TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 10, pp. 139–152, 1984, UDK 531.133.1

ФОРМУЛЫ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СВЯЗИ С ИЗМЕНЕННЫМ ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕКТОРА КОНЕЧНОГО ПОВОРОТА

Я. Татаринов

(Поступило 26 октября 1983)

1. Предисловие.

Эта заметка представляет собой попытку привязать к приложениям общий инвариантный подход к динамке твердого тела [1] и поэтому существенно опирается на матричный язык. Обычно, если имеется поворот вокруг единичного вектора i на угол χ, в качестве вектора конечного поворота принято использовать вектор Родрига $\theta = 2\operatorname{tg}\dfrac{\chi}{2}\, i$ (см. например, [2]). Ниже предагается использовать другой, неединственный вектор, а именно $\xi = \chi\, i$. Содержание работы таково:

в первом параграфе даются формулы для вычисления инвариатного вектора и угла поворота в первую очередь через диагональные элементы матрицы поворота и обратно;

во втором собраны некоторые вспомогательные утверждения;

в третьем выводятся формулы для вычисления угловой скорости через вектор поворота и его производную;

в четвертом — обратные формулы, позволяющие выразить производные вектора поворота с помощью его самого и вектора угловой скорости.

Полученные выражения более громоздки, чем аналогичные, использующие общепринятый вектор Родрига. Однако, по мнению автора, они обладают следующим преимуществом: вектор поворота ξ определен всегда, тогда как вектор θ уходит в бесконечность при $\chi \to \pi + 2\pi k$. Предлагаемые в статье формулы (из §§ 3,4) вырождаются при $\chi \to 2\pi k$, $k \neq 0$, но, к счестью, любое положение тела изображается вектором из шара $|\xi| \leqslant \pi$ (двумя векторами при $\chi = \pm\pi$). Если при численном интегрировани вектор ξ покинул шар, то нужно будет лишь в удобный момент после этого заменить этот вектор на вектор $(\chi - 2\pi)\, i$. Выражение матрицы поворота через вектор ξ просто, и автор надеется, что использование приложенных формул для нужд численного интегрирования будет не менее удобно, чдм, например, параметров типа Кэли-Клейна.

2. Некоторые свойства ортогональных преобразований

Пусть наряду с ортонормированым правым репером e_x, e_y, e_z имеем еще один такой же, новый: e_u, e_v, e_w. Будем пользоваться матрицей перехода X, в которой по столбцам стоят координаты новых базисных векторов о исходном базисе. Матрица X ортогональна: $X^{-1} = X^*$ (обратная равна транспонированной) и определитель ее положителен (равен $+ I$). Применение ортогональных матриц имеет место в двух случаях (термин ,,преобразование`` соответственно двуемыслен):

1) замена координат: если есть разложения

$$a = a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z = a_u e_u + a_v e_v + a_w e_w$$

по старому и новому реперам, то

$$\begin{pmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

2) поворот: если новый базис получился в результате поворота всего пространства как твердого тела, то образ a' вектсра $a = a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z$ при этом повороте в исходном базисе имеет компонднты

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Замечание

Если сделать замену координат с матрицей Y, то в новом репере матрица того же поворота будет $Y^{-1} X Y$.

Каждый поворот П в некотором репере i, j, k имеет матрицу стандартного вида

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & -\sin\chi \\ 0 & \sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix}$$

Здесь i — инвариантный вектор поворота (в общем случае единственный с точностью до замены направления на противоположное), χ — угол поворота (отсчитывается против часовой стрелкм, глядя на i). При $\chi = 2\pi k$ имеем $X = E$. Легко видеть, что собственные значения ортогональной матрицы X суть

$$1,\ \cos\chi + i\sin\chi,\ \cos\chi - i\sin\chi$$

откуда характеристический многочлен ее имеет вид

$$-\lambda^3 + (1 + 2\cos\chi)\lambda^2 - (1 + 2\cos\chi)\lambda + 1$$

так что след матрицы X (сумма диагональных элементов, или коэффициент при λ^2) есть $S = tr\, X = 1 + 2\cos\chi$, откуда $-1 \leqslant S \leqslant 3$. Выпишем матрицу X полносью:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$S = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3$$

$$\cos\chi = \frac{S-1}{2}.$$

Перейдем к вычислению собственного вектора i. Его компоненты i_x, i_y, i_z определяются из системы

$$(X - E)\, i = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 - 1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} = 0$$

Теорема I. A.

