TEORIJSKA I PRIMENJENA **MEHANIKA** 10, pp. 39—46, 1984, UDK 533.

ÜBER EINIGE ANWENDUNGEN DER K. VORONJEC-METHODE IN DER DYNAMIK DES ELEKTRISCHLEITENDEN GASES

S. Čantrak

(Zur Erinnerung an Prof. Dr. Konstantin Voronjec
dargestellt am 12. Oktober 1983, Eingegangen im 24. Februar 1984)

In der vorliegenden Arbeit werden die magnetogasdynamischen (MGD) Strömungen der dissipationsfreien kompressiblen Medien behandelt. Die Grundgleichingen, unter Beschränkung auf stationäre adiabatische Strömung, lauten

$$\left.\begin{aligned} & div\,(\rho\,\vec{v}) = 0, \quad \nabla\,\frac{v^2}{2} - \vec{v}\times 2\,\vec{\omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla\,p - \frac{1}{\mu\,\rho}\,\vec{B}\times \mathrm{rot}\,\vec{B} \\ & d\,(p/\rho^{\varkappa})/dt = 0, \quad \mathrm{rot}\,(\vec{v}\times\vec{B}) = 0 \text{ und } \mathrm{div}\,\vec{B} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wobei ρ die Dichte, p der Druck, $\vec{v}$ die Geschwindigkeit, $2\,\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v}$ der Wirbel, $\vec{B}$ die Magnetinduktion, μ die magnetische Permeabilität und ∇ der Nablaoperator sind, während $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und c_v darstellt. Die Beshafung von analytischen Lösungen des Systems (1) ist sehr schwierig und nur mit Hilfe von verchiedenen Voraussetzungen gelingt es, eininge MGD-Strömungsprobleme der zähigkeitslosen idealelektrischleitenden Gase exakt zu lösen. Es wurde gezeigt [7], [9], daß die von K. Voronjec entwickelte Methode [1], [3] auch zur theoretishen Untersuchung dieser MGD--Strömungen verwendet werden kann. Die Erweiterung der K. Voronjec--Methode auf die Probleme der Dynamik eines idealelekrischleitenden Gases ermöglicht die verschiedenen wirbelbehafteten magnetogasdynamischen Strömungen, die ungenügend untersucht worden sind, theoretisch zu behandeln.

Es seigt sich [7], daß die Kompatibilitätsbedingung und das Integral der Bewegungsgleichungen (s. Gln. (1)) im Falle einer ebenen ($\partial/\partial z = 0$) Transverströmung, in der die Vektoren die Gestalt $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ und $\vec{B} = (0, 0, B)$ haben, lauten

$$2\,\omega/\rho = \rho^{\varkappa-1}\,\varepsilon'/(\varkappa-1) + \rho\,\mathcal{B}\,\mathcal{B}'/\mu - \chi', \quad v^2/2 + \varkappa\,\rho^{\varkappa-1}\,\varepsilon/(\varkappa-1) + \rho\,\mathcal{B}^2/\mu = \chi, \qquad (2)$$

wobei aus der Kontinuitäts-, Energie- und Magnetinduktionsgleichung des Systems (1) folgt

$$\rho\, v_x = \rho \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \rho\, v_y = \rho \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\ p = \rho^{\varkappa}\, \varepsilon(\psi) \text{ und } B = \rho\, \mathcal{B}(\psi). \tag{3}$$

