

TEMPERATURGRENZSCHICHT AN PORÖSEN WÄRMEUNDURCHLÄSSIGEN WÄNDEN BEI LAMINARER UMSTRÖMUNG

V. Saljnikov, S. Tupurkovska-Poposka

(Eingegangen am 2. Januar 1983)

Man untersucht die Temperaturgrenzschicht bei ebener laminarer und inkompressibler Umströmung einer wärmeundurchlässigen Wand mit kontinuierlich verteilten Poren, durch welche die Flüssigkeit entweder abgesaugt, oder eingeblasen wird.

Die Ausgangsgleichungen für dieses Thermometerproblem an porösen Wänden lauten

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

mit entsprechenden Randbedingungen

$$y = 0: \quad u = 0; \quad v = v_0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

$$y = \infty: \quad u = U, \quad T = T_\infty.$$

Hier bedeutet, wie üblich:

x, y — längs der Wand bzw. quer zur Wand gemessene Koordinaten,
 u, v — entsprechende Geschwindigkeitskomponenten in der Grenzschicht,
 $U(x)$ — Geschwindigkeitsverteilung äusserer längs der Wand gerichteten potentiellen Strömung,

- v_0 — Geschwindigkeitsverteilung der quer zur Wand gerichteten Absaugenströmung ($v_0 < 0$), bzw. Einblasenströmung ($v_0 > 0$),
 ν — kinematische Zähigkeit,
 Pr — Prandtl'sche Zahl,
 c — spezifische Wärme,
 T — Flüssigkeitstemperatur in Grenzschicht und
 T_∞ — Flüssigkeitstemperatur ausser Grenzschicht.

Für die weiteren Betrachtungen führt man, wie bekannt [3], mittels folgender linearen Beziehung

$$\psi(x, y) = \psi_0(x) + \psi^*(x, y) \quad (5)$$

die neue Stromfunktion $\psi^*(x, y)$ ein, wobei $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$ stellt den Wert der üblichen Stromfunktion $\psi(x, y)$ an der Wand dar. Demgemäss wird einerseits die Funktion ψ^* an der Wand, wie folgt, festgelegt:

$$\psi^*(x, 0) = 0,$$

und andererseits wird die Geschwindigkeit v_0 durch die Funktion ψ_0 , folgendermassen

$$v_0 = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 = - \psi'_0, \quad (7)$$

ausgedrückt.

Vermittels der üblichen Beziehungen

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8)$$

als auch der Ausdrücke (5), (6), (7), lassen sich nun die Ausgangsgleichungen (1), (2) (3), (4) in folgender Form darstellen:

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} - \psi'_0 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \psi'_0 \right) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \right)^2; \quad (10)$$

$$y = 0: \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$y = \infty: \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = U(x), \quad T = T_\infty; \quad (11)$$

$$x = x_0: \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = u_0(y).$$

Als Lösungsverfahren für das Gleichungssystem (9), (10), (11) verwendet man die von LOITSIANSKI [1] entwickelte und unsererseits in der Arbeit [2] vervollkommnete mehrparametrische Methode. In diese Gleichungen, nämlich, werden zunächst die Transformationen:

$$x = x, \quad y = \eta U^{-b_0/2} (a_0 \nu \int_0^x U^{b_0-1} dx)^{1/2},$$

$$\psi^* = U^{1-\frac{b_0}{2}} (a_0 \nu \int_0^x U^{b_0-1} dx)^{1/2} \Phi(x, \eta), \quad (12)$$

$$T = T_\infty + \frac{U^2}{2c} K(x, \eta, Pr).$$

eingeführt. Anschließend werden die Formparameter der in [1] und [3] definierten Formparameter:

$$f_k = U^{k-1} \frac{d^k U}{dx^k} (z^{**})^k, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

$$\lambda_k = - U^{k-1} \frac{d^{k-1} \nu_0}{dx^{k-1}} \frac{(z^{**})^{k-\frac{1}{2}}}{\nu^{1/2}} \quad \text{mit} \quad z^{**} = \frac{\delta^{**2}}{\nu}, \quad (14)$$

als neue unabhängige Veränderlichen verwendet.