Если нужние две строки матрицы линейно независимы, то i коллинеарен ненулевому вектору

$$\begin{pmatrix} 1 - S + 2\alpha_1 \\ \alpha_2 + \beta_1 \\ \alpha_3 + \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 + 1 \\ \alpha_2 + \beta_1 \\ \alpha_3 + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Б. Нижние две строки матрици $X - E$ линейно зависимы только тогда, когда $\alpha_1 = \dfrac{S-1}{2} = \cos\chi$.

В. Если $X \neq E$, то инвариантный вектор

$$i = \frac{1}{\sqrt{3-S}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1 + 2\alpha_1 - S} \\ \pm\sqrt{1 + 2\beta_1 - S} \\ \pm\sqrt{1 + 2\gamma_1 - S} \end{pmatrix}$$

где распределение знаков в разных случаях может быть разным (в общем случае можно взят соответственно $Sgn(\beta_3 + \gamma_2)$, $Sgn(\gamma_1 + \alpha_3)$, $Sgn(\alpha_2 + \beta_1)$.

Доказательство:

Мы будем опираться на то, что у ортогональной матрицы каждый элемент равен своему алгебраическому дополнению, или, что то же самое, каждый столбец (строка) совпадает с векторным произведением остальных в круговом порядке. Например,

$$\alpha_1 = \beta_2\,\gamma_3 - \gamma_2\,\beta_3,\ \alpha_2 = \gamma_1\,\beta_3 - \beta_1\,\gamma_3,\ \alpha_3 = \beta_1\,\gamma_2 - \gamma_1\,\beta_2$$

и так далее. Что касается линейной системы третьего порядка, то в качестве ее нетривиального решения, очевидно, можно взять векторное произведение двух линейно независимых строк матрицы коэффициентов. В нашем случае будем иметь

$$i' = \begin{pmatrix} (\beta_2 - 1)\ (\gamma_3 - 1) - \gamma_2\,\beta_3 \\ \gamma_1\,\beta_3 - \beta_1\,(\gamma_3 - 1) \\ -\beta_1\,(\gamma_3 - 1) + \gamma_3\,\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 + 1 \\ \alpha_2 + \beta_1 \\ \alpha_3 + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

что и требовалось. Если строки линейно зависимы, то в частности, первая компонента вектора i' будет равна нулю. Все пары строк линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \cos\chi = 1$, то есть $X = E$. вычислим теперь модуль вектора i'.

Имеем

$$|i'|^2 = (1 + 2\,\alpha_1 - S)^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2 + (\gamma_1 + \alpha_3)^2 =$$

$$= (1 - S)^2 + 4\,\alpha_1\,(1-s) + 4\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \alpha_3^2 + 2\,\alpha_2\,\beta_1 + 2\,\gamma_1\,\alpha_3 =$$

$$= \underline{3 - 2\,S + S^2 + 4\,\alpha_1 - 4\,\alpha_1\,S} + 2\,\alpha_1^2 + 2\,\alpha_2\,\beta_1 + 2\,\gamma_1\,\alpha_3 =$$

$$= \underline{ibid} + 2\,\alpha_1\,(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + 2\,(\alpha_2\,\beta_1 - \beta_2\,\alpha_1 + \alpha_3\,\gamma_1 - \gamma_3\,\alpha_1) =$$

$$= \underline{ibid} + 2\,\alpha_1\,S - 2\,\gamma_3 - 2\,\beta_3 =$$

$$= \underline{ibid} + 2\,\alpha_1\,S - 2\,S + 2\,\alpha_1 =$$

$$= 3 - 4\,S + S^2 + 6\,\alpha_1 - 2\,\alpha_1\,S = (3 - S)\ (1 + 2\,\alpha_1 - S) \geqslant 0$$

В силу сказанного выше $S \leqslant 3$, так что $1 + 2\,\alpha_1 - S \geqslant \alpha$ или, что более наглядо, $\alpha_1 \geqslant \cos\chi$). Следовательно, первая координата единичного инвариантного вектора равна (нормируем i')

$$i_x = \pm\,\frac{\sqrt{1 + 2\,\alpha_1 - S}}{\sqrt{3 - S}}.$$

То же касается и остальных. Теорема доказана.

Добавление.

