

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТЫХ ПЛИТАХ И РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Г. Мсхиладзе

(Поступило 9. февраля 1983)

Мы поставили целью использовать еще одну возможность решения пространственных задач, в частности толстых плит и массивных тел. Для этого применяется общее решение Буссинеска-Галеркина уравнений Навье и предлагается новая схема расчета.

Согласно общим формам решения Буссинеска-Галеркина [1], компоненты напряжений выражаются через бигармонические функции φ_1 , φ_2 , φ_3 и ω . Эти функции представлены через бесконечные операторы, аргументами которых являются начальные данные: для них подбираются алгебраические или другие функции с неопределенными коэффициентами, определяемыми из граничных условий [2]. Бесконечные операторы использованы для непосредственного определения компонентов напряжений, что представляется удобным для решения некоторых в частности, контактных задач, при определении несущей способности итд. По полученным напряжениям компоненты перемещений можно определить любым из известных способов. Мы предлагаем схему определения перемещений и деформаций на основе методов Чезаро и Коши. Данная схема расчета распространяется и на анизотропные тела, что свидетельствует о ее достаточной универсальности.

Представим уравнения Навье:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{без учета объемных сил}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Общая форма решения Буссинеска-Галеркина уравнений Навье имеет вид [1]:

$$\sigma_x = 2G \left[\frac{\partial x}{\partial} \nabla^2 \varphi_1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \nu \Delta^2 \omega \right) \right];$$

$$\tau_{xz} = G \left[\Delta^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} \right] \quad (2)$$

Значения бигармонических функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ω при произвольной нагрузке [2]

$$\varphi_1 = N'(u^\circ) + N \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial w^\circ}{\partial x} + \frac{1}{G} \tau_{yz}^\circ \right)$$

$$\omega = N' \left(2 \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + 2 \frac{\partial v^\circ}{\partial y} + \frac{1}{G} \sigma_z^\circ \right) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} N''(w^\circ) +$$

$$+ N \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \Delta^2(w^\circ) + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^\circ}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^\circ}{\partial x} \right) \right]. \quad (3)$$

Бесконечные операторы N и его производные выражаются:

$$N = \frac{z^3}{3!} - \frac{2z^5}{5!} \nabla^2 + \frac{3z^7}{7!} \nabla_1^2 \nabla_1^2 - \dots \text{ где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$N' = \frac{z^2}{2!} - \frac{2z^4}{4!} \nabla_1^2 + \frac{3z^6}{6!} \nabla_1^2 \nabla_1^2 - \dots \text{ /двухмерный оператор Лапласа/}$$

$$N'' = z - \frac{2z^3}{3!} \nabla_1^2 + \frac{3z^5}{5!} \nabla_1^2 \nabla_1^2 - \dots \quad (4)$$

Начальные данные $U^\circ, v^\circ, \dots, \tau_{xz}^\circ, \tau_{yz}^\circ$, для которых подбираются алгебраические функции с неопределенными коэффициентами, определяемыми из граничных условий на основаниях и боковых поверхностях.

Как известно, действующие произвольные нагрузки делятся на симметричные и обратно симметричные. В зависимости от вида нагрузки берутся начальные условия.

Рассмотрим оба случая: при обратно симметричной нагрузке начальные данные $u^\circ = v^\circ = \sigma_z^\circ = 0$; следовательно, остаются $w^\circ, \tau_{xz}^\circ, \tau_{yz}^\circ$; при симметричной нагрузке начальные данные $w^\circ = \tau_{xz}^\circ = \tau_{yz}^\circ = 0$ и остаются u°, v° и σ_z° .

Для показа хода решения рассмотрим несколько частных примеров, из многих решенных нами, под разными загружениями. Случай симметричной нагрузки.

1. Круглая толстая плита под нагрузкой распределенной по параболическому закону (рис 1).

