TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 8, pp. 49—57, 1982, UDK 531.36

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Л. М. Ковалева

(Сообщено 4. июна 1981)

В последнее время значительное развитие получила теория движения систем связанных твердых тел, среди которых особое место занимает гиростат. Исследование его движения начато в работах В. Вольтерра и Н. Е. Жуковского. В настоящее время системы типа гиростата широко применяются в различных областях техники и, особенно, в космонавтике. Наиболее хорошо изучено движение гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Использование результатов этих исследований в технике требует проведения дополнительного анализа, так как наличие разного рода конструктивных несовершенств и особенностей эксплуатации объектов приводят и переменности гиростатического момента. Одной из возможных причин этого является переменность масс роторов, установленных в теле-носителе. В данной роботе предпринята попытка изучить влияние переменности масс несомых тел на движение тела-носителя. При некоторых предположениях относительно движения несомых тел и закона изменения их масс получены уравнения движения механической системы, являющейся в некотором смысле обобщением гиростата, указан интеграл, аналогичный классическому интегралу энергии, и найдены два случая полной интегрируемости уравнений движения.

Уравнения движения

Рассматривается система связанных тел S_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$, одно из которых S_0 имеет неподвижную точку O и служит носителем остальных. Несомые тела закреплены без трения в теле-носителе каждое двумя точками своей оси вращения. Ось вращения каждого несомого тела проходит через его центр масс и является главной осью, а центральный эллипсоид инерции — эллипсоидом вращения. Предполагается, что в процессе движения этой системы массы несомых тел $m^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ изменяются со време нем вследствие отделения частиц $\delta m^{(i)}$, то есть несомые тела являются телами переменной массы в смиысле Мещерского [3]. Изменение масс происходит таким образом, что не нарушает динамическую симметрию несомых тел.

Система движется под действием известных внешних сил и дополнительных реактивных сил, обусловленных взаимодействием отделяющихся частиц и тел в момент отделения. Изменение массы тела S_i вследствие отде-

ления частиц с абсолютной скоростью $\vec{u}^{(i)}$ создает реактивную силу $\vec{\Phi}^{(i)} = \int\limits_{S^{(i)}} \vec{u}^{(i)}\, \delta\dot{m}^{(i)}$. Здесь $S^{(i)}$ — объем, занимаемый телом S_i.

Кинетический момент рассматриваемой системы относительно точки O равен

$$\vec{K} = J_o \vec{\omega} + \sum_i \int\limits_{S^{(i)}} (\vec{h} + \vec{\rho}^{(i)}) \times (\vec{\omega} \times \vec{h}^{(i)} + \vec{\varkappa}^{(i)} \times \vec{\rho}^{(i)})\, \delta m^{(i)} =$$

$$= J_o \vec{\omega} + \sum_i m^{(i)} \vec{h}^{(i)} \times (\vec{\omega} \times \vec{h}^{(i)}) + \sum_i \int\limits_{S^{(i)}} \vec{\rho}^{(i)} \times (\vec{\varkappa}^{(i)} \times \vec{\rho}^{(i)})\, \delta m^{(i)}.$$

Или, положив $J\omega = J_o\, \omega + \sum\limits_i [m^{(i)} \vec{h}^{(i)} \times (\omega \times \vec{h}^{(i)}) + B^{(i)} \vec{e}^{(i)} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}^{(i)})]$,

и обозначив проекции абсолютных угловых скоростей $\vec{\varkappa}^{(i)}$ несомых тел на оси их собственного вращения через $p^{(i)}$

$$p^{(i)} = \vec{\omega}\, \vec{e}^{(i)} + \varphi^{(i)}, \tag{1}$$

получим выражение

$$\vec{K} = J\vec{\omega} + \sum_i A^{(i)}\, p^{(i)}\, \vec{e}^{(i)}. \tag{2}$$

Здесь принято: $\vec{h}^i$ — вектор положения центра масс тела S_i; $\vec{\rho}^{(i)}$ — вектор положения частицы $\delta m^{(i)}$ тела S_i относительно его центра масс; $\vec{e}^{(i)}$ – единичный вектор оси вращения тела S_i; $A^{(i)}(t)$, $B^{(i)}(t)$ — осевой и экваториальный моменты инерции тела S_i; $\varphi^{(i)}$ — угол поворота S_i в носителе; J_o — тензор инерции тела носителя в точке O; $\vec{\omega}$ — обсолютная угловая скорость его вращения.