Hier bedeutet:

- η — dimensionlose quer zur Wand gemessene Veränderliche,
- Φ — dimensionlose Stromfunktion,
- K — dimensionlose Temperaturdifferenz,
- a_0, b_0 — vorläufig willkürliche Konstanten und
- δ^{**} — Impulsverlustdicke.

Nach Differenzieren der Ausdrücke (13), (14) erhält man, wie bekannt [3], mittels der Impulsgleichung

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} F + \frac{U''}{U'} f, \quad (15)$$

die Rekursionsbeziehungen

$$\theta_k = \frac{U}{U'} f_1 f'_k = [(k-1)f_1 + kF] f_k + f_{k+1}; \quad (16)$$

$$\lambda_k = \frac{U}{U'} f_1 \lambda'_k = \left[(k-1)f_1 + \frac{2k-1}{2} F \right] \lambda_k + \lambda_{k+1},$$

welche in folgenden Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial f_k} f'_k = \frac{U'}{U f_1} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \frac{\partial}{\partial f_k}; \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \lambda'_k = \frac{U'}{U f_1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k}, \end{aligned} \quad (17)$$

enthalten sind.

Führt man nun die Formparametermengen (13), (14), mittels der Differenzialoperatoren (17) in das durch die Transformationen (12) schon vorher umgeformten Gleichungssystem (9), (10), (11), ein, so erhält man die univereellen Gleichungen betrachtetes Problems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2B^2} [a_0 B^2 + (2 - b_0) f_1] \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ + \frac{\lambda_1}{B} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_k}{B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f_k \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda_k \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} + \left\{ \frac{1}{2B^2} [a_0 B^2 + (2 + b_0) f_1] \Phi + \frac{\lambda_1}{B} \right\} \frac{\partial K}{\partial \eta} - 2 \frac{f_1}{B^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} K + \\ + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right)^2 = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\theta_k \frac{\partial K}{\partial f_k} + \lambda_k \frac{\partial K}{\partial \lambda_k} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \\ - \frac{1}{B^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\theta_k \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} + \lambda_k \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} \right) \right] \frac{\partial K}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (19)$$

mit entsprechenden Randbedingungen

$$\eta = 0: \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \eta} = 0,$$

$$\eta = \infty: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 1, \quad K = 0,$$

$$f_1 = f_2 = \dots = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0: \quad \Phi = \Phi_0. \quad (20)$$

Die Gleichungen (18), (19), die auf der rechten Seiten je zwei unendlichen Summen enthalten, wurden unter folgenden Bedingungen

$$f_1 \neq 0; \quad f_2 = f_3 = \dots = 0;$$

$$\lambda_1 \neq 0; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_1} = 0, \quad (21)$$

numerisch gelöst. In dieser, sogenannten zweiparametrischen einmallokalisierten Näherung lauten sie folgendermassen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2 B^2} [a_0 B^2 + (2 - b_0) f_1] \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ + \frac{\lambda_1}{B} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \frac{F f_1}{B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f_1 \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} + \left\{ \frac{1}{2 B^2} [a_0 B^2 + (2 - b_0) f_1] \Phi + \frac{\lambda_1}{B} \right\} \frac{\partial K}{\partial \eta} - 2 \frac{f_1}{B^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} K + \\ + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right)^2 = \frac{F f_1}{B^2} \left(\frac{\partial K}{\partial f_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

wobei die Randbedingungen (20) unverändert bleiben.

Die Funktion F , welche man schon in früheren Beziehungen (15), begegnete, für betrachtetes Problem lautet

$$F = 2 [\zeta - (2 + H) f_1 - \lambda_1]$$

$$\text{mit } \zeta = B \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right)_0 \text{ und } H = H^*/H^{**} = \delta^*/\delta^{**}. \quad (24)$$

Die Frage der Lösungsgenauigkeit der Gleichung (22), bzw. der Abweichung von exakter Lösung, ist, wie bekannt [2], mit der zweckmässigen Auswahl der Konstanten a_0 , b_0 eng verbunden. In dieser Arbeit sind, aber, die folgenden Werte: $a_0 = 0.4408$, $b_0 = 5,15$ angenommen, welche uns die Möglichkeit bieten, unsere Lösungen mit entsprechenden, in einer anderen Arbeit [4] erhaltenen Resultate zu vergleichen.