При симметричной нагрузке бигармонические функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ω имеют вид:

$$\varphi_1 = N(u^\circ); \varphi_2 = N(v^\circ); \varphi_3 = N\left(\frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y} + \frac{1}{G} \sigma_z^\circ\right);$$

$$\omega = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = N'\left[2\left(\frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y}\right) + \frac{1}{G} \sigma_z^\circ\right]. \quad (5)$$

Начальные данные имеют вид:

$$G u^\circ = A_1 x^3 + B_1 x y^2 + C_1 x;$$

$$G v^\circ = A_1 y^3 + B_1 y x^2 + C_1 y; \quad (6)$$

$$\sigma_z^\circ = \frac{P}{a^2} (x^2 + y^2 - a^2) + R$$

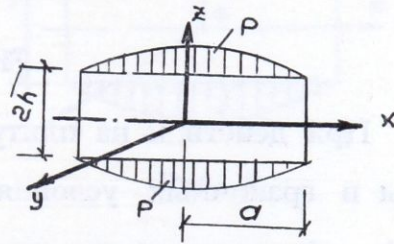


Рис. 1

$$w^\circ = 0; \tau_{yz}^\circ = 0; \tau_{xz}^\circ = 0;$$

Граничные условия:

$$\sigma_z^h = \frac{P}{a} (x^2 + y^2 - a^2); \tau_{xz}^h = \tau_y^h = 0 \quad (7)$$

После внесения выражений (5) в уравнения (2) получим значения напряжений для рассматриваемого случая.

Часть неопределенных коэффициентов определяются из граничных условий, а для определения остальных коэффициентов выделяем из безграничной толстой плиты круглую плиту, ограниченную цилиндрической поверхностью радиуса a с осью z и ставим условие

$$\tau_n = (\sigma_y - \sigma_x) \frac{xy}{x^2 + y^2} + \tau_{xy} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0; \quad (8)$$

т. е. $\tau_n = 0$ на произвольной элементарной площадке боковой поверхности круглой плиты, и что можно обратить в нуль среднее значение нормального напряжения σ_n на протяжении любой из образующих боковой поверхности плиты

$$\int_{-h}^h \sigma_x dz \Big|_{x=a, y=0} = 0 \quad (9)$$

После внесения в общие выражения уравнений (2) напряжений всех неопределенных коэффициентов получим окончательные выражения напряжений для случая симметричной нагрузки

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P}{a^2} \left[\frac{\nu}{4} (x^2 + 3y^2 - a^2) + \frac{1+\nu}{3} (h^2 - 3z^2) \right]; \\ \sigma_y &= \frac{P}{a^2} \left[\frac{\nu}{4} (3x^2 + y^2 - a^2) + \frac{1+\nu}{3} (h^2 - 3z^2) \right]; \\ \sigma_z &= \frac{P}{a^2} (x^2 + y^2 - a^2); \quad \tau_{xy} = -\frac{\nu P_{xy}}{2a^2}; \\ \tau_{xz} &= 0; \quad \tau_{yz} = 0;\end{aligned}\tag{10}$$

При действии на плиту внешней нагрузки в виде сосредоточенной силы в граничных условиях вместо параболической нагрузки $\frac{P}{a^2} (x^2 + y^2 - a^2)$ рассматривается узкая высокая парабола (при сравнительно малой площади плиты) и для определения интенсивности этой вытянутой параболы (соответствующей сосредоточенной силе) берется интеграл по площади из выражения параболической нагрузки (согласно теории приближения функции);

$$\frac{P}{a^2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2 - a^2) dx dy = \mathcal{F}$$

этот интеграл дает равенства

$$-0,385 Pa^2 = \mathcal{F} \quad \text{и} \quad P = -\frac{\mathcal{F}}{0,385 a^2}.$$

Следовательно, при сосредоточенной силе величиной \mathcal{F} решение задачи ведется также, как при параболической нагрузке, но вместо P в граничных условиях берется величина

$$P = -\frac{\mathcal{F}}{0,385 a^2}.$$

В том случае, когда основание внешней действующей нагрузки (вытянутой параболы) будет намного меньше, чем площадь плиты, область интегрирования будет соответственно меньше поверхности плиты.

Если к толстой плите в какой-то точке приложен сосредоточенный момент M , решение задачи ведется следующим образом: к той точке, где

приложен момент, прикладывается сосредоточенная сила, равная единице, вычисляются напряжения или перемещения по этой сосредоточенной силе; полученные выражения дифференцируются по той координате, по какой приложена сила (например, по оси x), затем полученные выражения напряжений или перемещений умножаются на величину сосредоточенного момента; эти последние выражения будут соответствовать значениям напряжений или перемещений от сосредоточенного момента.