Сейчас мы получим возможность выразить все элементы матрицы через диагональные. Положим

$$\alpha = 1 + 2\alpha_1 - S,\ \beta = 1 + 2\beta_2 - S,\ \gamma = 1 + 2\gamma_3 - S,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 - S$$

Выражая i_y двумя способами и учитывая, что $\alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2 - \gamma_3$, имеем

$$\alpha_2 + \beta_1 = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\alpha_2 - \beta_1 = \pm\sqrt{\gamma(1+S)}$$

причем $1 + S \geqslant 0$ всегда. Аналогично и для других пар элементов, симметричных относительно диагонали.

Замечание об угловой скорости.

Для удобства несколько напоминаний. Пусть есть семейство поворотов $\Pi(t)$ с матрицей перехода $X(t)$ от некоторого неподвижного базиса e_x, e_y, e_z к подвижному e_u, e_v, e_w. Продифференцировав тождества $X^*X = XX^* = E$, легко установить, что матрицы $\widetilde{\Omega} = X^{-1}\dot{X}$ и $\overline{\Omega} = XX^{-1}$ кососимметричны. Мы говорим что набор $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ соответствует кососимметричной матрице Ω (и пишем $\omega \longleftrightarrow \Omega$), если

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Лемма 1.

Отношение $\omega \longleftrightarrow \Omega$ справедливо тогда и только тогда, когда для любого $a = (a_1, a_2, a_3)$ имеет место

$$\Omega a = [\omega \times a]$$

Лемма 2.

Если Y — ортогональная матрица, и $\omega \longleftrightarrow \Omega$, то $Y\omega \longleftrightarrow Y\Omega Y^{-1}$.

Лемма 3.

Пусть $[\Omega_1,\ \Omega_2] = \Omega_1\Omega_2 - \Omega_2\Omega_1$ — комутанты кососимметричных матриц.

Тогда

$$[\omega_1 \times \omega_2] \longleftrightarrow [\Omega_1, \ \Omega_2]$$

где $\omega_i \longleftrightarrow \Omega_i$.

При ващении $\Pi(t)$ вектор угловой скорости по определению есть

$$\omega = \widetilde{\omega}_1 e_u + \widetilde{\omega}_2 e_v \widetilde{\omega}_3 e_w = \bar{\omega}_1 e_x + \bar{\omega}_2 e_y + \bar{\omega}_3 e_z$$

где

$$\widetilde{\omega} = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1 \\ \widetilde{\omega}_2 \\ \widetilde{\omega}_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \widetilde{\Omega}, \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \\ \bar{\omega}_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \bar{\Omega}$$

Экспонента кососимметричной матрицы.

Если A — квадратная матрица, то ее экспонента

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$$

(ряд сходится абсолютно по норме $||A|| = \sqrt{\Sigma \ a_{ij}^2}$). Нам потребуется, что

$$(e^A)^* = e^{A*},$$

$$e^{A+B} = e^A e^B, \quad \text{если} \quad A B = B A.$$

$$(e^A)^{-1} = e^{-A},$$

$$e^{Y-1 \, AY} = Y^{-1} e^A \, Y,$$

$$\frac{d}{ds} e^{As} = A \, e^{As}.$$

Легко проверить, что если Ξ — кососимметричная, то $X = e^{\Xi}$ — ортогоналная матрица.

Вектором поворота назовем вектор $\xi = \chi \, i$ (разумеется, $\chi \bmod 2\pi$) Он имеет одинаковые компоненты $\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3$ как в исходном базисе e_x, e_y, e_z, и в преосразованном: $e_u = \Pi \, e_x, \ e_v = \Pi \, e_y, \ e_w = \Pi \, e_z$.

Лемма 4.

Если $\xi \longleftrightarrow \Xi$, то матрица поворта

$$X = e^{\Xi}$$

Для доказательства нало перейти в собственный репер, в котором $X = P$.