Für numerische Integration des Gleichungssystems (22), (23) mit entsprechenden Randbedingungen (20), hat man die auf dem Differenzverfahren mit implizitem Schema beruhende Methode [5] (sogenannte Progonka-Methode) verwendet. Die Berechnungen selbst sind auf Rechenanlagen IBM360 und IBM370 durchgeführt.

Da, aber, die auf Grund der Lösung erster dynamischer Gleichung (22) gewonnenen Resultate in den Arbeiten anderer Autoren [3], [4] bereits veröffentlicht sind, wird man sich hier nur auf diejenigen Resultate beschränken, die aus der Lösung zweiter, thermodynamischer Gleichung (23) folgen, bzw. thermischen Teil betrachtetes Problems betreffen. Jedoch, soll man bemerken, daß für die numerische Integration dieser Gleichung, wegen dem rekursiven Charakter des ganzen Systems (22), (23), die früher ermittelte Lösung der Gleichung (22) benützt wurde, wobei die Berechnungen selbst für zwei verschiedene Werte von Pr -Zahl: $Pr = 1.0$ (theoretischer Fall) und $Pr = 0.72$ (Luftfall) durchgeführt wurden.

Die erhaltenen und tabulierten universellen Resultate sind danach verhältnismäßig schnell und einfach, im Falle zweier konkreten praktischen Probleme verwendet worden. Um, zu zweckmässigen und interessanten Schlüssen kommen zu können, berechnete man, dabei, ausser dimensionloser Temperaturdifferenzerteilung in der Grenzschicht

$$\Delta \tilde{T} = \frac{T - T_{\infty}}{U_{\infty}^2 / 2c} = \tilde{U}^2 K(x, \eta, Pr), \quad (25)$$

die sogenannte Eigentemperaturverteilung T_e an der Wand in der Form von dimensionloser Temperaturdifferenz

$$\Delta \tilde{T}_e = \frac{T_e - T_{\infty}}{U_{\infty}^2 / 2c} = \tilde{U}^2 K(x, 0, Pr), \quad (26)$$

welche auf die Lage von thermisch gefährdeten Teilen betrachteter Schaufelkontur hinweist.

Auf Grund von gewonnenen und graphisch dargestellten Resultate kann man nun einige genauere Aussagen über den Einfluss machen, welcher: die Pr -Zahländerung, oder die Körperformumwandlung bzw. die Intensitätvariation des Absaugens (oder des Einblasens), auf die Temperaturschichtentwicklung ausüben.

Bevor man zur Betrachtung von Resultaten übergeht, welche sich auf die Umströmung von konkreten Körperformen beziehen, kann man, schon auf Grund von universeller dimensionloser Temperaturdifferenzverteilung $K(x, \eta, Pr)$, einen erwarteten Schluß bestätigen. Aus graphischer Darstellung dieser Funktion, und zwar aus Abb. 1 (für $Pr = 1.0$) und aus Abb. 2 (für $Pr = 0.72$) folgt, nämlich, daß mit der Verminderung der Pr -Zahl, bzw. der Zähigkeit, vermindert sich auch die dimensionlose Temperatur K .

Um über den Einfluss der Körperumwandlung auf die Temperaturschichtentwicklung einige Aussagen machen zu können, hat man die erhal-

tenen universellen Lösungen auf zwei konkreten Strömungsfälle untersuchtes Problems mit ausgesprochen unterschiedlichen Körperformenschlankheiten ange-