2. Прямоугольная плита под нагрузкой, распределенной по параболическому закону в обоих направлениях [3] (рис. 2).

Расчет ведется по предлагаемой расчетной схеме.

Пишутся граничные условия,

$$\sigma_z^h = -\frac{P}{a^2 b^2} (x^2 - a^2) (y^2 - b^2);$$

$$\tau_{xz}^h = \tau_{yz}^h = 0 \quad (11)$$

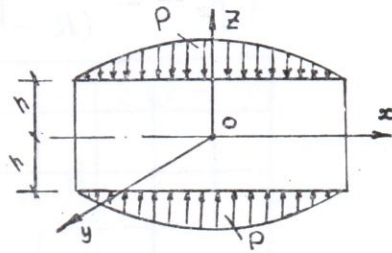


Рис. 2

Начальные данные:

$$G u^o = A_1 x^5 + B_1 x^3 y^2 + G_1 x y^4 + D_1 x^3 + E_1 x y^2 + F_1 x;$$

$$G v^o = A_2 y^5 + B_2 y^3 x^2 + C_2 y x^4 + \check{C}_2 y^3 + E_2 y x^2 + F_2 y;$$

$$\sigma_z^o = -\frac{P}{a^2 b^2} (x^2 - a^2) (y^2 - b^2) + k_1 x^2 + k_2 y^2 + R \quad (12)$$

Определяются значения неопределенных коэффициентов (часть из граничных условий). При этом из безграничной плиты в плане выделяется прямоугольная плита с боковыми гранями $x = a$, $y = b$ и принимаются интегральные граничные условия

$$\int_0^b \int_0^h \sigma_x dy dz \Big|_{x=a} = 0, \quad \int_0^a \int_0^h \sigma_y dx dz \Big|_{y=b} = 0,$$

После внесения всех найденных значений получаем окончательные выражения напряжений [3].

Решен числовой пример для квадратной ($b = a$) плиты [3].

Теперь, на примере толстой кольцевой плиты под нагрузкой, распределенной по параболическому закону, покажем путь решения задач толстых плит сложного очертания в плане [4,5] (рис. 3).

Для рассматриваемого случая, начальные данные представляем:

$$\begin{aligned} G u^{\circ} &= A x^3 + B x y^2 + C x + A_1 (x - r)^3 + \\ &\quad + B_1 (x - r) (y - r) + C_1 (x - r), \\ G v^{\circ} &= A y^3 + B y x^3 + C y + A_1 (y - r)^3 + \\ &\quad + B_1 (y - r) (x - r)^2 + C_1 (y - r); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma_z^{\circ} = - \frac{4 P}{(R - r)^2} [-x^2 + (R + r)x - Rr] + k$$

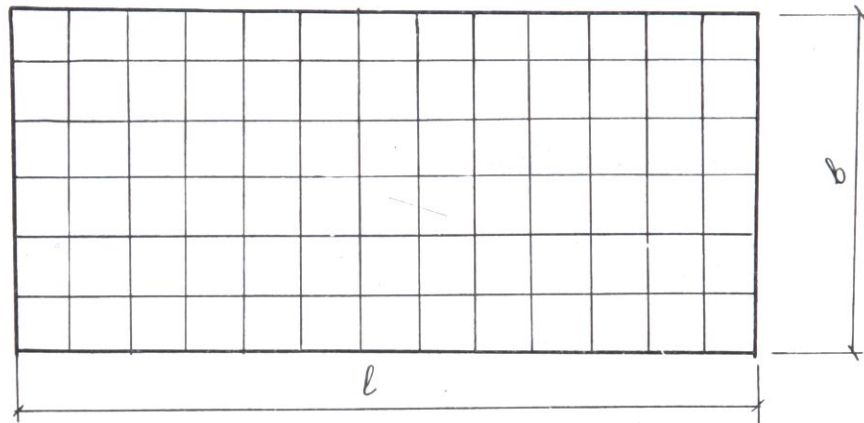


Рис. 3

Граничные условия выражаются:

$$\sigma_z^h = - \frac{4 P}{(R - r)^2} (-x^2 + (R + r)x - Rr); \quad (15)$$

$$\tau_{xz}^h = \tau_{yz}^h = 0;$$

Решение задачи ведется также, как и в предыдущем случае. Определяются значения неопределенных коэффициентов. Для этого кроме представленных граничных условий (15) из безграничной толстой в плане выделяется кольцевая плита и принимаются граничные условия на боковой поверхности $\tau_n = 0$ и что среднее значение нормального напряжения на протяжении любой из образующих боковой поверхности кольцевой плиты можно обратить в нуль. Ввиду наличия осевой симметрии достаточно принять это условие для образующих

$$x = R, \quad y = 0 \quad \text{и} \quad x = r, \quad y = 0$$

$$\int_{-h}^h \sigma_x dz \Big|_{x=R} = 0; \quad \int_{-h}^h \sigma_x dz \Big|_{x=r} = 0; \quad (16)$$

После внесения найденных значений в выражения напряжений, получаем окончательные выражения компонентов напряжений [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{\nu P}{r(R-r)^2(1-\nu)} \left\{ 3(R-r+\nu r)x^2 + [r(1-\nu) - R(1+2\nu)]y^2 + \right. \\ & + (\nu-2)(R+r)(x-r)^2 + (R+r)(y-r)^2 + \frac{2h^2r}{3\nu} [1-\nu(\nu+2)] - \\ & - r^2 \left. \right\} 3R(1+\nu) + r(2\nu-3) - 4z^2 \left[\frac{r}{\nu} - (2+\nu)r \right] + \\ & + 2\nu(R-r)(x^2+y^2) - 2\nu(R+r)((x-r)^2 + (y-r)^2) - \\ & - 2r[-x^2 + (R+r)x - Rr] \Big\}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \frac{2\nu P}{(1-\nu)r(R-r)^2} \{ [r(1-\nu) - R(1+2\nu)]xy + \\ & + \nu(R+r)(x-r)(y-r) \}; \end{aligned}$$

$$\tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0;$$

Решены числовые примеры для кольцевой плиты под нагрузкой распределенной равномерно и по параболическому закону.

Указанный метод распространяется и на анизотропные тела, но расчетная часть намного усложняется.

Общее решение задач расчета анизотропных толстых плит требует проведения многочисленных математических вычислений, однако основные принципы решения можно установить при решении частных задач.

Нами разработан приближенный метод расчета анизотропных толстых плит, основанный на решении дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям Навье для изотропных тел (6). Для иллюстрации предлагаемого способа рассмотрим ортотропную плиту.

Закон Гука ортотропных плит имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E^2} \sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_z = \epsilon_x; \\ \tau_{xz} = G_{13} \gamma_{zx} = G_{13} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Из системы (18) определяем значения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ в перемещениях. Полученные значения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ и τ_{yz} внесем в уравнения Навье. После некоторых простых упрощений получаем уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} & \frac{[(\nu_{31} \nu_{23} + \nu_{21}) \nu_{32} - (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})] E_1}{(\nu_{12} \nu_{31} + \nu_{32}) (\nu_{23} \nu_{31} + \nu_{21}) - (1 - \nu_{13} \nu_{31}) (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ & + G_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ & + \left[G_{12} - \frac{(\nu_{31} \nu_{23} + \nu_{21}) \nu_{31} E_1}{(\nu_{12} \nu_{31} + \nu_{32}) (\nu_{23} \nu_{31} + \nu_{21}) - (1 - \nu_{13} \nu_{31}) (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ & + \left[G_{13} - \frac{E_1 (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})}{\nu_{12} (\nu_{31} \nu_{23} + \nu_{21}) + \nu_{13} (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21}) + \nu_{23} \nu_{32} - 1} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left[G_{13} + \frac{E_3}{\nu_{31}} + \frac{(\nu_{32} \nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13} \nu_{32} + \nu_{21} \nu_{12} - 1) E_3}{(\nu_{12} \nu_{31} + \nu_{32}) (\nu_{23} \nu_{31} + \nu_{21}) - (1 - \nu_{13} \nu_{31}) (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \\ & + \left[G_{23} - \frac{\nu_{31} (\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}) E_3}{(\nu_{12} \nu_{31} + \nu_{32}) (\nu_{23} \nu_{31} + \nu_{21}) - (1 - \nu_{13} \nu_{31}) (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \\ & + G_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\nu_{31} (\nu_{21} \nu_{12} - 1) E_3}{(\nu_{12} \nu_{31} + \nu_{32}) (\nu_{23} \nu_{31} + \nu_{21}) - (1 - \nu_{13} \nu_{31}) (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \end{aligned}$$

