TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 9, pp. 83—89, 1983, UDK 532.526

VERGLEICH DER LÖSUNGEN DER UNIVERSELLEN GLEICHUNGEN FÜR LAMINARER GRENZSCHICHT BEI STRÖMUNG EINES KOMPRESSIBLEN FLUIDES IN VERSCHIEDENEN FÄLLEN

Metodija Mirčevski

(Received March 20, 1982, Revised November 25, 1982)

Die universellen Gleichungen zur Beschreibung der stationären Strömung eines zähen kompressiblen Fluides in ebener laminarer Grenzschicht enthalten auf ihren rechten Seiten Reihen mit unendlich viele Funktionsgliedern und haben partielle Ableitungen nach jedem Formparameter [1], [2].

Es wird hier über die nummerische Lösung der universellen Grenzschichtgleihungen in lokal-zweiparametriger Form berichtet. Folgende drei Typen von universellen Grenzschichtgleichungen in lokal-zweiparametriger Form wurden betrachtet:

1) Universelle Grenzschichtgleichungen in lokal-zweiparametriger Form für Fall SALJNIKOV — BORIČIĆ:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2B^2}\left[a_0 B^2 + f_1(2-b)\right]\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2}\left[1 + S - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{F \cdot f_1}{B^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial f_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \frac{Pr}{2B^2}\left[a_0 B^2 + f_1(2-b)\right]\Phi \frac{\partial S}{\partial \eta} + 2(Pr-1) f_0 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right) = \tag{1}$$

$$= Pr\frac{F f_1}{B^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial S}{\partial f_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial S}{\partial \eta}\right),$$

mit den Grenzbedingungen

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0, \quad S = S_w \text{ bei } \eta = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 1, \quad S = 0 \text{ für } \eta \to \infty, \tag{2}$$

$$f_0 \neq 0, \; f_1 = f_2 = \ldots = 0; \quad \Phi = \Phi_0; \quad S = S_0.$$

Dieses Gleichungsystem erhält man, wenn in die universellen Grenzschichtgleichungen der allgemeinen Form [1]

$$f_0 \neq 0;\ f_0 = \kappa;\ f_1 \neq 0,\ f_2 = f_3 = \ldots = 0;\ \frac{\partial}{\partial f_0} = 0,$$

gesetzt wird.

2) Universelle Grenzschichtgleichungen in lokal — zweiparametriger Form für den Fall KAPUSTJANSKI, die aus den universellen Grenzschichtgleichungen der allgemeinen Form

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{F + 2 f_1}{2 B^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2}\left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 + S\right] =$$

$$\frac{1}{B^2} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial f_n} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + Pr \frac{F + 2 f_1}{2 B^2} \Phi \frac{\partial S}{\partial \eta} + 2 (Pr - 1) \kappa \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right) = \tag{3}$$

$$= \frac{Pr}{B^2} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial S}{\partial f_n} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_n} \frac{\partial S}{\partial \eta}\right),$$

mit den Grenzbedingungen (2) hervorgehen, wenn in diese

$$f_0 = \kappa,\ f_0 \neq 0,\ f_1 \neq 0,\ f_2 = f_3 = \ldots = 0,\ \frac{\partial}{\partial f_0} = 0,$$

gesetzt wird.

3) Universelle Grenzschichtgleichungen in lokal — zweiparametriger Form für den Fall LJUBENOV, die sich aus den universellen Grenzschichtgleichungen (3) ergeben, wenn in diese

$$f_0 = \kappa,\ f_0 \neq 0,\ f_1 \neq 0,\ f_2 = f_3 = \ldots = 0,\ \frac{\partial}{\partial f_1} = 0,$$

gesetzt wird.

