TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 8, pp. 59—65, 1982, UDK 531.314.3

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ИЗБЫТОЧНЫХ КООРДИНАТАХ

В. В. Козлов

(Поступило июна 1981)

1. Уравнения Гамильтона в избыточных координатах

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, движения которой в обобщенных координатах $q \in U$ (U — область в R^n) удовлетворяют уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

где $L(q, \dot{q}): U \times R^n \to R$ — некоторая гладкая функция, у которой матрица $\| \partial^2 L / \partial q^2 \|$ положительно определена при всех $q \in U$. Предположим, что на эту систему наложена связь: точка $q \in U$ удовлетворяет уравнению $f(q) = 0$, где $f: U \to R$ — гладкая функция, такая, что $f'_q \neq 0$. Уравнения движения новой ,,стесненной'' системы можно представить в виде уравнений Лагранжа с неопределенным множителем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial q}, \qquad f(q) = 0.$$

Оказывается, движение этой системы с $(n-1)$ степенями свободы можно описать уравнениями Гамильтона в переменных $(q, p) \in U \times R^n$, при этом функция f будет интегралом ,,расширенной'' гамильтоновой системы уравнений.

Введем канонические импульсы $p \in R^n$ по формуле

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q}, \tag{1}$$

где λ пока неопределенный множитель Поскольку лагранжиан L невырожден по $\dot{q}$, то по теореме о неявных функциях уравнение (1) определяет локально функцию $\dot{q} = \dot{q}(p, q, \lambda)$. Покажем, что из уравнения $\langle f'_q, \dot{q} \rangle = 0$ ($\langle , \rangle$ — скалярное произведение в R^n) можно найти λ как гладкую функцию p, q Действительно, дифференцируя равенство (1) по λ, будем иметь)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} < f'_q, \dot{q} > = < f'_q, \frac{\partial \dot{q}}{\partial\lambda} > = - < f'_q, \left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right\|^{-1} f'_q > \neq 0$$

в силу положительной определенности матрицы $\|\partial^2 L/\partial \dot{q}^2\|$.

Введем функцию

$$H = < p, \dot{q} > - L(q, \dot{q})|_{\dot{q}(p, q, \lambda, (p, q))}.$$

Теорема. Функции $p(t)$, $q(t)$, определяющие движение с $(n-1)$ степенью свободы, удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Это утверждение восходит к исследованиям Г. К. Суслова, посвященным распространению метода Гамильтона-Якоби на случай избыточности обобщенных координат. Его можно вывести с помощью формул, содержащихся в гл. 43 книги [1]. Мы дополнили их условием положительной определенности квадратичной формы

$$< \xi, \left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right\| \xi >, \xi \in R^n,$$

гарантирующим выполнение условий разрешимости неявных уравнений.

Замечание. Теорема справедлива, конечно, и в том случае, когда рассматриваются сразу несколько уравнений связи. Более того, уравнения интегрируемых связей могут быть заданы в виде непроинтегрированной системы линейных уравнений $< a(q), \dot{q} > = 0, a \in R^n$.

2. Приложение к динамике твердого тела с неподвижной точкой

Рассмотрим группу $Sp(1)$ — мультипликативную группу кватернионов $q = \chi + \xi i + \eta j + \zeta k$ с единичной нормой: $\chi^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.. Каждому такому кватерниону соответствует линейное отображение T_q алгебры всех кватернионов K на себя, определенное формулой

$$T_q(r) = q\, r\, q^{-1}, \; r \in K.$$

Легко проверить, что T_q отображает множество чистых кватернионов (у которых $\chi = 0$) на себя. Если отождествить это множество с еквлидовым пространством R^3, то T_q будет ортогональным преобразованием $R^3 \to R^3$. Рассмотрим теперь твердое тело с закрепленной точкой. Зафиксируем некоторое положение этого тела. Тогда его поворот из начальное положение в произвольное положение задается некоторым ортогональным преобразованием, которому в свою очередь соответствует некоторый кватернион $q \in S_p(1)$. Таким образом, каждому кватерниону $q \in S_p(1) \subset K$ можно поставить в соответствие положение твердого тела с неподвижной точкой, причем кватерниону $-q$ (и только ему) соответствует тоже самое положение тела в R^3. Эти наблюдения восходят к Гауссу. Значит, переменные $(\chi, \xi, \eta, \zeta) \in R^4$ можно считать избыточными координатами в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.