В случае анизотропных плит вместо гармонического уравнения (для изотропных плит), решается уравнение

$$A_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad (20)$$

где для ортотропных плит

$$A_1 = \frac{[(\nu_{31} \nu_{23} + \nu_{21}) \nu_{32} - (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})] E_1}{(\nu_{12} \nu_{31} + \nu_{32}) (\nu_{23} \nu_{31} + \nu_{21}) - (1 - \nu_{13} \nu_{31}) (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21})}, \quad (21)$$

$$B_1 = G_{12}; \quad C_1 = G_{13}$$

Общая форма решения Буссинеска-Галеркина уравнений Навье для ортотропной плиты есть:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 G_{12} \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi_1 - \frac{\nu}{2(1-\nu_{12})} \left(\Psi_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu_{12} \Delta^2 w \right) \right]; \\ \sigma_y &= 2 G_{21} \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi_2 - \frac{\nu}{2(1-\nu_{21})} \left(\xi_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_{21} \nabla^2 w \right) \right]; \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) - \frac{1}{1-\nu_{12}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Бигармонические функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и w имеют тот же вид, что и в предыдущем случае,

причем

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \Psi_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \text{учитывающий анизотропию} \\ \Psi_1 &= \frac{E_1 (\nu_{23} \nu_{32} - 1)}{[\nu_{12} (\nu_{31} \nu_{23} + \nu_{21}) + \nu_{13} (\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21}) + \nu_{23} \nu_{32} - 1] G_{13}}; \\ \xi_1 &= \frac{G_{12}}{G_{13}} \end{aligned} \tag{23}$$

Последовательность решения задачи ортотропной толстой плиты такая же, как и для изотропной: задаются граничные условия, принимаются выражения начальных данных, определяются значения функции, но оператор Лапласа заменяется оператором, учитывающим анизотропию, определяются из граничных и дополнительных интегральных условий значения неопределенных коэффициентов, берутся первые два члена бесконечных операторов и окончательно получаются выражения компонентов напряжений.

Например, для трансверзально-изотропной круглой плиты под нагрузкой, распределенной по параболическому закону выражения компонентов напряжений имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2 G \nu^1 P}{G^1 a^2 [4 + 4 \nu^1 + (1 - \nu^1) (\Psi + 3 \xi)]} \left[- (3 x^2 + y^2) + \right. \\ &+ \left. \frac{(7 + \nu) \Psi + (1 + 3 \nu) \xi}{1 - \nu} \left(z^2 - \frac{h^2}{3(1 - \nu)} \right) + \frac{8 \nu (\Psi + \xi) h^2}{(1 - \nu^1) (1 - \nu)} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{P G}{G^1 (1 - \nu) a^2} \left[\frac{\Psi^0 + \nu (\Psi^0 + \xi) h^2}{3} + \nu (x^2 + y^2 - a^2) \right], \quad (24)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{4 G \nu^1 P}{G^1 [(4 + 4 \nu^1 + (1 - \nu^1) (\Psi^0 + 3 \xi))] a^2} x y;$$

$$\tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = 0;$$

где

$$\Psi^0 = \frac{E (E^1 - E \nu^1)^2}{(1 + \nu) (E^1 - E^1 \nu - 2 \nu^1 E) G^1}; \quad \xi = \frac{G}{G_1} \quad (25)$$

Расчет толстых плит, подпорных стен и других тел, лежащих на упругом основании, лишь тогда дает реальную картину работы, когда учитывается совместная работа тела и основания, т. е. когда решается контактная задача.