Предполагая, что в процессе движения центры масс несомых тел S_i не смещаются, вычислим главный момент реактивных сил как функцию относительных скоростей $\vec{v}^{(i)}$ частиц $\delta m^{(i)}$

$$\sum_i \int\limits_{S^{(i)}} (\vec{h}^{(i)} + \vec{\rho}^{(i)}) \times \vec{u}^{(i)}\, \delta\dot{m}^{(i)} =$$

$$= \sum_i \int\limits_{S^{(i)}} (\vec{h}^{(i)} + \vec{\rho}^{(i)}) \times \vec{v}^{(i)}\, \delta\dot{m}^{(i)} + \dot{J}\vec{\omega} + \sum_i \dot{A}^{(i)}\, p^{(i)}\, \vec{e}^{(i)}. \tag{3}$$

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений движения составим уравнения движения несомых тел S_i:

$$A^{(i)}\, \dot{p}^{(i)} = q^{(i)} + \vec{e}^{(i)} \int\limits_{S^{(i)}} \vec{\rho}^{(i)} \times \vec{v}^{(i)}\, \delta\dot{m}^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где $q^{(i)}$ — проекция на ось вращения i-того тела момента сил, действующих со стороны тела-носителя.

Используя теорему [4] об изменении кинетического момента относительно O для рассматриваемой механической системы и выражения (2)—(4), получим уравнения движения. В процессе движения системы главные оси инерции в точке O могут поворачиваться относительно носителя с угловой скорости $\vec{\Omega}$, которая предполагается известной функцией времени и зависит от изменения масс несомых тел. Тогда в проекциях на главные оси подвижной системы координат имеем следующие уравнения движения изучаемой системы тел

$$
\begin{aligned}
&J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\,\omega_2\,\omega_3 + (\sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_3^{(i)} - J_2\,\Omega_3)\,\omega_2 - (\sum_i A^{(i)}p^{(i)}\,e_2^{(i)} - J_3\,\Omega_2)\,\omega_3 + \\
&+ \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_3^{(i)}\,\Omega_2 - \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_2^{(i)}\,\Omega_3 = L_1 + N_1 - \Sigma\,(q^{(i)} + Q^{(i)})\,e_1^{(i)}, \\
&J_2\,\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\,\omega_3\,\omega_1 + (\sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_1^{(i)} - J_3\,\Omega_1)\,\omega_3 - (\sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_3^{(i)} - \\
&- J_1\,\Omega_3)\,\omega_1 + \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_1^{(i)}\,\Omega_3 - \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_3^{(i)}\,\Omega_1 = L_2 + N_2 - \\
&- \sum_i (q^{(i)} + Q^{(i)})\,e_2^{(i)}, \qquad (5) \\
&J_3\,\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\,\omega_1\,\omega_2 + (\sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_2^{(i)} - J_1\,\Omega_2)\,\omega_1 - (\sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_1^{(i)} - \\
&- J_2\,\Omega_1)\,\omega_2 + \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_2^{(i)}\,\Omega_1 - \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,e_1^{(i)}\,\Omega_2 = L_3 + N_3 - \\
&- \sum_i (q^{(i)} + Q^{(i)})\,e_3^{(i)},
\end{aligned}
$$

через J_1, J_2, J_3 обозначены главные моменты инерции системы, через N_1 N_2, N_3 — проекции на главные оси вектора

$$\vec{N} = \sum_i \int_{S^{(i)}} (\vec{h}^{(i)} + \vec{\rho}^{(i)}) \times \vec{v}^{(i)}\,\delta\dot{m}^{(i)},$$

а (6)

$$Q^{(i)} = \vec{e}^{(i)} \int_{S^{(i)}} \vec{\rho}^{(i)} \times \vec{v}^{(i)}\,\delta\dot{m}^{(i)}.$$

К уравнениям (5) следует присоединить уравнения (4).