Разумеется, вычислять e^{Ξ} с помощью ряда не следует. Как известно, если есть поворот на угол χ вокруг вектора i, то всякий вектор a переходит в вектор $a' = \Pi\, a$. которыь равен

$$(a, i)\, i + (a - (a, i)\, i) \cos\chi + [i \times (a - (a, i)\, i)] \sin\chi =$$

$$= a + (1 - \cos\chi)\, ((a, i)\, i - a) + \sin\chi\, [i \times a],$$

откуда, поскольку $|\xi| = |\chi|$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\xi}{|\xi|} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1 - \cos|\xi|}{|\xi|^2} \begin{pmatrix} -\xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1\, \xi_2 & \xi_1\, \xi_3 \\ \xi_2\, \xi_1 & -\xi_3^2 - \xi_1^2 & \xi_2\, \xi_3 \\ \xi_3\, \xi_1 & \xi_3\, \xi_2 & -\xi_1^2\, \xi_2^2 \end{pmatrix}$$

Подчеркнем, что здесь и ниже функции, стоящие в качестве множителей, несмотря на запись, содержащую модуль, являются аналитическими с устранимой особенностью в нуле. А именно,

$$\frac{1 - \cos|\xi|}{|\xi|^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)}{(2\,m + 2)!}, \quad \frac{\sin|\xi|}{|\xi|} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\,\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)^m}{(2\,m + 1)!}$$

так что возвращаясь снова к ряду, легко увидеть, чему равны Ξ^{2m+2} и Ξ^{2m+1} соответственно.

Теорема I. Г.

Если $\chi \neq \pi\, k$, то

$$i = \frac{1}{2\sin\chi} \begin{pmatrix} \gamma_2 - \beta_3 \\ \alpha_3 - \gamma_1 \\ \beta_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

иначе говоря,

$$\xi \longleftrightarrow \frac{\chi}{2\sin\chi}\,(X - X^*)$$

Доказательство следует из разложеня e^{Ξ} в ряд.

3, Вспомагательиые утвержения.

Предложение I.

Пусть даны два вектора b, $b \in R^3$. Положим индуктивно $b^0 = b$, $b_{n+1} = [a \times b_n]$. Тогда

$$b_n = \begin{cases} (-a^2)^k [a \times b], & n = 2k+1 \\ (-a^2)^k [a \times [a \times b]], & n = 2k+2 \end{cases}$$

Предложение II.

Пусть $C_k^l = \dfrac{k!}{l!\,(k-l)!}$ — биноминальные коэффициенты. Тогда

а) $C_k^{l-1} = C_k^l = C_{k+1}^l$

б) $\sum\limits_{k=l}^{n} C_k^l = C_{n+1}^{l+1}$.

Утверждение а) общеизвестно. Что касается б), то будем исходить из

$$(1+x)^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l\, x^l$$

Поэтому

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} C_k^l\, x^l =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \Big(\sum_{k=l}^{n} C_k^l\Big)\, x^e$$

С другой стороны,

$$f(x) = \frac{1-(1+x)^{n+1}}{1-(1+x)} = \sum_{m=1}^{n+1} C_{n+0}^m\, x^{m-1} = \sum_{l=0}^{n} C_{n+1}^{l+1}\, x^l,$$

откуда и следует требуемое.

Предложение 3.

Пусть A, B — квадратные матрицы, $[A,\ B] = A\,B - B\,A$ — их коммутант. Положим индуктивно $B_0 = B$, $B_{n+1} = [A,\ B_n]$. Тогда

$$A^k\, B = \sum_{l=0}^{k} C_k^l\, B_l\, A^{k-l}.$$

При $k = 0{,}1$ доказывать нечего. Далее,

$$A^{k+1}\, B = A\, A^k\, B = \sum_{l=0}^{k} C_k^l\, A\, B_e\, A^{k-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l B_{e+1} A^{k-l} + \sum_{l=0}^{k} C_k^l B_e A^{k-l+1} =$$

$$= \sum_{l=1}^{k+1} C_k^{l-1} B_e A^{k+1-l} + \sum_{l=0}^{k} C_k^l B_e A^{k+1-l} =$$

$$= B A^{k+1} + \sum_{l=1}^{k} [C_k^{l-1} + C_k^l) B_e A^{k+1-l} B_{k+1} =$$

$$= \sum_{l=0}^{k+1} C_{k+1}^l B_e A^{k+1-l},$$

с учетом предложения 2а.

Лимма 5.

Пусть $A(t)$ — переменная матрица.