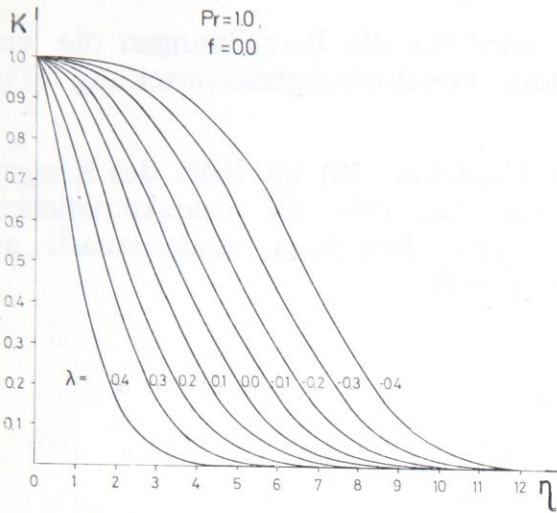


Abb. 1

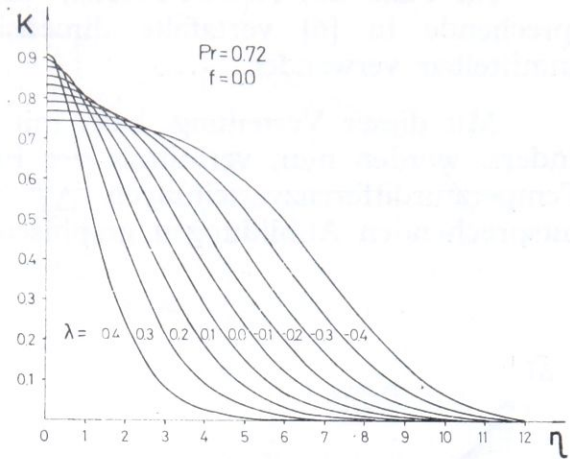


Abb. 2

wendet. Nämlich, auf die Umströmung eines Kreiszyllinders und eines aus der Praxis angenommenen Profils mit der Bezeichnung NACA 0010-34.

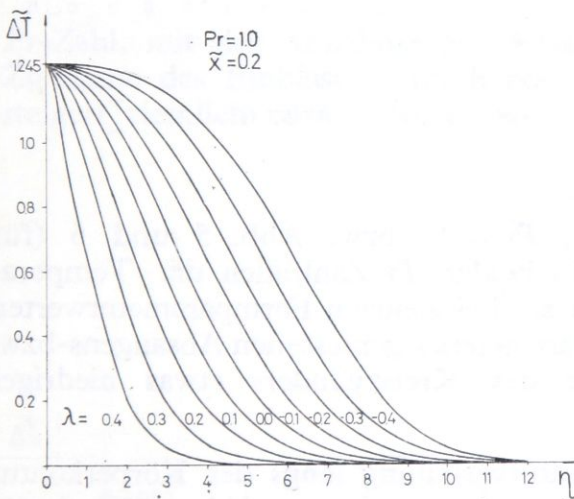


Abb. 3

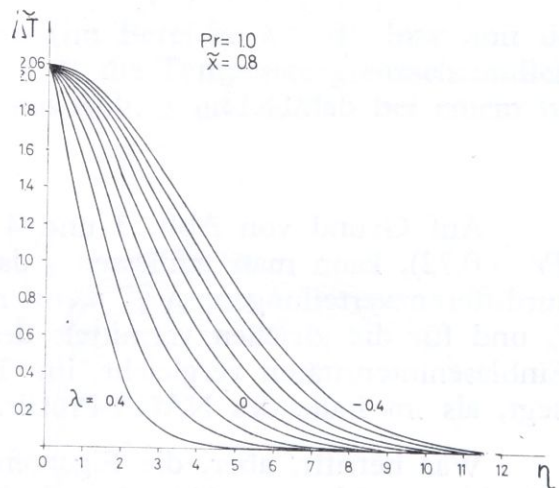


Abb. 4

Die äussere Geschwindigkeitsverteilung im Falle Kreiszyllinders

$$U(x) = 2 U_{\infty} \text{six}(x/R), \tag{27}$$

lässt sich, wie bekant [1], vermittels folgender Beziehungen

$$x/R = \tilde{x}; \quad \tilde{U} = U(x)/U_{\infty},$$

zu dimensionloser Form

$$\tilde{U} = 2 \sin \tilde{x} \quad (28)$$

zurückführen.

Im Falle des NACA-Profiles, aber, wird für die Berechnungen die entsprechende in [6] vertafelte dimensionlose Geschwindigkeitsverteilung $\tilde{U}(x)$ unmittelbar verwendet.