Пусть I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции тела, ω_1, ω_2, ω_3 — проецкии его угловой скорости на оси инерции, V — потенциал силогово поля — некоторая гладкая функция переменных χ, ξ, η, ζ. Функция Лагранжа этой задачи, как известно, равна

$$L = \frac{1}{2}(I_1\,\omega_1^2 + I_2\,\omega_2^2 + I_3\,\omega_3^2) + V.$$

Известны следующие соотношения [2]:

$$\omega_1 = 2\,(\chi\dot{\xi} - \xi\dot{\chi} + \zeta\dot{\eta} - \eta\dot{\zeta}), \qquad \omega_2 = 2\,(\chi\dot{\eta} - \eta\dot{\chi} + \xi\dot{\zeta} - \zeta\dot{\xi}),$$
$$\omega_3 = 2\,(\chi\dot{\zeta} - \zeta\dot{\chi} + \eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}).$$

Согласно п. 1, обобщенные импульсы p_χ, p_ξ, p_η, p_ζ определяются по формулам

$$p_\chi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\chi}} - \lambda\chi,\ p_\xi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}} - \lambda\xi,\ p_\eta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}} - \lambda\eta,\ p_\zeta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\zeta}} - \lambda\zeta,$$
$$\chi\dot{\chi} + \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} = 0.$$

Из этой системы можно найти, что

$$2\,I_1\,\omega_1 f = p_\xi\chi - p_\chi\xi + p_\eta\zeta - p_\zeta\eta, \qquad 2\,I_2\,\omega_2 f = p_\eta\chi - p_\chi\eta + p_\zeta\xi - p_\xi\zeta,$$
$$2\,I_3\,\omega_3 f = p_\zeta\chi - p_\chi\zeta + p_\xi\eta - p_\eta\xi,$$

где $f = \chi^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$.

Следовательно, в новых переменных χ, p_χ, ... уравнения движения имеют каноническую форму с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{8f^2}\left\{\frac{(p_\xi\chi - p_\chi\xi + p_\eta\zeta - p_\zeta\eta)^2}{I_1} + \frac{(p_\eta\chi - p_\chi\eta + p_\zeta\xi - p_\xi\zeta)^2}{I_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(p_\zeta\chi - p_\chi\zeta + p_\xi\eta - p_\eta\xi)^2}{I_3}\right\} - V(\chi, \xi, \eta, \zeta).$$

Рассмотрим случай, когда силовое поле инвариантно относительно группы g поворотов тела вокруг некоторой неподвижной оси l. Направляющие косинусы этой оси относительно осей инерции обозначим x_1, x_2, x_3. Можно показать, что

$$x_1 = 2\,(\xi\zeta - \eta\chi), \qquad x_2 = 2\,(\xi\chi + \eta\zeta), \qquad x_3 = \chi^2 + \zeta^2 - \xi^2 - \eta^2. \qquad (2)$$

Критерий инвариантности потенциала V относительно действия группы g — постоянство проекции кинетического момента на ось l:

$$M = I_1\,\omega_1\,x_1 + I_2\,\omega_2\,x_2 + I_3\,\omega_3\,x_3 = \text{const}.$$

В канонических переменных χ, p_χ, ... момент $M = p_\zeta\,\chi - p_\chi\,\zeta + p_\eta\,\xi - p_\xi\,\eta)/2$. Используя этот ленейный интеграл, можно понизить число степеней свободы рассматриваемой системы на единицу.