Die Funktionen ε, $\mathcal{B}$ und χ sind beliebige Funktionen von der Stromfunktion ψ, während ε', $\mathcal{B}'$ und χ' ihre Ableitungen nach ψ darstellen. Durch die Abhängingkeiten (3) werden die zu der Familie Stromlinien $\psi = \text{const.}$ orthogonalen Trajektorien $\varphi = \text{const.}$ eingeführt, wobei die Funktion $\gamma\,(x, y)$ erscheint [1]. Es werden, nach der K. V. VORONJECschen Methode, die Veränderlichen x und y bzw. v_x und v_y durch die krimmlinigen rechtwinkligen Koordinaten φ und ψ bzw. v und ϑ ersetzt, so daß die Gleichung für γ mit Hilfe von Hleichungen (2) u $2\,\omega = -(\rho\, v^2/\gamma)\,\partial\,\gamma/\partial\,\psi$ lautet

$$\partial\, ln\, \gamma^2/\partial\, \psi = \left(\chi' - \frac{1}{\varkappa - 1}\, \rho^{\varkappa-1}\, \varepsilon' - \frac{1}{\mu}\, \rho\, \mathcal{B}\, \mathcal{B}'\right) \Big/ \left(\chi - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, \rho^{\varkappa-1}\, \varepsilon - \frac{1}{\mu}\, \rho\, \mathcal{B}^2\right). \tag{4}$$

Die Kompatibilitätsbedingungen div $(\rho\, \vec{v}) = 0$ und rot $(\vec{v}/\gamma) = 0$ der Glei chungen (3) lassen sich vermittels (2) und (4) als partielle Ableitungen von ϑ nach ψ und φ darstellen [7]. In der Arbeit [7] wurden einige exakte Lösungen der MGD-Wirbelströmung betrachtet, wobei die verschiedenen Voraussetzungen über die Form der beliebigen Funktionen ε, $\mathcal{B}$ und χ bzw. γ eingeführt worden sind. In dieser Arbeit werden aber einige andere Klassen von magnetogasdynamischen Lösungen des Gleichungssystem (2) betrachtet. Zu dies em Zweck wird das System (2) vermittels (3) in folgender Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\chi}{d\psi} - \frac{1}{\varkappa - 1}\, \rho^{\varkappa-1}\frac{d\varepsilon}{d\psi} - \frac{1}{\mu}\, \rho\, \mathcal{B}\frac{d\mathcal{B}}{d\psi},\\ &\frac{1}{2\rho^2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, \rho^{\varkappa-1}\, \varepsilon(\psi) + \frac{1}{\mu}\, \rho\, \mathcal{B}^2(\psi) = \chi(\psi) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dargestellt. Man setzt nun voraus, daß sich die MGD-Strömungsgrößen in der x-Richtung wenig ändern, was einer Strömung im ebenen Kanal des langsam veränderlichen Querschnitts entspricht. Es werden die Lösungen der Gleichungen (5) in der Form $\psi = \psi\,(\delta\, x, y)$ und $\rho = \rho\,(\delta\, x, y)$ gesucht, wobei δ ein kleiner Parameter ist. Durch die Einführung der dimensionslosen $(\sim)$ und der charakteristischen dimensionsbehafteten $({}_*)$ Größen läßt sich das Gleichungssystem (5) in dimensionsloser Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\tilde\rho}\frac{\partial}{\partial \tilde y}\frac{1}{\tilde\rho}\frac{\partial \tilde\psi}{\partial \tilde y} + \delta^2\frac{1}{\tilde\rho}\frac{\partial}{\partial \tilde x}\frac{1}{\tilde\rho}\frac{\partial \tilde\psi}{\partial \tilde x} = \tilde\chi'(\tilde\psi) - \frac{\Pi^2}{2M(\varkappa-1)}\tilde\rho^{\varkappa-1}\,\tilde\varepsilon(\tilde\psi) - \frac{1}{M}\frac{\tilde\rho}{2\tilde\mu}\,[\tilde{\mathcal{B}}^2(\tilde\psi)]',\\ &\frac{1}{\tilde\rho^2}\left[\left(\frac{\partial \tilde\psi}{\partial \tilde y}\right)^2 + \delta^2\left(\frac{\partial \tilde\psi}{\partial \tilde x}\right)^2\right] + \frac{\varkappa\,\Pi^2}{M(\varkappa-1)}\tilde\rho^{\varkappa-1}\,\tilde\varepsilon(\tilde\psi) + \frac{1}{M}\frac{2}{\tilde\mu}\tilde\rho\,\tilde{\mathcal{B}}^2(\tilde\psi) = 2\,\tilde\chi(\tilde\psi), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