Mit dieser Verteilung, bzw. mit der Funktion (28) im Falle des Kreiszyllinders, werden nun, vermittels der Formeln (25), (26) die charakteristischen Temperaturdifferenzverteilungen $\Delta\tilde{T}$ und $\Delta\tilde{T}_0$, berechnet, und danach auf entsprechenden Abbildungen graphisch dargestellt.

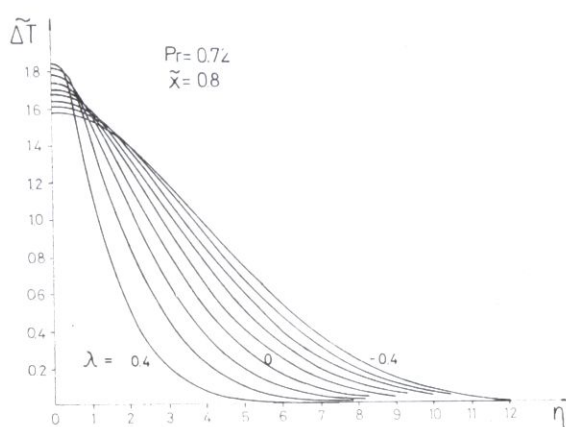


Abb. 5

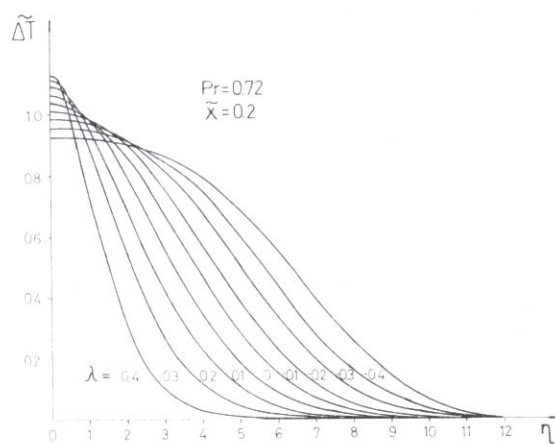


Abb. 6

Auf Grund von Abb. 3 und 4 (für $Pr = 1$), bzw. Abb. 5 und 6 (für $Pr = 0.72$), kann man schliessen, dass in beiden Pr -Zahlfällen die Temperaturdifferenzverteilungen, $\Delta\tilde{T}$, wenn man sie bei gleichen Formparameterwerten f_0 und für die gleichen vermittels des Parameters λ gemessenen Absaugens- bzw. Einblasintensitäten vergleicht, im Falle des Kreiszyllinders etwas niedriger liegt, als im Falle des NACA-Profiles.

Was betrifft, aber, die Eigentemperaturverteilung längs der Körperkontur $\Delta\tilde{T}_0(\tilde{x})$, so folgt aus Abb. 7 und 9, einerseits, und aus Abb. 8 und 10, andererseits, daß diese Verteilung durch den Charakter der äußeren Geschwindigkeitsverteilung sehr beeinflusst ist, d. h. im Falle des Kreiszyllinders sinusförmig ist, und im Falle des NACA-Profiles die Beständigkeitstendenz im mittleren, und gleichzeitig grössten Teil der Schaufelkontur zeigt. Daraus ist zu schliessen, daß beim Kreiszyllinder den thermisch gefährdesten Konturteil an einer engeren Stelle ($\tilde{x} = 1$) lokalisiert ist, während beim NACA-Profil, fast längst der ganzen Kontur ausgedehnt ist.

Aus dem Verhalten aller bis jetzt dargestellten Temperaturverteilungen folgt, daß längs der Wand kontinuierlich verteiltes Absaugen bzw. Einblasen

eine bedeutende Wirkung auf die Temperaturgrenzschichtentwicklung hat. Auf Grund von Abb. 3, 4, 5 und 6, nämlich, wird die Folgerung gezogen, daß unabhängig von der Körperform und von der Zähigkeit, d. h. von der

