TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 10, pp. 159—168, 1984, UDK 531.332

ЗАКОНЫ КОНСЕРВАЦИИ В ТЕРМОУПРУГОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

М. Вукобрат

(Поступило 10 ноября 1983)

1. Введение

Известно, что общий закон баланса какого либо физического значения гласит

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \psi \, d v = - \int_s d a n [\psi] + \int_o \rho S [\psi] \, d v, \tag{1.1}$$

где $[\psi] \, d S$ поток этого значения на единицу поверхности, а $S [\psi]$ прилив или поток на единицу массы.

Хорошо известно, что универсальные законы, как законы консервации массы, количество движения или энергии, выражаются в вышеприведенном виде. Между тем, кроме этих законов, показано, что существуют и особые законы консервации. Например, в эластичной статике, при отсутствии обьемных сил остается в силе закон консервации „флюкса"/Eshelby [1] Knowles и Sternberg [2]:

$$\int_s [w \, \delta_{ij} - \sigma_{kj} \, u_{k,i}] \, n_j \, d s = 0, \tag{1.2}$$

где

w — плотность энергии деформации

σ_{ij} — тензор напряжения

$u_{i,j}$ — градиент вектора смещения

n_j — единичный вектор внешней нормали

$d s$ — элемент поверхности S.

Приведенный закон, который вывел Eshelby, находит применение в теории дислокации. Его двухмасштабный вариант используется в механике ломки Rice [3], Cherepanow [4] в виде „интеграла независимого от траектории". Недавно Fletcher [5] вывел законы консервации в упругодинамике и исползовал их в трактовке волн Релия. Доказательства, использованные в [2] и [5], с целью получить законы консервации, основываются на использовании теоремы Нетера о инвариантности вариационных принципов, т. е. о инвариантности Лагранжиана по отношению к семье инфинитезимальных трансформаций.

Целью этой работы является расширение вывода соответствующих законов консерваций термоупругого диэлектрика с применением теоремы Нетера. Инверсной теоремой Нетера определяются семьи трансформаций, которые ассоцируют соответствующие законы консерваций.

2. Теорема Нетера

Пусть ξ $(\alpha = 1,2 \ldots n)$ координаты Декарта в n — размерном пространстве Эуклида E_n. С $\xi(\xi_\alpha)$ обозначаем вектор положения точки, с ξ_α — — координаты в E_n, а с R — ограниченную, закрытую и регулярную област в E_n. Путсь $\underset{\lambda}{w}$ $(\underset{\lambda}{w_i})$ $(i = 1,2 \ldots m)$, $\psi(\xi_\alpha)$ и θ — произвольные векторные, т. е. скаларные поля и температура, соответственно определены на R.

Претположим, что нам дана аналитическая, одопараметрическая, семья трансформаций

$$\bar{x} = \bar{x}(\underset{\sim}{x}; \eta) \tag{2.1}$$

где

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(\xi, \underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$$

такая, что (2.1.) идентична трансформация для $\eta = 0$.

Тогда

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta; \eta) = \xi + \alpha(\underset{\sim}{x}) + 0(\eta^2)$$

$$\bar{w} = \bar{w}(\xi, \underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta; \eta) = w + \beta(\underset{\sim}{x}) + 0(\eta^2)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(\xi, \underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta; \eta) = \psi + \gamma(\underset{\sim}{x}) + 0(\eta^2)$$

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(\xi, \underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta; \eta) = \theta + \delta(\underset{\sim}{x}) + 0(\eta^2) \tag{2.2}$$

где

$$\alpha = \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$$

$$\beta = \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$$

$$\delta = \left(\frac{\partial\,\theta}{\partial\,\eta}\right)_{\eta=0}$$

Дальше претположим, что пусть дано определение функционала

$$\mathfrak{L}\,(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta) = \int\limits_{R} L\,(\underset{\sim}{Y})\,d\,\xi \tag{2.4}$$

где

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{Y}\,(\xi, \underset{\lambda}{w}, \bigtriangledown \underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \bigtriangledown \underset{\mu}{\psi}, \theta)$$

а $L\,(Y)$ непрепрывная и дифференциабильная по всем аргументам до ряда, который нам необходим.

