TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 10, pp. 153–158, 1984, UDK 531.

SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM DANS LA MECANIQUE CLASIQUE

V. Vujičić

(Recu le 7. novembre 1983)

Dans le travail [1] les principes variationnels de la mécanique et la théorie de contrôle ont été comparés. Le prncipe du maximum a été approché par la determination du minimum d'action au sens de Hamilton à l'aide de la fonction de Pontrygin. Cependant, l'espance prévu pour l'article et l'économie d'exposition orale n' ont pas permi la présentation d'une preuve stricte; quelques propositions n' ont pas été clarifiées.

A cette fin, sans restreindre la géneralité du raisonnement on cansidère le mouvement d' un système holonôme avec n degrés de liberté, dectrit par des équations de moumevent

$$\frac{d p_\alpha}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \quad \frac{d q^\alpha}{d t} = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

et leurs équations variationnelles de Poincaré

$$\frac{d \eta_\alpha}{d t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \, \partial q^\beta} \xi^\beta - \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \, \partial p_\beta} \eta_\beta \tag{2}$$

$$\frac{d \xi^\alpha}{d t} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \, \partial q^\beta} \xi^\beta - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \, \partial p_\beta} \eta_\beta$$

où $H = p_\alpha q^\alpha - L = H(p, q, t)$ est la function de Hamilton, $q^\alpha \in R_n$ sont les coordonnées généralisées de Lagrange indépendantes, $p_\alpha \in \Phi_{2n}$ sont les impulsions généralisées, $\eta_\alpha = \delta p_\alpha$, $\xi^\alpha = \delta q^\alpha$ sont les variations des variables p_α et q^α; les indices repetes designent la sommation.

Le mouvement est controlé par certaines forces généralisées de contôle $U_\alpha(q, u, t)$ dui dépendent des coordonnées $q = \{q^1, \ldots, q^n\}$ et du contrôle $u = \{u_1, \ldots, u^r\} \subset U \subset R_n$, i. e. durant le temps t de contrôle du mouvement régi par les équations différentielles du mouvement du système

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + U_\alpha, \quad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \tag{3}$$

Le problème consiste, à faire passer le système de l' état initial $A(t_0, q(t_0), p(t_0))$ à l' etat final $B(t_1 > t_0, q(t_1), p(t_1))$ de manière à minimiser l'action

$$S = \int_{t_0}^{t_1} p_\alpha \, d\, q^\alpha - H\, d\, t \tag{4}$$

par le contrôle optimal $u_0 = \text{optu}$.

Comme on voit, la condition nécessaire pour une trajectoire exstrèmale exsige que la seconde variation $\delta^2 S$ de l'increment de la fonctionnelle $\Delta S = \delta S + \frac{1}{2} \delta^2 S + \ldots$ soit positive. La première variation

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta p_\alpha \, d\, q^\alpha - d\, p_\nu \, \delta q_\alpha - \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} d\, q^\alpha \right) d\, t \tag{5}$$

en accord avec la notation de l'équation (2) prend la forme suivante

$$J = \delta S = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}^\alpha \eta_\alpha - \dot{p}_\alpha \xi^\alpha - \mathcal{H})\, d\, t$$

où il est évident que

$$\mathcal{H} \overset{def.}{=} \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \xi^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \eta_\alpha = \delta H. \tag{7}$$

Il s'ensuit clairement que la fonction $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, \xi, \eta, \cdot, t)$ dépend des variables de phase $q = \{q^1, \ldots, q^n\}$ et $p = \{p_1, \ldots, p_n\}$, de la perturbation $\xi = \{\xi^1, \ldots, \xi^n\}$ et $\eta = \{\eta_1, \ldots \eta_n\}$ et du temps t.