Для замыкания уравнений движения в случае, когда внешние силы есть произвольные функции положения тела, к уравнениям (4), (5) необходимо добавить кинематические уравнения Эйлера

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= -(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta + \omega_3, \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{\sin\theta}\,(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi), \qquad (7) \\
\dot{\vartheta} &= \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi.
\end{aligned}
$$

В случае осесимметричного поля внешних сил (поле силы тяжести, центральное ньютоновское поле сил и т.д.) для замыкания уравнений движения можно использовать уравнения Пуассона

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \qquad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \qquad \dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2, \tag{8}$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — проекции на подвижные оси единичного вектора оси симметрии поля.

При произвольном измении масс несомых тел моменты реактивных сил будут зависеть от углов поворота этих тел относительно носителя. Тогда порядок системы уравнений движения ((1), (4), (5), (7) или (1), (4), (5), (8)) равен $2n + 6$. В некоторых случаях моменты реактивных сил не зависят от положения несомых тел, например, когда относительная скорость отделения частиц одинакова для всего тела S_i, или когда оси вращения несомых тел являются осями геометрической симметрии и для симметричных частиц скорости $\vec{v}^{(i)}$ ортогональны этим осям, равны по величине и противоположны по направлению. При этом в уравнения движения переменные $\varphi^{(i)}$ не входят и порядок системы понижается до $n + 6$.

Интегралы уравнений движения

Проблема инграрирования полученных уравнений движения еще более сложна, чем для случая гиростата. В отличие от последней завачи, в которой для консервативных сил имеется интеграл энергии [5], исследуемые уравнения допускают интеграл, аналогичный энергии, лишь при дополнительном ограничении на закон изменения масс несомых тел. Это ограничение носит тот же характер, что и принятое в роботе [6].

Пусть несомые тела вращаются свободно и относительные скорости отделения частиц коллинеарны скоростям точек тела, то есть $\vec{v}^{(i)} = \beta(\vec{\omega} \times \vec{h}^{(i)} + \vec{\varkappa}^{(i)} \times \vec{\rho}^{(i)})$. Учтем это в выражениях (6) для моментов реактивных сил, получим

$$\vec{N} = \beta \vec{\omega} \dot{J} + \beta \sum_i \dot{A}^{(i)} p^{(i)} e^{(i)}, \qquad Q^{(i)} = \beta \dot{A}^{(i)} p^{(i)} \tag{9}$$

Уравнения (5), (4) примут вид

$$\dot{J}_1 \omega_1 - \beta \dot{J}_1 \omega_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 + (\sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_3^{(e)} - J_2 \Omega_2) \omega_2 -$$

$$- (\sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_2^{(i)} - J_3 \Omega_2) \omega_3 + \sum A^{(i)} p^{(i)} e_3^{(i)} \Omega_2 - \sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_2^{(i)} \Omega_3 = L_1,$$

$$J_1 \omega_2 - \beta \dot{J}_2 \omega_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 + (\sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_1^{(e)} - J_3 \Omega_1) \omega_3 - \tag{10}$$

$$-\left(\sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_3^{(i)} - J_1 \Omega_3\right) \omega_1 + \sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_1^{(i)} \Omega_3 - \sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_3^{(i)} \Omega_1 = L_2,$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 - \beta \dot{J}_3 \omega_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 + \left(\sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_2^{(e)} - J_1 \Omega_2\right) \omega_1 -$$

$$-\left(\sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_1^{(i)} - J_2 \Omega_1\right) \omega_2 + \sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_2^{(i)} \Omega_1 - \sum_i A^{(i)} p^{(i)} e_1^{(i)} \Omega_2 = L_3,$$