schreiben, wobei der dimensionslose Parameter $\Pi^2 = 2\,\mu_*\, p_* / B_*^2 = 2\,\mu_*\,\rho_*^{\varkappa-2}\varepsilon_* / \mathcal{B}_*^2$ das Verhältnis von gasdynamischem Druck zu magnetischem Druck bzw. von gasdynamischer zu magnetischer Entalpie des Gases bedeutet. Zu beachten ist aber, daß $M = 1$ fur $\Pi^2 \leqslant 1$ und $M = \Pi^2$ für $\Pi^2 > 1$ ist. Zur Lösung der MGD-Gleichungen (6) werden $\widetilde{\psi}$ und $\widetilde{\rho}$ in eine Reihe nach dem kleinen Parameter δ entwickelt d. h.

$$\widetilde{\zeta} = \widetilde{\zeta}_0 + \delta^2\,\widetilde{\zeta}_1 + \ldots, \quad \widetilde{\zeta} = \widetilde{\psi},\ \widetilde{\rho}. \tag{7}$$

Setzt man diese Reihenentwicklungen (7) in (6) ein, so erhält man in nullter Näherung, die durch Index „O" bezeichnet ist, das folgende Gleichungssystem Zeichen „$\sim$" wird weiter weggelassen)

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial y} = \chi_0' - \frac{\Pi^2}{2\,M(\varkappa-1)}\,\rho_0^{\varkappa-1}\,\varepsilon_0' - \frac{1}{M}\frac{\rho_0}{2\,\mu}\,(\mathcal{B}_0^2)', \tag{8'}$$

$$\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right)^2 + \frac{\varkappa\,\Pi^2}{M(\varkappa-1)}\,\varepsilon_0\,\rho^{\varkappa-1} + \frac{1}{M}\frac{2\,\rho_0}{\mu}\,\mathcal{B}_0^2 = 2\,\chi_0, \tag{8''}$$

wobei $W_0 \equiv W(\psi_0)$ und $W_0' \equiv \left.\frac{d\,W}{d\,\psi}\right|_{\psi=\psi_0}$ für $W(\psi) = \varepsilon,\ \mathcal{B}, \chi$ sind. Es ergeben sich vermittels (6) und (7) in erster Näherung, durch Index „1" gekennzeichnet, die folgenden MGD-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right) = \rho_1\,\chi_0 + \rho_0\,\psi_1\,\chi_0'' -$$

$$-\frac{\Pi^2}{M}\frac{\rho_0^{\varkappa-1}}{2(\varkappa-1)}\,(\varkappa\,\rho_1\,\varepsilon_0' + \rho_0\,\psi_1\,\varepsilon_0) - \frac{1}{M\,2\,\mu}\,\rho_0\,[2\,\rho_1\,(\mathcal{B}_0^2)' + \rho_0\,\psi_1\,(\mathcal{B}_0^2)''],$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \frac{\Pi^2}{M}\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\rho_0^{\varkappa-1}\left[(\varkappa-1)\frac{\rho_1}{\rho_0}\,\varepsilon_0 + \psi_1\,\varepsilon_0'\right] + \\ + \frac{1}{M}\frac{2}{\mu}\,[\rho_1\,\mathcal{B}_0^2 + \rho_0\,\psi_1\,(\mathcal{B}_0^2)'] = 2\,\psi_1\chi_0',\end{aligned} \tag{9}$$