3. Замечания о понижении порядка гамильтоновых систем с симметрией

Пусть система уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

имеет линейный интеграл $F = \sum_i f_i(q)\, p_i$. Этому интегралу естественным образом соответствует однопараметрическая группа симметрий g^s пространства положений $U \ni q$ — фазовый поток системы уравнений

$$\frac{dq_i}{dS} = \frac{\partial F}{\partial p_i} = f_i(q), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3}$$

Орбиты действия группы g^s — фазовые траектории этой системы — локально выпрямляются: в окрестности неособой точки можно выбрать так координаты $Q_1, \ldots, Q_n$, что

$$\frac{dQ_i}{dS} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad \frac{dQ_n}{dS} = 1.$$

Функции $Q_1, \ldots, Q_{n-1}(q)$ — первые интегралы уравнений (3), а $Q_n(q)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_i \frac{\partial Q_n}{\partial q_i} f_i = 1. \tag{4}$$

Так как $det\,\|\partial Q/\partial q\| \neq 0$, то существует свободное каноническое преобразование $(p, q) \to (P, Q)$ с производящей функцией $S(q,P) = \sum_i P_i\, Q_i(q)$. В новых координатах функция

$$F = \sum_i f_i\, p_i = \sum_i f_i \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} p_j = p_n$$

Поскольку F — первый интеграл системы с гамильтонианом H, то $H(P, Q)$ не зависит от Q_n. Итак, при фиксированном значении линейного интеграла $F = P_n$ мы понизили (по крайней мере локально) порядок исходной гамильтоновой системы. При этом переменные $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ „нумеруют" орбиты группы g^s.

Координаты $Q_1, \ldots, Q_n$, участвующие в понижении порядка гамильтоновой сситемы, определены, конечно, неоднозначно: к этим переменным можно добавить произвольные первые интегралы уравнений (3). Гамильтониан пониженной системы в общем случае зависит от выбора решения Q_n уравнения (4). Если же постоянная леинейного интеграла $F = P_n$ равна нулю, то функция Гамильтона приведенной системы однозначно определена на кокасательном расслоении локального приведенонго пространства положений, точки которого являются орбитами действия группы g^s. Иногда такое приведение при $F = 0$ можно осуществить не только локально, но и в „целом".

4. Понижение порядка уравнении динамики твердого тела

В задаче о вращении твердого тела с неподвижной точкой в осесиметричном силовом поле уравнения (3) имеют следующий вид:

$$\chi' = \frac{\partial M}{\partial p_\chi} = -\zeta/2, \zeta' = \frac{\partial M}{\partial p_\zeta} = \chi/2, \xi' = \frac{\partial M}{\partial p_\xi} = -\eta/2, \eta' = \frac{\partial M}{\partial p_\eta} = \xi/2. \quad (5)$$

Фазовые траектории этой системы (орбиты действия группы g^s) устроены достаточно просто: они являются большими кругами трехмерных сфер $S_r^3 = \{\chi^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2\} \subset R^3$. Фактор-множество S_r^3/g^s (множество орбит g^s на S_r^3) является вдумерной сферой S_r^2. Мо-жно считать, что S_r^2 – стандарная сфера $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r\} \subset R^3$. Действительно, функции x_2, x_2, x_3 (определяемые формулой (2)) — независимый набор первых интегралов уравнений (5) и точки на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r$ взаимно однозначно соответствуют большим кругам трехмерной сферы S_r^3.

Будем считать x_1, x_2, x_3 избыточными координатами приведенной системы. Чтобы выписать ее гамильтониан, надо, согласно п. 3, найти решение уравнения (4):

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\chi - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\xi = 2.$$

Одним из ее решений является функция

$$\varphi = \operatorname{artg}\frac{\zeta}{\chi} + \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}.$$

Отметим, что любое решение этого уравнения будет иметь особенонсти в R^4.

Канонические переменные p_1, p_2, p_3, сопряженные с переменными x_1, x_2, x_3, можно найти из следующей сыстемы уравнений:

$$2p_1\zeta + 2p_2\chi - 2p_3\xi + M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = p_\xi, \quad -2p_1\chi + 2p_2\zeta - 2p_3\eta + M\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = p_\eta,$$

$$2p_1\xi + 2p_2\eta + 2p_3\zeta + M\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = p_\zeta, \quad -2p_1\chi + 2p_2\xi + 2p_3\chi + M\frac{\partial\varphi}{\partial\chi} = p_\chi.$$