О функционале $\mathfrak{L}$ в (2.4) говорится, что он инвариантен в $(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$ при трансформациях (2.2), если

$$\int\limits_{R} L\,(\underset{\sim}{\overline{Y}})\,d\,\overline{\xi} = \int\limits_{R} L\,(\underset{\sim}{Y})\,d\,\xi \tag{2.5}$$

для произвольно малого значения $|\eta|$.

Если для данного $(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$

$$\frac{d}{d\,\eta}\Big[\int\limits_{R} L(\underset{\sim}{\overline{Y}})\,d\,\overline{\xi}\Big]_{\eta=0} = 0 \tag{2.6}$$

тогда говорится, что $\mathfrak{L}$ инфинитезимально инвариантно в $(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$. Ясно, что $\mathfrak{L}$ инфинитезимально инвариантно в $(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$, если оно инвариантно в $(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$.

В таком случае теорема Нетера гласит:

Пусть R домен н пусть $(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$ удовлетворяют уровнения Эйлер--Лагранже

$$L, \underset{\lambda}{w_i} - \frac{\partial}{\partial\,\xi_\alpha} L, \underset{\lambda}{w_{i,\alpha}} = 0$$

$$L, \underset{\mu}{\psi} - \frac{\partial}{\partial\,\xi_\beta} L, \underset{\mu}{\xi_{,\beta}} = 0 \tag{2.7}$$

которые справедливые для каждое X и $\xi \in \hat{R}$.

Тогда $\mathfrak{L}$ в (2.4) инфинитезимально инвариантно в $(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$ для семьи трансформаций (2.2) если и только если $(\underset{\lambda}{w}, \underset{\mu}{\psi}, \theta)$ удовлетворяют

$$\frac{\partial}{\partial \xi}[L(Y)\alpha_\beta + L,\underset{\lambda}{w_{i,\beta}}(Y)\underset{\lambda}{p_i} + L,\underset{\mu}{\psi_{,\beta}}(Y)\underset{\mu}{q}] + L,\theta(\delta - \theta_{,\beta}\alpha_\beta) = 0 \qquad (2.8)$$

где

$$\underset{\lambda}{p_i} = \underset{\lambda}{\beta_i} - w_{i,\beta}\alpha_\beta \quad \underset{\mu}{q} = \underset{\mu}{\gamma} - \underset{\mu}{\psi_{,\beta}}\alpha_\alpha. \qquad (2.9)$$

Если R закрытая регулярная подобласть $\hat{R}$, тогда (2.8) с помощью теоремы о дивергенции можно написать в форме

$$\int_{\partial R}[L\alpha_\beta + L,\underset{\lambda}{w_{i,\beta}}\underset{\lambda}{p_i} + L,\underset{\mu}{\psi_{,\beta}}\underset{\mu}{q}]\, n_\beta(\xi)\, d\xi + \int_v L_{,\theta}(\delta - \theta_{,\beta}\alpha_\beta)\, dv = 0 \qquad (2.10)$$

где ∂R граница R, а n_β — единичный вектор внешней нормали на ∂R.

Введенные обозначения имеют следующее значение

$$H_{,\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \quad H,\underset{\lambda}{w_{i,\alpha}} = \frac{\partial H}{\partial w_{i,\alpha}} \quad H,\underset{\mu}{\psi_{,\alpha}} = \frac{\partial H}{\partial \psi_\alpha}$$

$$H,\underset{\lambda}{w_i} = \frac{\partial H}{\partial \underset{\lambda}{w}} \quad H_{,\underset{\mu}{\psi}} = \frac{\partial H}{\partial \underset{\mu}{\psi}} \quad H_{,\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta},$$

где $H(Y)$ произвольная непрерывная и дифференциабильная тензорная или скалярная функция своих аргументов. Различаем абсолютную производную $H_{,\alpha}$ от частной производной по ξ_α введением обозначения H/α.

3. Применение теоремы Нетера в термоупругом диэлектрике

В работе [6,7] даны соответстствующие уровнения поля линеарного термоупругого диалектрика. В отсутствии обьемных сил остаются в силе следующие уровнения

$$T_{ij,i} = \rho\,\ddot{u}_i$$

$$E_{ij,i} + E_i^L - \varphi_{,j} = 0 \qquad (3.1)$$

$$-\varepsilon_0\,\varphi_{jij} + \pi_{j,j} = 0$$

$$\dot{q}_{i,i} = -\theta\,\dot{S}$$

где

T_{ij} — тензор напряжения
E — локальний электрический тензор
E_{ij} — локальная электрическая сила
u_i — вектор смещения
π_i — вектор поляризации
φ — электрический потенциал
S — удельная энтропия
q — вектор топлового потока.