$$A^{(i)} \dot{p}^{(i)} = \beta \dot{A}^{(i)} p^{(i)}. \tag{11}$$

Уравнения (11) легко интегрируются и дают

$$p^{(i)}(t) = C^{(i)} (A^{(i)}(t))^{\beta}, \tag{12}$$

$C^{(i)}$ — постоянные интегрирования. Из уравнений (10), предположив, что $\Omega_k = \mu(t) \omega_k$ $(k = 1,2,3)$, где $\mu(t)$, — некоторая непрерывная функция, можно получить

$$J_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + J_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + J_3 \omega_3 \dot{\omega}_3 - \beta (\dot{J}_1 \omega_1^2 + \dot{J}_2 \omega_2^2 + \dot{J}_3 \omega_3^2) = \vec{L} \vec{\omega}. \tag{13}$$

Если поле внешних сил осесимметрично и допускает силовую функцию вида $U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, то [1]

$$\vec{L} = grad_{\vec{\gamma}} U \times \vec{\gamma}. \tag{14}$$

Тогда $\vec{L} \vec{\omega} = \dot{U}$. При $\beta = -\dfrac{1}{2}$ ревенство (13) принимает вид $(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2)^{\cdot} = 2\dot{U}$, откуда следует интеграл

$$\frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) - U = \text{const}. \tag{15}$$

Таким образом, при сделанных предположениях относительно движения несомых тел и закона отделения их частиц движение изучаемой системы определяется уравнениями (10), (8) ($p^{(i)}(t)$ задаются формулами (12), а $\vec{L}$ — формулой (14)), которые допускают интеграл (15).

Интегрируемые случаи движения

Рассмотрим движение системы при отсутствии внешних сил и свободном вращении несомых тел. 1°. Предлопожим, что эаконы изменения масс несомых тел таковы, что моменты реактивных сил не зависят от положения этих тел относительно тела-носителя. Это дает замкнутость системы уравнений (4), (5) относительно переменных ω_1, ω_2, ω_3 и $p^{(i)}$. Покажем, что в этом случае уравнения можно проинтегрировать в квадратурах, если положить

$$J_2 = J_1, \qquad e_1^{(i)} = e_2^{(i)} = 0. \tag{16}$$

Уравнения (5), (4) теперь принимают вид

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1)\,\omega_2\,\omega_3 + \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,\omega_2 - J_1\,\Omega_3\,\omega_2 + J_3\,\Omega_2\,\omega_3 =$$

$$= N_1 - \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,\Omega_2,$$

$$J_1 \dot{\omega}_2 - (J_3 - {}_1)\,\omega_3\,J\omega_1 - \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,\omega_1 + J_1\,\Omega_3\,\omega_1 - J_3\,\Omega_1\,\omega_3 =$$

$$= N_2 + \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}\,\Omega_1,$$

$$J_3\,\dot{\omega}_3 - (\omega_1\,\Omega_2 - \omega_2\,\Omega_1)\,J_1 = N_3 - Q^{(i)},$$

Пусть

$$A^{(i)}\,\dot{p}^{(i)} = Q^{(i)},$$

$$\Omega_1 = \mu(t)\,\omega_1, \qquad \Omega_2 = \mu(t)\,\omega_2, \tag{17}$$

где $\mu(t)$ — некоторая непрерывная функция времени. Последние $n+1$ уравнений определяют зависимость от времени величин

$$p^{(i)} = \int_{t_0}^{t} \frac{Q^{(i)}(\tau)}{A^{(i)}(\tau)}\,d\tau \quad , \quad \omega_3 = \int_{t_0}^{t} \frac{N_3(\tau) - Q^{(j)}(\tau)}{J_3(\tau)}\,d\tau, \tag{18}$$

оставшиеся два уравнения составляют линейную систему, коэффициенты и слободные члены которой — некоторые известные функции времени

$$J_1(t)\,\dot{\omega}_1 + a(t)\,\omega_2 = N_1(t),$$

$$J_1(t)\,\dot{\omega}_2 - a(t)\,\omega_1 = N_2(t),$$

где

$$a\,(t) = (\mu + 1)\,(J_3\,\omega_3 + \sum_i A^{(i)}\,p^{(i)}) - J_1\,(\omega_3 + \Omega_3). \tag{19}$$