Тогда

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A e}{(l+1)!} \right) e^A.$$

Доказательство

Продифференцируем матричный ряд (который сходится абсоютно по норме $||A|| = \sqrt{\Sigma a_{ij}^2}$ и после дифференцирования)

$$\frac{d}{dt} e^A = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\dot{A} A^{n-1} A \dot{A} A^{n-2} + ,,, + A^{n-1} \dot{A}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} (A^k \dot{A} A^{n-k}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \dot{A}_l A^{n-l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{n} (\sum_{k=l}^{n} C_k^l) \dot{A} A^{n-l} =$$

(используется предложение 2б)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{n} C_{n+1}^{l+1} \dot{A}_e A^{n-l} = \sum_{l=0}^{\infty} \dot{A}_l \sum_{n=l}^{\infty} \frac{A^{n-l}}{(l+1)!\,(n-l)!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\dot{A}_l}{(l+1)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^P}{P!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\dot{A}}{(l+1)!} \right) e^A$$

Что и было обещано.

4. Выражение угловой скорости через вектор поворота и его производную.

Теорема 2. А.

Елси матрица поворота

$$X(t) = e^{\Xi(t)}$$

и кососимметричная матрица

$$\Xi(t) \longleftrightarrow \xi(t)$$

то угловая скорость в проекциях на неподвижные оси, считая, что $\chi = |\xi| \geqslant 0$, равна

$$\bar{\omega} = \dot{\xi} + \frac{1-\cos\chi}{\chi^2}[\xi \times \dot{\xi}] + \frac{\chi - \sin\chi}{\chi^3}[\xi \times [\xi \times \dot{\xi}]]$$

Отсюда $\bar{\omega} = \dot{\xi} = (\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)$ тогда и только тогда $[\xi \times \dot{\xi}] = 0$.

Доказательство.

Специфика вращений состоит в том, что и матрица $\Xi(t)$, и матрица $\dot{\Xi}(t)$ являются кососимметричными, а поскольку все происходит в трехмерном пространстве, им сответствуют векторы. Итак если $\Xi \longleftrightarrow \xi$. то $\dot{\Xi}_e \longleftrightarrow \dot{\xi}_e$ по лемме 3, и в силу предложения 1.

$$\dot{\Xi}_l = \begin{cases} (-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)^m \, \dot{\Xi}_1, & l = 2m+1 \\ (-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)^m \, \dot{\Xi}_2, & l = 2m+2 \end{cases}$$

$$\dot{\Xi}_1 = [\Xi, \dot{\Xi}] \longleftrightarrow [\xi \times \dot{\xi}], \; \dot{\Xi}_2 = [\Xi, \dot{\Xi}_1] \longleftrightarrow [\xi \times [\xi \times \dot{\xi}]].$$

Поэтому ряд

$$\dot{X}X^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\dot{\Xi}_l}{(l+1)!} = \dot{\Xi} + \dot{\Xi}_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\chi^2)^m}{(2m+2)!} + \dot{\Xi}_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\chi^2)^m}{(2m+3);} =$$

$$= \dot{\Xi} + \frac{1}{\chi^2}\left(-\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\chi)^{2m+2}}{(2m+2)!}\right)\dot{\Xi}_1 + \frac{1}{\chi^3}\left(-\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi(i\chi)^{2m+2}}{(2m+3)!}\right)\dot{\Xi}^2 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \bar{\omega} = \dot{\xi} + \frac{1-\cos\chi}{\chi^2}[\xi \times \dot{\xi}] + \frac{\chi - \sin\chi}{x^3}[\xi \times [\xi \times \dot{\xi}]]$$

Теорема 2. Б.

Аналогично в подвижных осях:

$$\tilde{\omega} = \dot{\xi} + \frac{\cos\chi - 1}{\chi^2}[\xi \times \dot{\xi}] + \frac{\chi - \sin\chi}{\chi^3}[\xi \times [\xi \times \dot{\xi}]].$$

Следствия:

Поскольку $\xi = \chi i$, имеем $\dot{\xi} = \frac{d\chi}{dt} i + \chi \frac{di}{dt}$.

Отсюда имеем

$$\bar{\omega} = \frac{d\chi}{dt} i + \sin\chi \frac{di}{dt} + (1 - \cos\chi)\left[i \times \frac{di}{dt}\right]$$

$$\tilde{\omega} = \frac{d\chi}{dt} i + \sin\chi \frac{di}{dt} + (\cos\chi - 1)\left[i \times \frac{di}{dt}\right]$$

5. Выражение производной вектора поворота через угловую скорость.

Теорема 3.