Die in den obigen Gleichungen verwendeten Bezeichunngen haben folgende Bedeutung:

Φ — dimensionslose Stromfunktion
S — dimensionslose Wärmefunktion
a_0, b — bekannte Konstanten
B — das Mass der Inpulsverlustdickeverteilung darstellende Grösse
θ_n — entsprechende Rekursionsformel
f_n — Loitsianski — Parameter
Pr — Prandtl — Zall
w_w — Wärmefunktion an der Wand

Die Untersuchungen in dieser Arbeit halten das Ziel, eine Vergleichsanalyse der Lösungen der Grenzschichtgleichungen für den Fall SALJNIKOV—BORIČIĆ und den Lösungen der entsprechenden Grenzschichtgleichungen von KAPUSTIIANSKI und LJUBENOV durchzuführen und daraus eventuelle Schlussfolgerungen über die Vorzüge der einzelnen Gleichungsvarianten zu ziehen.

Zu diesem Zweck, wurde das System der partiellen Differentialgleichuugen in lokal — zweiparametriger Form (1) mit den entsprechenden Grenzbedingungen (2) für folgende ckarakteristische Grössenverte gelöst:

$$S_w = 0{,}4;\ -0{,}4;\ Pr = 0{,}72 \text{ (fur Luft)}$$

$$k = f_0 = 0{,}0;\ 0\ 5;\ 0{,}95;\ a_0 = 0{,}4408;\ b = 5{,}714.$$

Für diese Zahlenwerte der freien Parameter wurden universelle, für die dynamicsche und thermische laminare Grenzschicht ckarakteristische Lösungen erhalten, die ein für allemal tabellarisiert sind und zur Grenzschicht untersuchung bei Luft umstömung beliebiger ebener Körperkonturen benutzt werden können, wenn für diese die Verteilung der Relativgeschwindigkeiten in der äusseren Strömung bekannt ist. Die nummerische Lösung des Systems der nichtlinearen Differentialgleichungen wurde mit dem elektronischen Rechner IBM 370 durchgeführt.

Die berechneten und tabellarisch dargestllten Ergebnisse wurden mit den Ergebnissen von KAPUSTIJANSKI und LJUBENOV [3] verglichen.

Für einen Teil der gewonnenen Ergebnisse ist die Gegenüberstellung für alle drei Fälle in den Fig. 1 bis 4 graphisch dargestellt.