La deuxième variation de la fonctionnelle S est $\delta^2 S = \delta J$ plus exctement

$$\delta^2 S = \int_{t_0}^{t_1} \dot{q}^\alpha \delta \eta_\alpha - \dot{p}_\alpha \delta \xi^\alpha + \dot{\xi}^\alpha \delta p_\alpha - \dot{\eta}_\alpha \delta q^\alpha -$$

$$- \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\alpha} \delta \eta_\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^\alpha} \delta \xi^\alpha \Big) dt,$$

ou

$$\delta^2 S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{\xi}^\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha + \left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\alpha} \right) \delta \eta_\alpha - \right.$$

$$\left. - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^\alpha} \right) \delta \xi^\alpha - \left(\dot{\eta}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right] d\, t. \tag{8}$$

Comme les équations différentielles (1) et (2) sont équivalentes au système d'éqution différentielles

$$(9)\qquad \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\alpha}, & \dot{\xi}^\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^\alpha}, & \dot{\eta}_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha}, \end{cases}$$

la seconde variation de la fonctionelle S sera égale à zéro, i.e. $\delta^2 S = 0$. Ce qui démontre que toutes les tvajectoires qui definissent les équations différentielles (1) et (2) sont possibles et directement proches du mouvement réel. Cependent au cas où les équations différentielles du mouvement (1) sont perturbées par n'importe quel paramètre μ, la fonction $\mathcal{H}$ dépendra de ce paramètre $\mu \in R$, i. e.

$$(10)\qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, \xi, \eta, \mu, t).$$

La seconde variation $\delta^2 S$ doit être positive pour que l'action soit minimisée le long de la trajectoire extrèmale. En tenant compte des équations (9) on aura

$$\delta^2 S = \int_{t_0}^{t_1} (-1) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} \delta \mu \, d t \geqslant 0$$

ou

$$(11)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} \delta \mu \, d t \leqslant 0.$$

Cette condition (11) indique que

$$(12)\qquad \mathcal{H}(q, p, \xi, \eta, \mu, t) \leqslant \mathcal{H}(q, p, \xi, \eta, \mu_0, t).$$

Dans la théorie du cootrôle l'inéqualité (12) est plus souvent noteé de la manière suivante

$$(13)\qquad \mathcal{H}(p, q, \xi, \eta, \mu_0, t) = \max_{\mu \in M} \mathcal{H}$$

La condition qui garantit le minimum de S, en accord avec (5),

$$(14)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right] d t \geqslant 0$$

est satisfaite pour l'équation (1). Pour les équations (3), elle se réduit à

$$\int_{t_0}^{t_1} U_\alpha \, \delta q^\alpha \, dt \leqslant 0. \tag{15}$$

La somme de (15) et (5) donne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{q}^\alpha \eta_\alpha - \dot{p}_\alpha \xi^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha - U_\alpha \delta q^\alpha \right) dt,$$

ou

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}^\alpha \eta_\alpha - \hat{p}_\alpha \xi^\alpha - \mathcal{H}) \, dt \tag{16}$$

où il est évident que

$$\mathcal{H} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \eta_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \xi^\alpha + U_\alpha \xi^\alpha = \mathcal{H}(p, q, \eta, \xi, u, t). \tag{17}$$

La condition nécessaire à la minimisation de la fonctionnelle (16) est

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{t_0}^{t_1} \bigg\{ &\left(\dot{\xi}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right) \delta p_\alpha + \left(\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial \eta_\alpha}\right) \delta \eta_\alpha - \\ &- \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \xi^\alpha}\right) \delta \xi^\alpha - \left(\dot{\eta}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\right) \delta q^\alpha - \\ &- \frac{\partial H}{\partial u^\alpha} \delta u^\alpha \bigg\} \, dt \geqslant 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Etant donné que les équations différentielles (3) et les équations de perturbations correspondantes pevent dans ce cas aussi être écrites dans la forme (9), il s'eusuit que

$$- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\alpha} \delta u^\alpha \, dt \geqslant 0$$

ou

$$\mathcal{H}(p, q, \xi, \eta, u_0, t) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(p, q, \xi, \eta, u, t).$$

Il est évident que le fonction $\mathcal{H}$ dans (17) ou (10) ainsi que (7) n'est pas une fonction de Hamilton $H = (p_\alpha \dot{q}^\alpha - L)_{\dot{q} = \dot{q}(p)}$ en dépit de leur forme habituelle.