wobei $W_0'' \equiv (d^2\,W/d\,\psi^2)_{\psi=\psi_0}$ bei $W(\psi) = \varepsilon,\ \mathcal{B}, \chi$ bezeichnet. Diese Gleichungen sind für den allgemeinen Fall $W = W(\psi)$ abgeleitet und sie gelten für die MGD-Strömung, die isoenergetisch, isentrop und isomagnetisch ist. Im Falle, daß alle drei Funktionen χ, ε und $\mathcal{B}$ im ganzen Strömungsfeld konstant sind, nennt man die Strömung homenergetisch, homentrop und hommagnetisch [7]. Durch Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen wurden unter verschiedenen Voraussetzungen einige Klassen von diesen MGD-Strömungen betrachtet [5]. Man zeigt, daß man nach einfachen Umformungen aus (8′) und (8″) folgende Gleichung

$$\frac{\Pi^2}{M}\,\rho_0^{\varkappa}\,\varepsilon_0+\frac{1}{M\,\mu}\,\rho_0^2\,\mathcal{B}_0^2=f^2\,(x) \tag{10}$$

erhält. Im Fall einer Strömung des idealelektrischleitenden Gases im starken Magnetfeld ($\Pi^2 \ll 1$) ergeben sich, mit Hilfe von den Gleichungen (10) und (8″), die Lösungen für Dichte und Stromfunktion in der Form

$$\rho_{0,0}=\mu^{1/2}f(x)/\mathcal{B}_{0,0} \tag{11}$$

$$\int\limits_0^{\psi_{0,0}}\frac{\mathcal{B}_{0,0}\,d\,\psi_{0,0}}{\sqrt{\chi_{0,0}-f(x)\,\mathcal{B}_{0,0}/\mu^{1/2}}}=(2\,\mu)^{1/2}f(x)\,[y-F(x)], \tag{12}$$

wobei der zweite Index „0" die nullte Näherung nach dem Parameter Π^2 bezeichnet. Die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ sind beliebige Funktionen, die aus den Randbedingungen an den Kanalwänden, z. B. $\psi_{0,0}=0$ für $y=Y_d(x)$ und $\psi_{0,0}=\psi_g$ für $y=Y_g(x)$, bestimmt werden. Unter Voraussetzung $\mathcal{B}(\psi_{0,0}) = \chi(\psi_{0,0})/C$, mit $C=\text{const.}$, und nach der Einführung der Funktion $\Phi(\psi_{0,0})$ durch den Ausdruck $[\Phi'(\psi_{0,0})]^2=\mathcal{B}_{0,0}$ wird die Gleichung (12) integriert, so daß die Lösung lautet

$$\Phi\,(\psi_{0,0})=\sqrt{2\,\mu}\,[C-f(x)/\sqrt{\mu}]^{1/2}f(x)\,[y-F(x)]. \tag{12'}$$

Für die Strömung im sehr schwachen Magnetfeld ($\Pi^2 \gg 1$) werden die Lösungen der Gleichungen (8′) und (8″) nach Potenzen von Π entwickelt d. h.

$$\zeta_0=\zeta_{0,0}+\Pi^{-2}\,\zeta_{0,1}+\ldots,\quad \zeta_0=\psi_0,\,\rho_0, \tag{13}$$

wobei der zweite Index entsprechende Näherung nach Parameter Π^2 bezeichnet. Unter Beschränkung auf die Potentialströmung d. h. $\varepsilon=\alpha=\text{const.}$, $\mathcal{B}=\beta=\text{const.}$ und $\chi=C_1=\text{const.}$ werden die Gleichungen (8′) und (8″)

$$\partial\,\psi_0/\partial\,y=\rho_0\,v_{x,0}\,(x) \tag{14'}$$

$$\frac{\alpha\,\varkappa}{\varkappa-1}\,\rho_0^{\varkappa-1}+\frac{2\,\beta^2}{\Pi^2\,\mu}\,\rho_0=2\,C_1-v_{x,0}^2\,(x). \tag{14''}$$