Соответструющие определяющие соотношения

$$T_{ij} = \frac{\partial W^L}{\partial e_{ij}} \quad E_i^L = \frac{\partial W^L}{\partial \pi_i} \quad E_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \pi_{j,i}} \tag{3.2}$$

где удельная энергия деформации и поляризации термоупругого диэлектрика к [7]

$$W = \frac{1}{2} A_{ij} \pi_i \cdot \pi_j + \frac{1}{2} B_{ijkl} \pi_{j,i} \cdot \pi_{l,k} + \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} \cdot e_{kl} + D_{ijkl} \pi_{j,i} \cdot e_{ke} + \\ + E_{ij} \pi_{j,i} \cdot \theta + F_{ij} e_{ij} \cdot \theta + \frac{1}{2} G \cdot \theta^2 \tag{3.3}$$

$e_{ij} = u_{i,j}$ — тензор инфинитезимальной деформации.

Если мы определим электрическую энтальпию H с

$$H = W^L (e_{ij}, \pi_i, \pi_{j,i}, \theta) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_{,i} \cdot \varphi_{,i} + \varphi_{,i} \pi_i \tag{3.4}$$

и введем, что

$$\xi_\alpha = \begin{cases} x_i & \alpha = i = 1,2,3 \\ t & \alpha = 4 \end{cases} \tag{3.5}$$

тогда плотность Лагранжиана

$$L = H - \frac{1}{2} \rho \; \dot{u}_i \dot{u}_i \tag{3.6}$$

т. е. (3.6) можно написать в форме

$$L = \frac{1}{2} A_{ij} \pi_i \cdot \pi_j + \frac{1}{2} B_{ijkl} \pi_{j,i} \cdot \pi_{l,k} + \frac{1}{3} C_{i\alpha k\beta} u_{i,\alpha} \cdot u_{k,\beta} + D_{ijkl} \pi_{i,j} e_{kl} + \\ + E_{ij} \pi_{j,i} \theta + F_{ij} e_{ij} \theta + \frac{1}{2} G \theta^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_{,i} \varphi_{,i} + \varphi_{,i} \pi_i \tag{3.7}$$

принимая ко вниманию (3.3), (3.4) и (3.5),

где

$$C_{i\alpha k\beta} = \begin{cases} C_{ijkl}, & \text{для } \alpha = j, \quad \beta = k \\ -\rho\,\delta_{ij}, & \text{длд } \alpha = \beta = 4 \\ 0 \quad , & \text{во всяком другом случае} \end{cases} \tag{3.8}$$

тогда можно показать что

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{i,\alpha}}\right)_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_j}\ \frac{\partial W^L}{\partial e_{ij}} - \rho\,\ddot{u}_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \pi_{j,i}} = \frac{\partial W^L}{\partial \pi_{j,i}} \quad \frac{\partial L}{\partial \pi_i} = \frac{\partial W^L}{\partial \pi_i} + \varphi_{,i}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Тогда уровненя (3.1) можно написать в форме

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_{i,\alpha}}\right)_{,\alpha} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \pi_j} - \left(\frac{\partial L}{\partial \pi_{j,i}}\right)_{,i} = 0 \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,i}}\right)_{,i} = 0 \tag{3.10}$$

учитывая, что

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Таким образом следует, что (3.10) представляют собой уровнения Эйлер--Лагранже.

Если L в (2.4) выбрано так, что

$$L(Y) = L(Z)$$

где

$$Z \equiv (u_{i,\alpha}, \pi_i, \pi_{i,j}, \varphi_{,i}, \theta)$$

тогда остается в силе теорема Нетера, а в соответствии с этим и закон консервации (2.8) в форме

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta}[L(\underset{\sim}{Z})\,\alpha_\beta + L,_{u_{i,\beta}}\,p_i + L,_{\pi_{i,\beta}}\,q_i + L,_{\varphi,\beta}\,r] + L,_\theta\,(\delta - \theta_{,\beta}\,\alpha_\beta) = 0 \tag{3.11}$$

где

$$u_i = \underset{1}{w_i} \quad \pi_i = \underset{2}{w_i} \quad \varphi = \underset{1}{\psi} \quad \beta_i = \underset{1}{\beta_i} \quad \gamma_i = \underset{2}{\beta_i} \quad p_i = \underset{1}{p_i} \quad q_i = \underset{2}{p_i} \quad \mu = \underset{1}{\gamma} \quad r = \underset{1}{q}$$

в случае термоупругого диалектика.