Эта система легко интегрируется в кдавратурах

$$\omega_1\,(t) = C_1 \sin\int_{t_0}^{t} \frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)} + C_2 \cos\int_{t_0}^{t} \frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)} + \sin\int_{t_0}^{t} \frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)} \cdot \int_{t_0}^{t} \left[\frac{N_1(\tau)}{J_1(\tau)} \sin\int_{t_0}^{\tau} \frac{a(\xi)d\xi}{J_1(\xi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{N_2(\tau)}{\mathcal{J}_1(\tau)} \cos\int_{t_0}^{\tau} \frac{a(\xi)d\xi}{\mathcal{J}_1(\xi)}\right] dt +$$

$$+ \cos\int_{t_0}^{t} \frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{N_1(\tau)}{J_1(\xi)} \cos\int_{t_0}^{\tau} \frac{a(\xi)d\xi}{J_1(\tau)} + \frac{N_2(\tau)}{J_1(\tau)} \sin\int_{t_0}^{\tau} \frac{a(\xi)d\xi}{J_1(\xi)}\right] d\tau, \tag{20}$$

$$\omega_2(t) = C_2 \sin\int_{t_0}^{t}\frac{s(\tau)d\tau}{J_1(\tau)} - C_1\cos\int_{t_0}^{t}\frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)} - \cos\int_{t_0}^{t}\frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{N_1(\tau)}{J_1(\tau)}\sin\int_{t_0}^{\tau}\frac{a(\xi)d\xi}{J_1(\xi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{N_2(\tau)}{J_1(\tau)}\cos\int_{t_0}^{\tau}\frac{a(\xi)d\xi}{J_1(\xi)}\right]d\tau + \sin\int_{t_0}^{t}\frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{N_1(\tau)}{J_1(\tau)}\cos\int_{t_0}^{\tau}\frac{a(\xi)d\xi}{J_1(\xi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{N_2(\tau)}{J_1(\tau)}\sin\int_{t_0}^{\tau}\frac{a(\xi)d\xi}{J_1(\xi)}\right]d\tau,$$

C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

2°. Часто встречающийся на практике случай, когда относительные скорости отделения частиц коллинеарны скоростям точек тела, также является интегрируемым. Действительно, тогда выражения (6) для моментов реактивных сил имеют вид (9), что вместе с условиями (16) приводит к следующим уравнениям движения

$$J_1\dot{\omega}_1 - \beta\dot{J}_1\omega_1 + (J_3 - J_1)\omega_2\omega_3 + (\sum_i A^{(i)}p^{(i)} - J_1\Omega_3)\omega_2 + J_3\Omega_2\omega_3 +$$

$$+ \sum_i A^{(i)}p^{(i)}\Omega_2 = 0,$$

$$J_1\dot{\omega}_2 - \beta\dot{J}_1\omega_2 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 - J_3\Omega_1\omega_3 - (\sum_i A^{(i)}p^{(i)} - J_1\Omega_3)\omega_1 -$$

$$- \sum_i A^{(i)}p^{(i)}\Omega_1 = 0,$$

$$J_3\dot{\omega}_3 - \beta\dot{J}_3\omega_3 - J_1(\Omega_2\omega_1 - \Omega_1\omega_2) = 0,$$

$$A^{(i)}\dot{p}^{(i)} = \beta\dot{A}^{(i)}p^{(i)}.$$

Последние n уравнений определяют зависимость от времени величин $p^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$

$$p^{(i)} = C^{(i)}(A^{(i)}(t))^{\beta}; \tag{21}$$

третье уравнение при условии (17) дает

$$\omega_3 = C_3 J_3^{\beta}(t), \tag{22}$$

$C^{(i)}$, C_3 — постоянные интегрирования. Для нахождения величин $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ получаем линейную систему дифференциальных уравнений, коэффициенты которой — известные функции времени