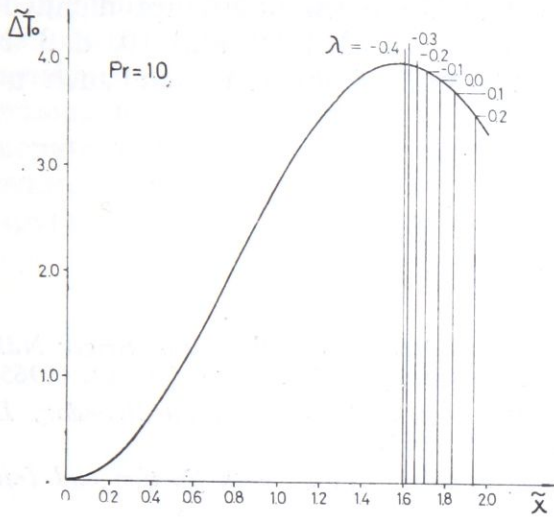


Abb. 7

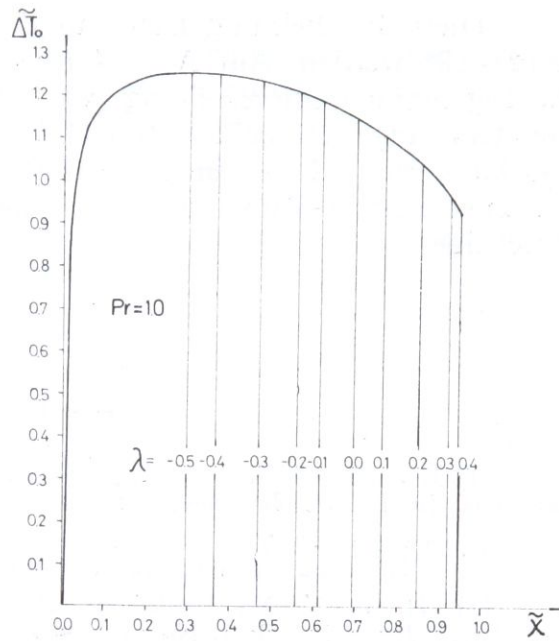


Abb. 8

Pr -Zahl, mit der Abnahme des Absaugens (im Bereiche $\lambda > 0$), bzw. mit der Zunahme des Einblasens (im Bereiche $\lambda < 0$), die Temperaturgrenzschichtdicke steigert ziemlich rasch. Dabei sieht man aus Abb. 3 und 4, daß bei einem be-

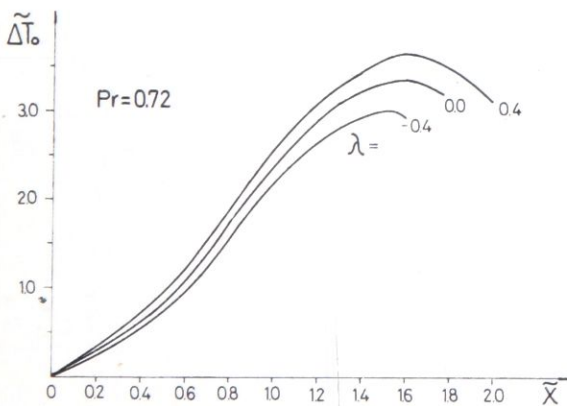


Abb. 9

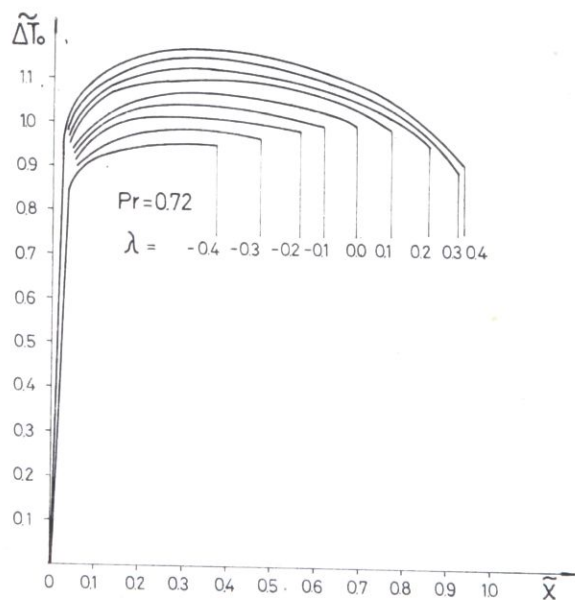


Abb. 10

stimmten Formparameter f und für $Pr = 1$ die Eigentemperatur an der Wand $\Delta\tilde{T}_0$ unabhängig vom Absaugen- bzw. Einblasenintensität ist, während für $Pr = 0.72$, d. h. im Luftfalle, wie aus Abb. 5 und 6 zu schliessen ist, bei der Variation des λ - Parametres auch eine gewisse Änderung von $\Delta\tilde{T}_0$ besteht.