Конкретный вид закона консервации (3.11) зависит от существования соответствующих семей трансформаций (2.2) и их определение является нашей следующей задачей.

4. Инверсная теорема Нетера

Пусть материал термоупругого диэлектрика изотропный и пусть дан функционал

$$\mathfrak{L}(M) = \int_v L(\underset{\sim}{Z})\, d\,x\, d\,t \tag{4.1}$$

где L дано с (3.7) а $M = (\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\pi}, \varphi, \theta)$. Тогда L инфинитезимально инвариантно в M, под действием трансформаций (2.2), независящих от материальных свойств тела, а для любого M, удовлетворяющего (3.2) и любого V, если и только если

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a_i \\ \alpha_i &= a_4 \\ \beta_i &= \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \phi_k + b_i \\ \gamma_i &= 0 \\ \mu &= 0 \\ \delta &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где a_i, a_4, b_i c и ϕ_i произвольные реальные постоянные, а ε_{ijk} — тензор альтернации. Способ получения этих трансформации тоже самый как в работе [8] и поэтому здесь не приводятся.

5. Законы консервации

Общая форма закона консервации (3.11) в локальной форме имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\,\alpha_4 + L,u_{i,4}\,p_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(L\,\alpha_j + L,u_{i,j}\,p_i + L,\pi_{i,j}\,q_i + L,\varphi_{,i}\,r) +$$

$$+ L,_\theta(\delta - \theta_{,\beta}\,\alpha_\beta) = 0 \tag{5.1}$$

учитывая (3.5).

Из (3.3) и (3.6) видно, что

$$L,u_{i,j} = W^L_{,u_{i,j}} = T_{ij}, \quad L._{,u_{i,4}} = -\,\rho\,\dot{u}_i \quad L,_{\pi_{i,j}} = W^L_{,\pi_{i,j}} = E_{ij}$$

$$L,\varphi_{,i} = H,\varphi_{,i} = (-\,\varepsilon_0\,\varphi_{,i} + \pi_i) \tag{5.2}$$

На основании теоремы о расхождении и (5.2), закон консервации (5.1) можно написать в форме

$$\frac{d}{d\,t}\int_v (L\,\alpha_4 - \rho\,\dot{u}_i\,p_i)\,d\,v + \int_s [L\,\alpha_j + T_{ij}\cdot p_i + E_{ij}\,q_i +$$

$$+ (\pi_j - \varepsilon_0\,\varphi_{,j})\,r]\,n_j\,d\,s + \int_v L_{,\theta}\,(\delta - \theta_{,\beta}\,\alpha_\beta)\,d\,v = 0. \tag{5.3}$$

Из (4.2) видно что существуют пять независимых семей трансформаций, соответствующих произвольным значениям состоящим из пяти постоянных значений.

Таким образом количество независимых законов консервации определено числом упомянутых независимых постоянных; т. е:

I. если только $b_i \neq 0$

$$\frac{d}{d\,t}\int_v \rho\,\dot{u}_i\,d\,v + \int_s T_{ij}\,n_j\,d\,s = 0 \tag{5.4}$$

что представляет собой баланс количества движения.

II. если только $\phi_i \neq 0$

$$\frac{d}{d\,t}\int_v \rho\,\varepsilon_{ijk}\,x_j\,\dot{u}_k\,d\,v + \int_s \varepsilon_{ijk}\,x_j\,T_{ke}\,n_e\,d\,s = 0 \tag{5.5}$$

что представляет баланс момента количества движения.