Considérons le mouvement du même système dans un espace d'Euclide E_{3N} approprié contenant des liaisons $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ Notamment le mouvement du système de N points matériels dans un champ de forces potentielles subissant k lieus holônomes de forme (20) peut être décrit par $6N$ équations différentielles

$$\dot{x}^i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} + X_i(x, u, t)$$

et $k \leqslant 3N$ equations de lieus holonômes

$$f_\mu(x^1, \ldots, x^{3N}) = 0 \tag{20}$$

où $x = (\overset{1}{x_1}, \overset{2}{x_1}, \overset{3}{x_1}, \overset{1}{x_2}, \ldots, \overset{1}{x_N}, \overset{2}{x_N}, \overset{3}{x_N}\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^{3N}\}$ représent N triplets de coordonnées curvilinéaires [2] multuellement dépendantes à cause de k liasons (20).

L'action selon Hamilton (4) est décrite maintenant par la forme suivante

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (p_i \dot{x}^i - H + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu(t) f_\mu)\, dt$$

qui atteint le minimum au cas où

$$\int_{t_0}^{t_1} X_i(x, u, t)\, \delta x^i\, dt \leqslant 0.$$

En répétant le procédé suivi à partir de (14) jusqu' à (16), on obtient

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}^i \eta_i - \dot{p}_i \xi^i - \mathcal{H})\, dt \tag{21}$$

où nous avons maintenant

$$\mathcal{H} = \frac{\partial H}{\partial x^i} \xi^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \eta_i - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu(t) \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} \xi^i - X_i(x, u, t)\, \xi^i,$$

avec $\xi^i = \delta x^i$ et $\eta_i = \delta p_i$. Par conséquent la variation de la fonctionnelle (21), en accord avec les écuations différentielles de mouvement (19) et leurs variations mènent à la conclusion que

$$\mathcal{H}(x, \xi, p, \eta, \lambda, u_0, t) = \max_{u \in U} \mathcal{H}$$

ce qu'il falait démontrer.

L I T T E R A T U R E

[1] Vujičić, V., *Klasična mehanika i teorija upravljanja kretanjem*, 14. jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, K—5, 43—58, (1978).

[2] Vujičić, V., *Kovarijantna dinamika*, Beograd, Mat. inst. (1981).

THE MAXIMUM PRINCIPLE IN CLASSICAL MECHANICS

Summary

The minimum of the Hamilton's action (4) is evaluated by means of the function (7). The generating function $\mathcal{H}$ has the form (17) when the control forces U_i act on a mechanical system. Differential equations of motion and the corresponding differential equations of perturbation, coupled together in an n-dimensional configurational space are (9). Although these differential equations (9) have the form of Hamilton's cannonical diferential equations (1), they are diferent, due to the fact that they include also the equations (3) or the equations (19) and their variational equations.

As the function $\mathcal{H}$ depends on the parameters of control u_k, the proof is given that the action (4) attains a minimum on the exstremal trajectory if the function $\mathcal{H}$ takes maxsimal values for the optimal values of the control of the motion.

PRINCIP MAKSIMUMU U KLASIČNOJ MEHANICI

Izvod

Uslov minimuma Hamiltonovog dejstva (4) određuje se pomoću funkcije (7). Pri dejstvu sila upravljanja U na mehanički sistem, generatorna funkcija $\mathcal{H}$ ima oblik (17), a diferencijalne jednačine kretanja i njihove diferencijalne jednačine poremećaja zajedno u spregnutom obliku u n—dimenzionnm konfiguracionom prostoru su (9). I ako ove diferencijalne jednačine (9) imaju formu Hamiltonovih kanonskih diferencijalnih jednačina (1), one se razlikuju od nih, jer u sebi sadrže i jednačine (3) ili jednačine (19) i njihove varijacione jednačine.

S obzirom da funkcija $\mathcal{H}$ zavisi od parametara upravljanja u_k dokazano je da na ekstremalnoj trajektoviji dejstvo (4) dostiže minimum ako funkcija $\mathcal{H}$ za optimalne vrednosti upravljanja kretanjem dostiže najveću vrednost.

Ukoliko se isto kretanje sistema (19) posmatra u $3N$ dimenzionom euklidskom prostoru pri dejstvu k holonomnih veza (20) generatorna funkcija $\mathcal{H}$ sadrži i reakcije veza.

V. Vujičić
Institut za mehaniku
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd, Studenski trg 16