При решении контактной задачи неизвестными являются напряжения и деформации по контактной поверхности с учетом совместной работы и для их определения они разложены: напряжения — на нормальные и касательные, а перемещения на вертикальные и горизонтальные. К изучению задачи подходим двояко.

1) Принимаем условия, что перемещения по контактной линии или поверхности (тела и основания) равны;

2) что напряжения по контактной поверхности равны.

При решении второй задачи нам неизвестен закон распределения напряжений. Принимаем определенный закон распределения, который разумеется, не обеспечит совпадения точек, поэтому в точках прикладываем дополнительные (уравновешивающие) напряжения, закон распределения которых неизвестен.

Имеем две системы напряжений: 1) основные напряжения, для вычисления которых пользуемся равновесием тела, отделенного от основания; 2) дополнительные напряжения, которые выражаем при помощи полиномов Чебышева, которые позволяют применить наиболее удобный способ аппроксимации функции (эти напряжения можно выразить и другими классическими полиномами: Лежандра, Якоби, Лагерра, Эрмита и некоторые другие, связанные с ними). Неопределенные коэффициенты входящие в полиномы Чебышева определяются методом наименьших квадратов, который сводится к определению минимума интеграла.

Контактная задача толстой плиты решается, как в плоской так и пространственной постановке. Сперва рассмотрим контактную задачу плиты в условиях плоской деформации (рис. 4).

Рассматриваем прямоугольную толстую плиту, выделенную из безграничной в плане плиты. Напряженное состояние этой граничной плиты

будет такое же, как и для безграничной в пределах выделенной плиты с учетом граничных условий. Выделяем полосу (диск), имеющую длину l , ширину, равную единице, и высоту, равную толщине. Решение ведем по теории решения плоских контактных задач, но несколько увеличиваем объем вычислений. Затем плиту рассматриваем в поперечном направлении; из нее выделяем полосу шириной, равной l м, и погружаем реакциями оснований, определенными при рассмотрении плиты в продольном направлении. Нагрузка, приходящая на каждый метр, считается равномерно распределенной. На такие нагрузки рассчитываются все поперечные балки, пользуясь полиномами Чебышева.

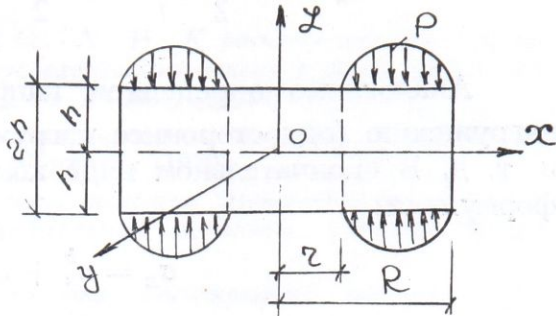


Рис. 4

Зная реактивные давления в продольном направлении, даем значения x , нагружаем поперечные балки реактивными нагрузками и решаем задачу.

Контактная задача толстой плиты, лежащей на упругом основании. Решение контактной задачи ведем по предложенной нами схеме расчета, но с той разницей, что на толстую плиту сверху действует внешняя нагрузка, распределенная в обоих направлениях по параболическому закону, а на контактном участке образуются контактные напряжения, которые уравнивают наружную нагрузку. Мы выше рассматривали плиты, которые нагружены одинаковыми нагрузками на обоих основаниях. Теперь, нагрузка действует только сверху, а нижнее основание нагружено контактными напряжениями по неизвестному закону.

Здесь потребовались дополнительные исследования. Рассматриваем плиту, на которую действует односторонняя нагрузка. Нагружаем оба основания плиты (в действительности нагружено только верхнее основание). Обозначим соответствующие напряжения через σ_x^* , σ_y^* , τ_{zx}^* , пишем выражения напряжения для этого случая, берем полусумму и полуразность этих компонентов

$$m_1 = \frac{\sigma_x^* + \sigma_y^*}{2}; \quad m_2 = \frac{\sigma_x^* - \sigma_y^*}{2};$$

и т. д.

и с применением соответствующих методов изучаем случай одностороннего нагружения.