III. если только $a_4 \neq 0$

$$\frac{d}{d\,t}\int_o \left(H + \frac{1}{2}\,\rho\,\dot{u}_i\cdot\dot{u}_i\right)d\,v - \int_s [T_{ij}\,\dot{u}_i + E_{ij}\,\dot{\pi}_i +$$

$$+ (\pi_j - \varepsilon_0\,\varphi_{,j})\,\dot{\varphi}]\,n_j\,d\,s - \int_v H_{,\theta}\,\dot{\theta}\,d\,v = 0. \tag{5.6}$$

Пусть $H = W - \theta\,S$, $H_{,\theta} = -\,S \quad - \theta\,\dot{S} = q_{k,k}$,

где

W — удельная энергия деформации и поляризаци

S — удельная энтропия

q_k — вектор теплового потока,

тогда (5.6) можно выразить в форме

$$\frac{d}{dt}\int\limits_v \left(W + \frac{1}{2}\rho\,\dot{u}_i\,\dot{u}_i\right) d\,v - \int\limits_s [T_{ij}\,\dot{u}_i + E_{ij}\,\dot{\pi}_i +$$

$$+ (\pi_j - \varepsilon_0\,\varphi_{,j})\,\dot{\varphi} - q_j]\,n_j\,d\,s = 0 \tag{5.7}$$

что и представляет закон баланса энергии.

IV. если $c \neq 0$

$$\int\limits_s (\pi_j - \varepsilon_0\,\varphi_{,j})\,n_j\,d\,s = 0 \tag{5.8}$$

что представляет закон баланса электрического поля.

V. если только $\theta_j \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_v \rho\,\dot{u}_i\,u_{i,k}\,d\,v - \int\limits_s [L\,\delta_{jk} - T_{ij}\cdot u_{i,k} + E_{ij}\,\pi_{i,k}$$

$$+ (\pi_j - \varepsilon_0\,\varphi_{,j})\,\varphi_{,k}]\,n_j\,d\,s + \int\limits_v L_{,\theta}\,\theta_{,k}\,d\,v = 0 \tag{5.9}$$

что представляет новый закон консервации в линейном термоупругом диэлектрике. Этот закон в какой-то мере представляет собой динамическую генерализацию соответствующего закона, при отсутствии температуры, полученого в работе [8].

Замешка. Эта работа часть исследования которые финансировал Объединение науки и культуры СР Сербий (СФРЮ).

LITERATURA

[1] Eshelby, J. D., Solid State Physics, V_0 3, (1965).
[2] Rice, J. R. Journal of Applied Mechannics 35, 2, (1968).
[3] Knowles, J. K. and Sternberg, E., Arch. Rat. Mech. Anal 44, (1972)
[4] Cherepanov, G. P. Journal of applied Mat. and Mech. 31, (1967).
[5] Fletcher, D. C. Arch. Rat. Mech. Anal, 60, (1976).
[6] Mindlin, R. D., Journal of Elasticity. V_0 2, 4, (1972)
[7] Chowdhury, K. H. and Glockner, P. G., Jnt. J. Solid Struc. V_0 13, (1980).
[8] Vukobrat, M., Jarić, J., Teorijska i primenjena MEHANIKA, 7, (1980).

CONSERVATION LAWS IN THERMO-ELASTIC DIELECTRICS

Summary

The application of Noetrs theorem as a method for obtaining the conservation law is considered in this paper. The property of invariation of the variation principles is used, i. e. the invariation of Lagrange in relation to the family of the infinitesimal transformations is used for obtaining the general form of the conservation law for scalar and vector fields.

For the concrete example the thermo-elastic dielectric is taken, and by using Noether's inversion theorem the corresponding families of transformations and in addition to therm the corresponding laws conservation are derived.

ZAKONI ODRŽANJA U TERMOELASTIČNOM DIELEKTRIKU

Izvod

U radu se razmatra primena Neterove teoreme kao metoda za dobijanje zakona konzervacije. Koristi se osobina invarijantnosti varijacionih principa odnosno invarijantnosti Lagranžijana u odnosu na familiju infinitezimalnih transformacija i izvodi opšti oblik zakona konzervacije za skalarna i vektorska polja.

Za konkretan primer se uzima termoelastični dijalektrik i koristeći inverznu Neterovu teoremu, izvode se odgovarajuće familije tranformacija i njima asociraju odgovarajući zakoni konzervacije.

Mirko Vukobrat
Saobraćajni fakultet
Vojvode Stepe 305
11000 Beograd