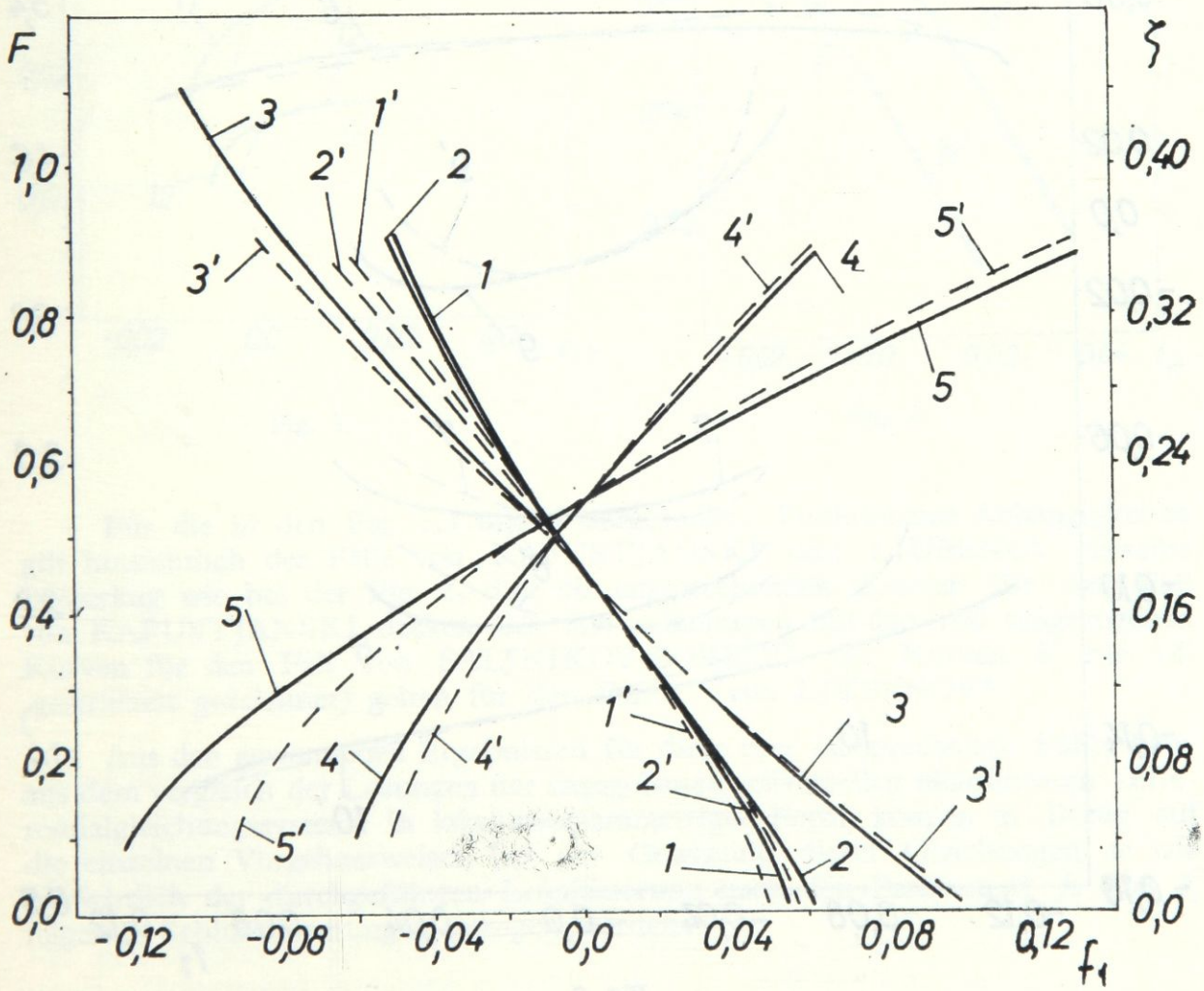

Fig. 1

In Fig. 1 ist mit von ausgezogenen Linien der Verlauf der Funktion $F(f_1)$ (die Kurven 1 und 2 für $S_w = 0{,}4$ und Kurve 3 für $S_w = -0{,}4$) und der Verflauf von $\zeta(f_1)$ (kurve 4 für $S_w = 0{,}4$ und Kurve 5 für $S_w = -0{,}4$), für den Fall SALJNIKOV – BORIČIĆ dargestellt. Die Kurven 1 bis 5 wurden für $\kappa = 0{,}95$, während die Kurve 2 für $\kappa = 0$ gewonnen. Die Kurven für den Fall fon KAPUSTIJANSKI decken sich fast völling mit den Kurven der entsprechenden Funktionen für den Fall von SALJNIKOV–BORIČIĆ so dass die voll ausgezogenen linien zugleich den entsprechenden Kurven verlauf von KAPUSTIJANSKI darstellen. Mit den gestrichelt gezeichneten Kurven 1′ bis 5′ ist der Funktionsverlauf für dem Fall von LJUBENOV für die gleichen Parameterwerte wie bei SALJNIKOV–BORIČIĆ dargestellt.

In den Fig. 2, 3 und 4 ist analog der Verlauf der übrigen Funktionen dargestellt:

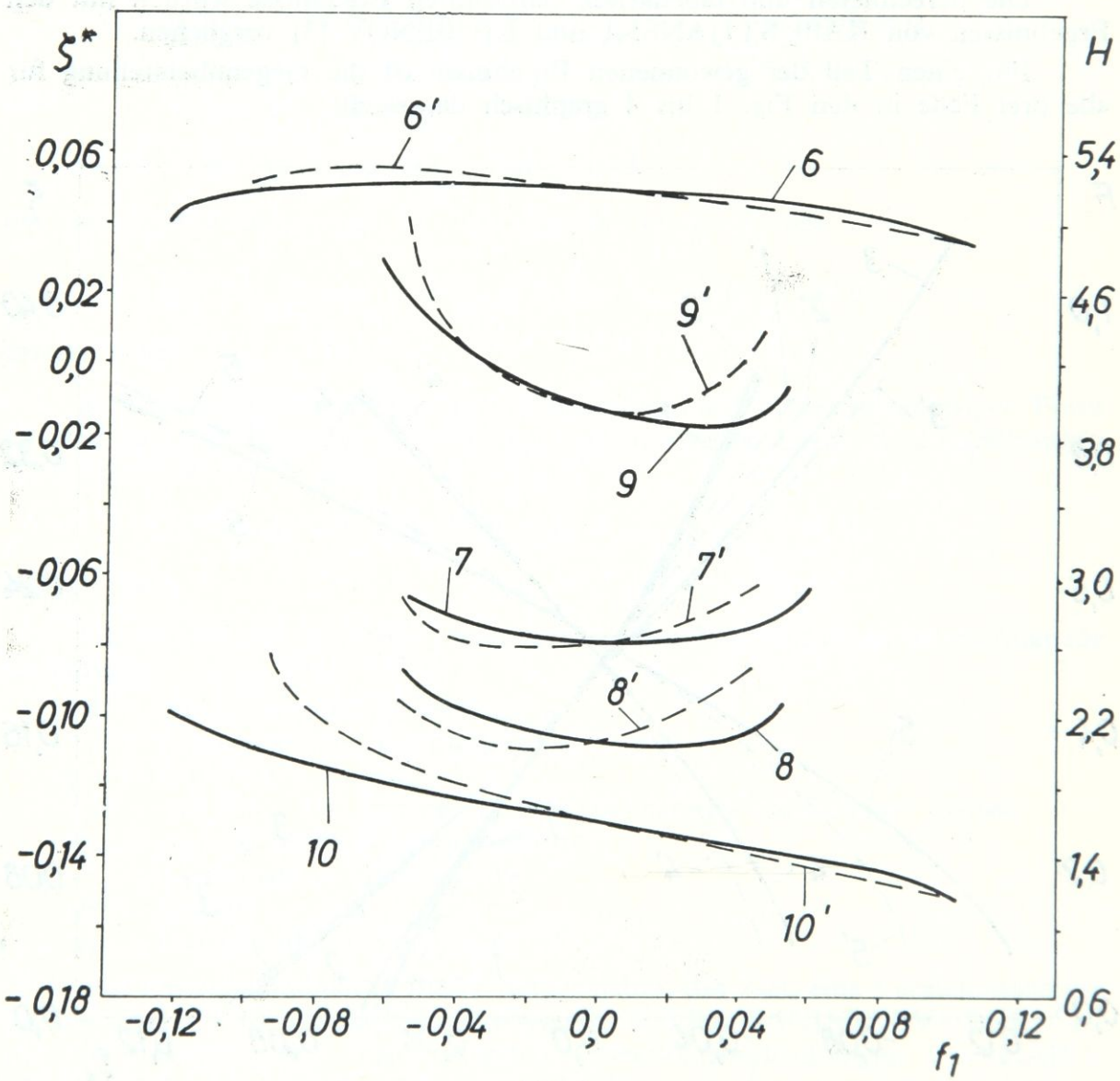

Fig. 2

— In Fig. 2 ist der Verlauf der Funktion $\zeta^*(f_1)$ (Kurve 6 für $S_w = -0{,}4$ und $k = 0{,}95$, Kurve 7 für $S_w = 0{,}4$ und $k = 0$ und Kurve 8 für $S_w = 0{,}4$ und $k = 0{,}95$) und der Verlauf der Funktion $H(f_1)$ (Kurve 9 für $S_w = 0{,}4$ und $k = 0{,}95$ und Kurve 10 für $S_w = -0{,}4$ und $k = 0{,}95$) dargestellt.

— In Fig. 3 ist der Verlauf der Funktion $\zeta_T(f_{1T})$ dargestellt, wobei Kurve 11 für $S_w = -0{,}4$ und $k = 0{,}5$ und Kurve 12 für $S_w = -0{,}4$ und $k = 0{,}95$ gilt.