Die nullte und die erste Näherung für ρ_0 ergeben sich aus (14″) vermittels (13) und werden durch die Ausdrücke

$$\rho_{0,0}=\left\{\frac{\varkappa-1}{\alpha\,\varkappa}\,[2\,C_1-v_{x,0}^2(x)]\right\}^{1/(\varkappa-1)},\qquad \rho_{0,1}=-\frac{2\,\beta^2}{\alpha\,\varkappa\,\mu}\,\rho_{0,0}^{3-\varkappa}$$

gegeben. Man erhält aus (14′) für die Stromfunktion

$$\psi_{0,0}=\rho_{0,0}\,v_{x,0}\,(x)\,[y-Y_d\,(x)],\qquad \psi_{0,1}=-\frac{2\,\beta}{\alpha\,\varkappa\,\mu}\,\rho_{0,0}^{3-\varkappa}\,v_{x,0}\,(x)\,[y-Y_d\,(x)],$$

wobei $\psi = 0$ für $y = Y_d(x)$ vorausgesetzt wurde. Dabei ist die Form der Kanalwand $Y_d(x)$ bekannt, während die Geschwindigkeitsverteilung $v_{x,0}(x)$ in einem beliebigen Querschnitt (x = const.) gegeben wird.

Die Methode von K. Voronjec läßt sich auch für die translationssymmetrischen MGD-Strömungen anwenden. Es bestehen in diesem Fall alle drei Komponenten der Geschwindigkeit und Magnetinduktion d. h. $\vec{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ und $\vec{B}\,(B_x, B_y, B_z)$, aber alle MGD-Strömungsgrößen sind von z unabhängig d. h. $\partial/\partial z = 0$, so daß die solenoidalen Felder von $\rho\vec{v}$ und $\vec{B}$ in folgender Form

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \psi \times \vec{k} + v_z \vec{k} \text{ und } \vec{B} = \nabla \xi \times \vec{k} + B_z \vec{k} \tag{15}$$

dargestellt werden können. Geht man mit (15) in die Gleichungen (1) ein, so erhält man

$$B_x = \xi' \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad B_y = -\xi' \frac{\partial \psi}{\partial x}, \begin{pmatrix} v_z \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\mu \rho \lambda}{b} \begin{pmatrix} \rho^{-1} \\ \xi' \end{pmatrix} + \frac{\rho \mathcal{B}}{b} \begin{pmatrix} \xi' \\ \mu \end{pmatrix}, \tag{16}$$

wobei ξ, λ und $\mathcal{B}$ beliebige Funktionen von ψ und $b = \mu - \rho\,(\xi')^2 \neq 0$ sind. Die Größen v_x, v_y und p sind mit den Ausdrücken (3) bestimmt. Der Strich (′) bedeutet die Ableitung nach ψ d. h. $\xi' \equiv d\xi/d\psi$. Anstatt der Gleichungen (2) ergeben sich nun die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\vec{\omega}}{\rho} \cdot \vec{k} &= \frac{1}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa - 1} \varepsilon' - \frac{1}{\mu \rho} \xi' \triangle \xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} - \chi', \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla \psi}{\rho} \right)^2 &+ \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa - 1} \varepsilon + \frac{\partial \tau}{\partial \rho} = \chi(\psi), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

wobie χ eine beliebige Funktion von ψ d. h. $\chi' \equiv d\chi/d\psi$ und

$$\tau(\rho, \psi) = \rho\,(\rho\,\mathcal{B}^2 + 2\,\rho\,\xi'\,\mathcal{B}\,\lambda + \mu\,\lambda^2)/2\,[\mu - \rho\,(\xi')^2] \tag{18}$$

die Funktion von ρ und ψ sind, so daß z. B. der Ausdruck für $\partial\tau/\partial\rho$ lautet

$$\frac{\partial \tau}{\partial \rho} = -\frac{\rho\,\mathcal{B}}{2b^2} [\rho\,(\xi')^2 - 2\,\mu]\,(\mathcal{B} + 2\,\xi'\,\lambda) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu \lambda}{b} \right)^2.$$