Затем берем безграничную плиту, и выделяем из нее прямоугольную плиту таких же размеров, как первая; обозначим напряжения через σ_x^{**} , σ_y^{**} , τ_{zx}^{**} и также возьмем их полусумму и полуразность:

$$n_1 = \frac{\sigma_x^{**} + \sigma_y^{**}}{2}; \quad n_2 = \frac{\sigma_x^{**} - \sigma_y^{**}}{2};$$

Внешние напряжения, соответствующие данному одностороннему нагружению, будут равны:

$$\sigma_x^b = \frac{m_1 + m_2}{2} - \frac{n_1 + n_2}{2}; \quad \sigma_y^b = \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{n_1 + n_2}{2}.$$

Аналогично определяем напряжения, соответствующие контактному нагружению (одностороннее нагружение), которые обозначаем, через σ_x^k , σ_y^k и т. д. В окончательном виде компоненты напряжения будут выражены формулами:

$$\sigma_x = \sigma_x^b + \sigma_x^k; \quad \sigma_y = \sigma_y^b + \sigma_y^k;$$

и т. д.

Вычисление неопределенных коэффициентов связываем с условием минимума энергии.

Как известно, энергия может быть выражена формулой:

$$u = \frac{1}{2E} \int_{-a}^b \int_{-b}^b \int_{-h}^h [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] dx dy dz;$$

Данному напряженному состоянию тела соответствует минимум потенциальной энергии, то есть условие

$$\frac{\partial u}{\partial k_i} = 0; \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

где K_i неопределенные постоянные входящие в принятом законе выражений распределения контактных напряжений.

Аналитический метод, являющейся точным решением для пространственных задач послужит эталоном для числовых методов, в том числе и для метода конечных элементов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Галеркин, Б. Г., Собр. соч. Изд-во АН СССР, т. I, (1952), т. II, (1953).
- [2] Мсхиладзе, Г. Г., *Применение общих форм Буссинеска-Галеркина уравнений Навье к пространственной задаче (толстые плиты и др.)*, Техническая информация № 20, Госстрой Грузинской ССР, (1972).
- [3] Мсхиладзе, Г. Г. и Гугуцидзе, А. Н. *К расчету толстых прямоугольных плит под нагрузкой распределенной по параболическому закону в обоих направлениях*, Труды Грузинского политехнического института № 2 (203), (1978).
- [4] Мсхиладзе, Г. Г., *К вопросу решения задач толстых плит сложного очертания в плане*, Сообщения АН ГССР, 96, №2, Тбилиси, (1979).
- [5] Мсхиладзе, Г. Г., *К вопросу расчета толстых изотропных и анизотропных кольцевых плит*, Инженерные проблемы строительной механики, Сборник трудов, Москва, (1980).
- [6] Мсхиладзе, Г. Г., *К вопросу расчета анизотропных толстых плит*, Сообщения АН ГССР, 71, № 1, (1973).
- [7] Мсхиладзе, Г. Г., *Применение общих форм Буссинеска-Галеркина решения уравнений Навье к анизотропным толстым плитам*, Сообщения АН ГССР, 73, № 2, (1974).

EVALUATION DES TENSIONS DES PLAQUES EPAISSES ET LA
SOLUTION DU PROBLEME DE CONTACT

R é s u m é

Une solution possible du problème spatial pour les plaques épaisses et les corps massifs est considérée. Les opérateurs infinis ont été utilisés pour déterminer directement le tenseur de tension. Partant des tensions obtenues, une procédure d'évaluation de déplacements et de déformations basée sur la méthode de Cauchy-Césaire est proposée.

ODREDJIVANJE NAPREZANJA U DEBELIM PLOČAMA I REŠENJE KONTAKTNOG ZADATKA

I z v o d

Razmatra se jedna mogućnost rešenja prostornog zadatka za slučaj debelih ploča i masivnih tela. Pokazano je da se mogu koristiti beskonačni operatori za neposredno određivanje koordinata tenzora napona. Po dobijenim naprezanjima predlaže se shema određivanja pomeranja i deformacija na osnovu Koši-Čezarove metode.

Г. Г. Мсхиладзе

Грузинский политехнический институт
им. В. И. Ленина, Тбилиси, СССР