В подвижных осях

$$\dot{\xi} = \frac{1 - \frac{\chi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}}{\chi^2}(\xi\tilde{\omega})\xi + \frac{\chi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\xi \times \tilde{\omega}]$$

что представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме для $\xi(t)$, если $\tilde{\omega}$ задана в виде $\tilde{\omega}(\xi, t)$. Эту же систему можно присоединить к динамическим уравнениям Эйлера, считая, что проекции момента активных сил на подвижные оси заданы в виде функций $\tilde{\omega}$, ξ, t, и тогда получится замкнутая система дифференциальных уравнений шестого порядка.

В неподвижных осях аналогично

$$\dot{\xi} = \frac{1 - \frac{\chi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}}{\chi^2}(\xi, \bar{\omega})\xi + \frac{\chi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}\bar{\omega} - \frac{1}{2}[\xi \times \bar{\omega}].$$

Доказательство:

Векторные равенства теорем 2 A и 2 B имеют вид

$$r = b + \mu [a \times b] + \nu [a \times [a \times b]]$$

Покажем что из этого вытекает равенство вида

$$b = \rho (a, r) a + \sigma r + \tau [a \times r],$$

и определим коэффициенты. Оставим пока в стороне особые случаи, когда векторы в разложении r линейно зависимы, то-есть $[a \times b] = 0$, а так же когда r не зависит от b, то-есть $\mu = 1 - \nu a^2 = 0$. Подставим первое равенство во второе и приравняем коэффициенты при a, b $[a \times b]$ (эти векторы также линейно независимы); получим линейную систему

$$\mu \sigma + (1 - \nu a^2) \tau = 0$$

$$(1 - \nu a^2) \sigma - \mu a^2 \tau = 1$$

$$\rho + \nu \sigma + \mu \tau = 0$$

решение которой ость

$$\tau = - \frac{\mu}{\mu^2 a^2 + (1 - \nu a^2)}, \ \sigma = \frac{1 - \nu a^2}{\mu^2 a^2 + (1 - \nu a^2)^2}, \ \rho = - \nu \sigma - \mu \tau.$$

В ситуации из теорем 2 A и 2 B имеем

$$a = \xi, \quad b = \dot{\xi}, \quad r = \omega,$$

$$\mu = \pm \frac{1 - \cos \chi}{\chi^2}, \quad \nu = \frac{\chi - \sin \chi}{\chi^3}$$

так что

$$\mu^2 a^2 = \frac{(1 - \cos \chi)^2}{\chi^2}, \quad 1 - \nu a^2 = \frac{\sin \chi}{\chi},$$

$$\tau = \pm \frac{1}{2}, \ \sigma = \frac{\chi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}, \quad \rho = \frac{1}{\chi^2} \left(1 - \frac{\chi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}\right)$$

Рассмотрев отдельно осоаые случаи, нетрудно убедиться, что получаются частные варианты доказываемых формул.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Татаринов, Я. В. *Глобальный взгляд на динамику твердого тела.* „Вестник Моск. унивеp", Матем., Механ., № 4, 101—109, (1978).

[2] Лурье, А. И., *Аналитическая механика.* Физматгиз, Москва, (1961).

FORMULES DE CINEMATIQUE D'UN SOLIDE BASEES SUR UNE DEFINITION NOUVELLE DU VECTEUR DE ROTATION FINIE

Résumé

On introduit trois paramétres qui sont les composantes rectangulaires 0u vecteur unitaire de l'axe de rotation multipliées par l'angle de rotation. Ces paramétres sont multivoques, mais permettent de déterminer toutes les positions du solide sans aucune singularité analytique. On propose des formules explicites pour les composantes de la vitesse angulaire, les éléments de la matrice de rotation, etc.

KINEMATIČKE FORMULE KRUTOG TELA U VEZI S IZMENJENIM ODREĐIVANJEM VEKTORA KONAČNE ROTACIJE

I z v o d

Predloženo je da se položaj krutog tela određuje pomoću mnogoznačnih parametara (koordinata nekog vektora), čija zavisnost od položaja nema analitičkih osobina (zavisnost sistema tri jednoznačna parametra mora imati osobine u obliku složne topološke gradnje višestrukosti položaja krutog tela). To omogućava da se Ojlerovim jednačinama dinamike pridruže tri kinematičke relacije, čime se dobija zatvoren sistem od šest diferencijalnih jednačina za određivanje položaja krutog tela u zavisnosti od vremena.

Я. В. Татаринов
МГУ Механико-математический факультет
117234 Москва, СССР