Es sei bemerkt, daß diese Ausdrücke im Falle $\xi' = \lambda = \mathcal{B} = 0$ in entsprechende Ausdrücke in [1] und [2] übergehen. Mit Hilfe von (17) und (3) erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \ln \gamma^2 = \left(\chi' - \frac{\rho^{\varkappa - 1}}{\varkappa - 1} \varepsilon' + \frac{\xi'}{\mu \rho} \triangle \xi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} \right) \Bigg/ \left(\chi - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa - 1} \varepsilon - \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right), \tag{19}$$

die für den Fall $\xi' = \lambda = 0$ mit der Gleichung (4) übereinstimmt. In der Arbeit [8] sind die partiellen Ableitungen $\partial \vartheta / \partial \psi$ und $\partial \vartheta / \partial \varphi$ gegeben und die MGD-Wirbelströmungen unter Voraussetzung $\xi' = 0$ und $ln \gamma^2 = f(\rho)$ untersucht worden. Einige andere Klassen von stationären Lösungen sind in [4] und [6] auch zu finden.

Die Erweiterung des K. VORONJEC-Verfahrens auf die dreidimensionalen MGD-Probleme erlaubt vershiedene wirbelbehaftete magnetogasdynamiche Strömungen zu untersuchen. Durch die Einführung der Strom-und Magnetinduktion funktionen $\psi_i(x, y, z)$ und $\xi_i(x, y, z)$ d. h.

$$\rho \vec{v} = \nabla \psi_1 \times \nabla \psi_2 \quad \text{und} \quad \vec{B} = \nabla \xi_1 \times \nabla \xi_2 \tag{20}$$

werden die Kontinuitätsgleichung $div(\rho \vec{v}) = 0$ und MAXWELL-Gleichung $div \vec{B} = 0$ des Gleichungssystem (1) identisch erfüllt, während aus der Energiegleichung folgt $p = \rho^{\varkappa} \varepsilon(\psi_1, \psi_2)$, wobei $\varepsilon(\psi_1, \psi_2)$ eine beliebige Funktion von ψ_1 und ψ_2 ist. Geht man mit (20) in die Magnetinduktionsgleichung rot $(\vec{v} \times \vec{B}) = 0$ ein, so erhält man

$$(\vec{B} \cdot \nabla \psi_1) \nabla \psi_2 - (\vec{B} \cdot \nabla \psi_2) \nabla \psi_1 = \rho \nabla \mathcal{B}(\psi_1, \psi_2).$$

Für den Spezialfall der Parallelströmung ($\mathcal{B} =$ const.), die dadurch ausgezeichnet ist, daß die Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{v}$ zueinander parallel sind, erhält man $\vec{B} = h(\psi_1, \psi_2) \nabla \psi_1 \times \nabla \psi_2$. Es ist dann möglich, wie durch längere Umformungen in der Bewegungsgleichung (1) gezeigt werden kann [9], die Projektion des Wirbels $2\vec{\omega}$ auf $\nabla \psi_1$ bzw. $\nabla \psi_2$ mit dem Ausdruck

$$\delta_i \left(\frac{\rho h^2}{\mu} - 1 \right) \frac{2\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \psi_i = \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_k} - \frac{1}{\varkappa - 1} \rho^{\varkappa - 1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi_k} + \frac{\rho h v^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \psi_k} - h_k$$

zu bestimmen, wobei i, $k = 1,2$, $\delta_{1,2} = -1,1$ und $i \neq k$ sind. Die Größe h_k und das Integral der Bewegungsgleichungen sind mit (5'') bzw. (9) in der Arbeit [9] gegeben, in der als Anwendungsbeispiel eine pseudoebene MGD-Strömung betrachtet wurde. Alle Ausdrücke gehen, für den Fall $h = 0$, in die Bedingungen in [3] über.