$$J_1\dot{\omega}_1 - \beta\dot{J}_1\omega_1 + a(t)\omega_2 = 0,$$

$$J_1\dot{\omega}_2 - \beta\dot{J}_1\omega_2 - a(t)\omega_1 = 0,$$

здесь $a(t)$ определено формулой (19). Решение этой системы легко записать в квадратурах

$$\omega_1(t) = J_1^{\beta}\left(C_1 \cos\int_{t_0}^{t}\frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)} - C_2 \sin\int_{t_0}^{t}\frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)}\right),$$

$$\omega_2(t) = J_1^{\beta}\left(C_1 \sin\int_{t_0}^{t}\frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)} + C_2 \cos\int_{t_0}^{t}\frac{a(\tau)d\tau}{J_1(\tau)}\right), \tag{23}$$

C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Итак, при указанных предположениях относительно закона изменения масс и условиях (16) получены два решения рассматриваемой задачи, в которых проекции угловой скорости тела-носителя и абсолютных угловых скоростей несомых тел определяются соотношениями (18), (20) и (21)—(23).

Применяя метод годографов кинематического истолкования движения тела [5], можно дать геометрическую картину движения тела-носителя в указанных случаях интегрируемости. Отметим, что, если массы несомых тел не изменяются со временем, то полученные решения совпадают с решением для гиростата (с постоянным гиростатическим моментом) при условиях Лагранжа и Жуковского [2]. Тело-носитель при этом совершает регуляную прецессию вокруг вектора кинетического момента.

Относительно найденных решений можно заключить, что если массы несомых тел, начиная с некоторого момента времени, остаются постоянными, то система становится гиростатом и, следовательно, в дальнейшем совершает регулярную прецессию. Этот же вывод справедлив и для предельного движения в случае, если величины масс несомых тел стремятся к некоторым постоянным асимптотически.

В заключение автор выражает благодарность профессору В. А. Вуйичичу за помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белецкий В. В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс.* „Наука", М., 1965.

[2] Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. *Классические задачи динамики твердога тела.* „Наукова думка", К., 1978.

[3] Мещерский И.В. *Работы по механике тел йеременной массы.* М., 1952.

[4] Новоселов В.С. *Аналитическая механика систем с переменными массами.* Изд-во Ленингр. ун-та, 1969.

[5] Харламов П.В. *Лекции по динамике твердого тела.* — Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965.

]6] Vujičić V. *O jednom pitanju obrtanja tela promenljive mase.* Математички весник, I (16), СВ. 2, 1964.

ON THE MOTION OF A RIGID BODY CARRYING BODIES OF VARIABLE MASSES

Summary

A system is considered, consisting in a carrying body and carried ones of variable masses. The motion of that system around a fixed point of the carrying body, in a field of given exterior forces and reactions, is studied.

Under determined conditions, concerning the motion of carried bodies and the rate of change of their masses, the equations of motion of the system are derived and an integral, analagous to the classical integral of energy, obtained. Two cases are found for which the differential equations of motion are completely integrable.

O KRETANJU KRUTOG TELA KOJE NOSI TELA PROMENLJIVE MASE

Izvod

Razmatra se sistem povezanih tela, od kojih je jedno kruto i javlja se kao nosač, a ostala noseća tela promenljive mase. Kretanje sistema tela oko nepokretne tačke tela-nosača izučava se u polju poznatih spoljašnjih sila i dejstvom reaktivnih sila.

Pri određenim pretpostavkama u odnosu na kretanja nošenih tela i zakon promene njihove mase dobijene su jednačine kretanja posmatranog mehaničkog sistema, izveden integral, adekvatan klasičnom integralu energije; nađena su dva slučaju pri kojima se diferencijalne jednačine kretanja mogu u potpunosti integraliti.

Людмила М. Ковалева,
Донецкий государственный университет,
340048 Донецк, СССР.