С помощью этих формул нетрудно вычислить

$$I_1\,\omega_1 = \frac{\varphi}{2f}\{p_\xi\chi - p_\chi\xi + p_\eta\zeta - p_\zeta\eta\} = \frac{\varphi}{2f}\left\{2(p_2x_3 - p_3x_2) + \right.$$

$$\left. + M\left(\chi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial\varphi}{\partial\chi} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)\right\} = \frac{p_2x_3 - p_3x_2}{f} + \frac{Mx_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (6)$$

$$I_2\,\omega_2 = \frac{p_3x_1 - p_1x_3}{f} + \frac{Mx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad I_2\,\omega_3 = \frac{p_1x_2 - p_2x_1}{f} + \frac{Mx_3}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Здесь $f^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Гамильтониан приведенной системы ревен $H = + \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) - V$, где вместо $I_1 \omega_1$, $I_2 \omega_2$ и $I_3 \omega_3$ подставлены их выражения через p_i, x_i с помощью формул (6). Наиболее простой вид гамильтониан имеет в случае, когда $M = 0$:

$$H = \frac{1}{2f^2}\left\{\frac{(p_3 x_3 - p_3 x_2)^2}{I_1} + \frac{(p_3 x_1 - p_1 x_3)^2}{I_2} + \frac{(p_1 x_2 - p_2 x_1)^2}{I_3}\right\} - V(x_1, x_2, x_3).$$

В случае Эйлера (когда $V = 0$), как известно, сохраняется кдаврат модуля кинетического момента

$$(I_1 \omega_1)^2 + (I_2 \omega_2)^2 + (I_3 \omega_3)^2 = \frac{\varphi}{f^2}\{(p_2 x_3 - p_3 x_2)^2 + (p_3 x_1 - p_1 x_3)^2 + \\ + (p_1 x_2 - p_2 x_1)^2\}.$$

Интересно отметить, что эта функция является гамильтонианом канонических уравнений задачи о движении точки массы $m=2$ по инерции по неподвижной сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, записанных в естественны избыточных координатах x_i, p_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

Литература

[1] Суслов Г.К. *Теоретическая механика*, Гостехиздат, М.Д., 1946.

[2] Уиттекер Е.Т., *Аналитическая динамика*, Гостехиздат, М.—Л., 1937

ÉQUATIONS CANONIQUES DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE AVEC UN POINT FIXE DANS DES COORDONNÉES EXCÉDENTAIRES

Résumé

On démontre que si les positions d'un système holonome sont déterminées par n coordonnées excéddentaires, on peut établir 2n équations canoniques du mouvement. Les liaisons deviennent des intégrales premiéres se ces équations. Dans la dynamique du solide l'eapace des coordonnees excédentarires est l'espace des quaterinos. Aprés la réduction de l'ordre avec l'aide de l'intégrale des aires l'espace des coordonnées excedentaires est l'espace des variables de Poisson.

HAMILTONOVE JEDNAČINE KRETANJA KRUTOG TELA S NEPOOKRETNOM TAČKOM U IZBITOČNIM KOORDINATAMA

Izvod

Posmatra se mehanički sistem na koji dejstvuju potencijalne sile u prisustvu veza $f(q) = 0$. Pri tom se uvode impulsi relacijama (1) u kojima su λ neodređeni množioci. Dokazuje se teorema: funkcije $p(t)$ i $q(t)$, koje određuju kretanja sistema od $n - 1$ stepena sloboda, zadovoljavaju Hamiltonove jednačine. Ovo tvođenje primenjeno je na određivanje kretanja krutog tela sa nepokretnim tačkama.

U okviru prostora kvaterniona razmatra se prostor izbitočnih koordinata. Određena je Hamiltonova funkcija. Za slučaj kada je polje sila invarijantno u odnosu na grupu rotacija oko neke nepokretne ose, kosinusi koji određuju orijentaciju izražavaju se relacijama (2).

Sistem Hamiltonovih diferencijalnih jednačina koji ima linearni integral $F = \Sigma f(q)p$ snižava red za jedan., što se, primenjuje na slučaj obrtnog kretanja krutog tela za koji se jednačine (3) svode na oblik (5).

В.В. Козлов, МГУ Механико-математический
Факултет, 117234 Москва, СССР