In der vorliegenden Arbeit wurden nur einige Anwendungen der K. VORONJEC-Methode in der Dynamik des idealelektrischleitenden Gases betrachtet. Durch die Erweiterung dieser Methode auf die Magnetogasdynamik war es möglich, einige Strömungsprobleme nicht nur annähernd sondern auch exakt zu lösen. Es zeigt sich aber, daß durch Verwendung des K. VORONJEC-Verfahrens und Berücksichtigung der gewissen Beschränkungen auch andere wichtige Klassen von wirbelbehafteten magnetogasdynamischen Strömungen exakt behandelt werden können.

LITERATUR

[1] Voronjec, K., *Sur quelques mouvements adiabatiques d'un gaz parfait*, Publ. Inst. Math., T. 10 (24), pp. 185—193, (1970).

[2] Voronjec, K., *Sur les mouvements analogues d'un gaz parfait et d'un fluide incompressible*, Publ. Inst. Math., T. 9(23), 203—216, (1969).

[3] Voronjec., *Sur les mouvements tridimensionnels d'un gaz parfait*, Publ. Inst. Math. ,T. 12(26), 137—142, (1971).

[4] Ткалич, В. С., *Двухпараметрические движения в магнитной газодинамике*, ПММ, т. 26 в. I, 96—103, (1962).

[5] Морозов, А. И., *Соловьев, Л, С., Стационарные аксиальносимметричные течения плазмы поперек азимутального магнитного поля*, ЖТФ, Т. 34, в. 3, 429—443, (1964).

[6] Smith, P., *The steady magnetodynamics flow of perfectly conducting fluids*, J. Math. Mech., Vol. 12, No. 4, 505—520, (1963).

[7] Čantrak, S. M., *Ebene stationäre Strömungen der dissipationsfreien unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes befindlichen Gase*, Zbornik radova Mat. inst., Nova serija, knj. 3(11), 21—30, (1979).

[8] Čantrak, S. M., Beníšek, M., *O nekim klasama stacionarnih rešenja vrtložnog bezdisipativnog strujanja u magnetogasodinamici*, Zbornik radova 14. Jug. kong. rac. i prim. meh., B 1—4, 27—34, Portorož, (1978).

[9] Čantrak, S. M., *Ein Beitrag zur magnetogasdynamichen nichtdissipativen Strömung*, Z. angew. Math. Mech., (1984), (im Druck).

ON SOME APPLICATION OF METHOD OF K. VORONJEC IN DYNAMICS OF CONDUCTING GAS

Summary

The magnetodynamic flow of nonviscous perfectly conducting gas is considered in this paper. It is shown that the application of the method of K. Voronjec allows a theoretical investigation of different kinds of MGD flow. Some solutions for the flow in channels were found, when there is a weak change of the parameters in one way. The method of K. Voronjec is applied for the study of translatory symetrical and three-dimensional MGD flow. This method was extended onto dynamics of perfectly conducting gas and that allows an exact investigation of vorticity MGD flow.

O NEKIM PRIMENAMA METODE K. VORONJEC U DINAMICI ELEKTROPROVODNOG GASA

I z v o d

U radu se posmatra magnetogasodinamičko strujanje neviskoznog savršeno-elektroprovodnog gasa. Pokazuje se da primena metode K. Voronjec omogućava teorijsko istraživanje različitih klasa MGD-strujanja. Nađena su neka rešenja za strujanje u kanalima, kada se parametri slabo menjaju u jednom pravcu. Postupak K. Voronjeca primenjen je za izučavanje translaciono-simetričnih i trodimenzijskih magnetogasodinamičkih strujanja. Proširenje ove metode na dinamiku savršenoelektroprovodnog gasa omogućava egzaktno istraživanje vrtložnih MGD-strujanja.

Svetislav Čantrak
Maschinenbaufakultät
27 marta 80,
11000 Beograd
Yugoslavia