— In Fig. 4 ist der Verlauf der Funktion $F_T(f_{1T})$ dargestellt, wobei Kurve 13 für $S_w = -0{,}4$ und $k = 0{,}5$ und Kurve 14 für $S_w = -0{,}4$ und $k = 0{,}95$ gilt.

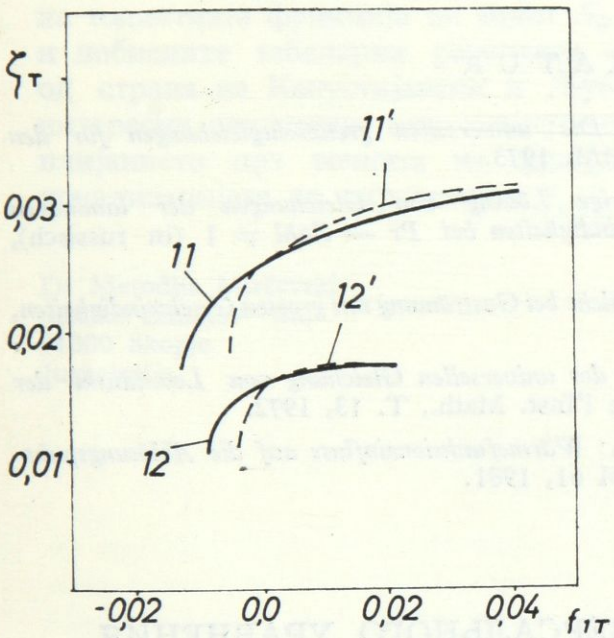

Fig. 3

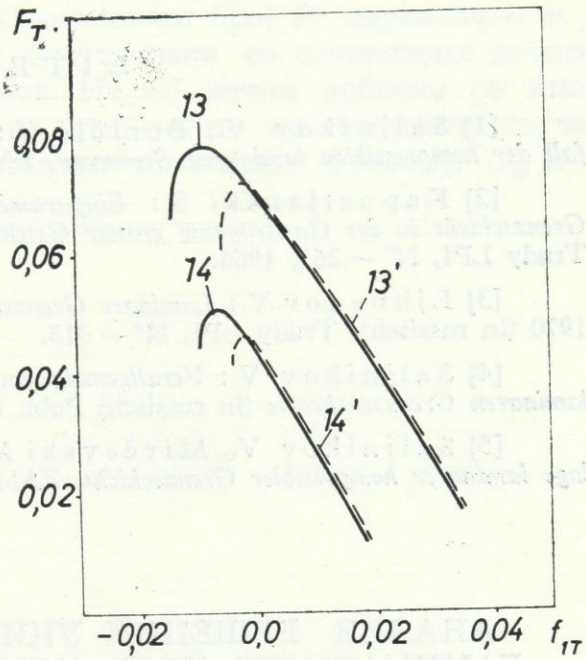

Fig. 4

Für die in den Fig. 2,3 und 4 dargestellten Funktionalen Abhängigkeiten gilt hinsichtlich der Fälle von KAPUSTJANSKI und LJUBENOV dieselbe Bemerkug wie bei der Fig. 1, d.h. die enstprechenden Kurven für den Fall von KAPUSTJANSKI decken sich fast volkommen mit den voll ausgezogenen Kurven für den Fall von SALJNIKOV-BORIČIĆ, die Kurven 6′ bis 14′ (gestrichelt gezeichnet) gelten für den Fall: . . . von LJUBENOV*.

Aus den gewonnenen Ergebnissen für diese drei entsprechende Fälle, bzw. aus dem vergleich der Lösungen der angegebenen universellen nichtlinearen Differentialgleichungssysteme in lokal-zweiparametriger Form, können in Bezug auf die einzelnen Vorgehensweisen bei der Gewinung dieser Gleichungen so wie hinsichtlich der durchgeführten Lokallisierung nach den Parametern f_0 oder f_1 folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

* BEMERKUNG: Die Arbeit wurde an der GAMM Tegung 1981 in Würzburg mittgeteilt.