Diese Erscheinung kann auf den letzten vier Abbildungen noch besser festgestellt werden. Auf Abb. 7 und 8, nämlich, welche für die $Pr = 1$ gelten, die Eigentemperaturverteilung $\Delta\tilde{T}_0$ ändert sich bei der Variation des λ - Parameters längs der beiden betrachteten Schaufelkonturen überhaupt nicht. Im Luftfalle, aber, d. h. für $Pr = 0.72$ sieht man aus Abb. 9 und 10, daß bei verschiedenen λ -Parametern die Eigentemperaturverteilungen sich auch unterscheiden.

L I T E R A T U R

[1] Loitsianski, L. G., *Die universellen Gleichungen und die parametrischen Näherungen in der Theorie der laminaren Grenzschicht* (in russisch), PMM, B.29, 70–87, (1965).

[2] Saljnikov, V. N., *A Contribution to Universal Solutions of the Boundary Layer Theory*, Teorijska i primenjena mehanika, V.4, 139–163, (1978).

[3] Chan, Y. Y., *Loitsanskii's Method for Boundary Layers with Suction and Injection*, AIAA Journal, Vol. 7, No. 3, (1969).

[4] Schischkina, L. G., *Zweiparametrische Lösung der Gleichungen laminarer Grenzschicht an einer durchdringenden Fläche* (in russisch), Izv. AN SSSR, Meh. židkosti i gaza, No. 6, (1973).

[4] Simuni, L. M. und Terentiew, N. P. *Numerische Lösung der Gleichungen einparametrischer Grenzschichttheorie* (in russisch) Trudi LPI, No. 248, 56–58, (1965).

[6] Abbot, J. H. and Von Doenhoff, A. E., *Theory of Wing Section*, "Dover publ." New York, (1959).

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПОРИСТЫХ
ТЕПЛОНЕПРОНИЦАЕМЫХ СТЕНКАХ ПРИ ЛАМИНАРНОМ
ОБТЕКАНИИ

Р е з ю м е

В работе рассматривается температурный пограничный слой при плоском ламинарном несжимаемом обтекании теплонепроницаемой стенки с непрерывно распределенными порами на поверхности, через которые производится отсос или вдув жидкости. Для разрешения этой задачи применяется многопараметрический метод Л. Г. Лойцянского [1] усовершенствованный нами в работе [2]. Универсальные решения, определенные численным способом для чисел Прантля: $Pr = 1.0$ и $Pr = 0.72$ используются для расчета температурного пограничного слоя на цилиндре сечения круга и на стандартном аэропрофиле с обозначением NASA 0010-34.

TEMPERATURSKI GRANIČNI SLOJ NA POROZNIM
TOPLOIZOLOVANIM ZIDOVIMA PRI LAMINARNOM
OPSTRUJAVANJU

I z v o d

U radu se razmatra temperaturski granični sloj pri ravanskom laminarnom nestišljivom opticanju toploizolovanog zida sa neprekidno raspoređenim porama na površini, kroz koje se vrši usisavanje odn. uduvavanje tečnosti. Za rešavanje ovog zadatka primenjuje se višeparametarska metoda L. G. Lojcjan-skog [1] usavršena u našem ranijem radu [2]. Univerzalna rešenja, određena numeričkim postupkom za slučajeve definisane sa $Pr = 1$ i $Pr = 0.72$, koriste se za proračun temperaturskog graničnog sloja na cilindru kružnog preseka i na standardnom aeroprofilu oznake NACA 0010-34.

Dr Viktor Saljnikov, Nevesinjska 17,
11 000 Beograd/Jugoslavien

Dr Sultana Tupurkovska-Poposka, Samoilova 106,
91 000 Skopje/Jugoslavien