю. А. и Мисеенков Б. И., *Асимптотические решения уравнений в частных производных*, „Вища школа“, Киев, (1976).
- [3] Хедрих Катица, *Примена енергијске интерпретације асимптомске методе на изучавање нелинеарних осцилација еластичних тела*, докторска дисертација, Ниш, (1975).
- [4] Хедрих К., *Изabrana поглавља теорије нелинеарних осцилација*, Ниш, (1975).
- [5] Павловић Ратко, *Двофреквентне осцилације плитких цилиндричних луски*, „Теоријска и примењена механика“, Београд, (1983).

ANALYSIS OF NONSTATIONARY RESONANS STATE OF TWO-FREQUENCIES OSCILLATIONS FOR SHALLOW CYLINDRICAL SHELLS

S u m m a r y

This work deals with two-frequency nonstationary oscillations of the shallow cylindrical shell. It also analyzed the elastic foundation of the nonlinear law of base elasticity (Vinkler's bed shells) with environment resistance proportionally to oscillation velocity. According to the work (5.) the differential equation of the first approximation are formed and the integration by Runge-Cutte methode is performed.

This work reveals that in the resonance areas of their own frequencies for the nonstationary amplitudes, one cannot get the general conclusions about their action but the analysis must be done by means of curved stationary states. Also, one cannot formulate the clear limits of the forced frequency change velocity for some actions of the nonstationary amplitudes in the whole resonance area, but the analysis is performed separately for each case.

ANALIZA NESTACIONIRANOG REZONANTNOG STANJA DVOFREKVENTNIH OSCILACIJA PLITKIH CILINDRIČNIH LJUSKI

I z v o d

U radu su analizirane dvofrekventne nestacionirane oscilacije plitke cilindrične ljuske. Proučavane su ljuske na elastičnoj podlozi, nelinearnog zakona elastičnosti podloge (Vinklerovske posteljice ljuski) pri otporu sredine proporcionalnom brzini oscilovanja. Na osnovu rada (5) formirane su diferencijalne jedične prve aproksimacije i izvršena je integracija numeričkom Runge-Cuta metodom.

Pokazano je da se u rezonantnim oblastima sopstvenih frekvencija za nestacionirane amplitude ne mogu formirati opšti zaključci o njihovom ponašanju, već se analiza mora vršiti uz pomoć krivih stacioniranih stanja. Takođe, ne mogu se postaviti jasne granice brzina promena prinudnih frekvencija za određena ponašanja nestacioniranih amplituda u celoj rezonantnoj oblasti, već se analiza vrši posebno za svaki slučaj.

Pavlović Ratko
Mašinski fakultet
Beogradska 14 Niš