Aus der festgestellten Übereinstimmung der einzelnen funktionalen Abhängigkeiten beim Vergleich des Falles von SALJNIKOV-BORIČIĆ mit dem Fall von KAPUSTIJANSKI ist gleich gute konvergenz der Lösungen in beiden Fällen zu ersehen. Das lässt auf die vorzüge der verbesserten Parametermethode von SALJNIKOV [4] schliepen.

Durch die Lokalisierung des Parameters f_1 kann die vorzeitige Ablösung des Grenzschicht beeinflusst werden.

Die Wärmefunktion S_w übt grossen Einfluss auf den Ablösungspunkt der Grenzschicht (eine tiefergeehnde) Analyse über die S_w — Funktion ist in [5] zu finden).

Im übrigen wurden die Schlussfolgerungen von LJUBENOV [3] voll bestäting.

LITERATUR

[1] Saljnikov V., Boričić Z.: *Die universellen grenzschtgleichungen für den fall der kompressiblen laminaren Strömung,* ZAMM, 1973.

[2] Kapustjanski S.: *Einparametrige Lösung von Gleichungen der laminaren Grenzschicht in der Gasströmung grosser Geschwindigkeiten bei Pr — Zahl* $\neq 1$ (in russisch), Trudy LPI, N° = 265, 1966.

[3] Ljubenov V.: *Laminare Grenzschicht bei Gasströmung mit grossen Geschwindigkeiten,* 1970 (in russisch), Trudy LPI, N° = 313.

[4] Saljnikov V.: *Verallgemeinerung der universellen Gleichung von Loitsianski der laminaren Grenzschtheorie* (in russisch) Publ. de l'Inst. Math., T. 13, 1972.

[5] Saljnikov V., Mirčevski M.: *Wärmefunktioneinfluss auf die Ablösungspuktlage laminarer kompresibler Grenzschicht,* ZAMM 61, 1981.

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ УНИВЕРСАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ОБТЕКАЕМОГО СЖИМАЕМЫМ ФЛУИДОМ В РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЯХ

Резюме

Исследования, рассматрываемые в этой статье, преследовали цель сопоставить полученные табелярные результаты и сделать характерные выводы из решений универсальных уравнений ламинарного пограничного слоя, обтекаемого сжимаемым флуидом больших скоростей дяа случаев Сальникова—Боричича, Капустянского и Любенова.

Для этой цели проводилось численное решение данных универсальных уравнений для случаев Сальников—Боричича со соответствующими значениями тепловой функции стенки S_w, Прантлового числа Pr, параметра f_0 и полученние табелярные результати сравнили со соответствующими значениями полученными Капустянским и Любеновым. Таким образом били получены очень любопытные данные, указывающие на преимущества отдельных случаев, их влияние на точку одрива тепловой функций S_w и на локализирование по параметру f_1.

СПОРЕДУВАЊЕ НА РЕШЕНИЈАТА НА УНИВЕРЗАЛНИТЕ РАВЕНКИ ЗА ЛАМИНАРЕН ГРАНИЧЕН СЛОЈ ПРИ СТРУЊЕ НА КОМПРЕСИБИЛЕН ФЛУИД ПРИ РАЗЛИЧНИ СЛУЧАИ

Резиме

Истражувањата во овој труд имаат за цел да се изврши споредување на добиените табелирани резултати и да се извлечат карактеристични заклучоци од решенијата на универзалните равенки за ламинарен граничен слој при струење на компресибилен флуид со големи брзини, за случај на Сањников—Боричиќ, Капустјански и Љубенов.

За да се изврши горното, вршено е нумеричко решавање на овие универзални равенки за случај Сањников—Боричиќ за соответни величини на топлотната функција на ѕидот S_w Прантловиот број Pr параметарот и f_0, и добиените табеларни резултати се споредувани со соответните добиени од страна на Капустијански и Љубенов. На тој начин добиени се многу интересни заклучоци кои укажуваат на предностите на поедините случаи, влијанието врз точката на одвојување на топлотната функција S_w и на локализацијата по параметарот f_1.

Dr Metodija Mirčevski
„Rajko Žinzifov“ 28,
91000 Skopje
Jugoslavija