

BEITRAG ZUM PROBLEM DER INSTATIONÄREN STRÖMUNG ZÄHER FLÜSSIGKEIT IM KREISSZYSINDRISCHEN ROHR

Tomislav Zlatanovski

(Eingegangen im Juli 1981)

1. Einleitende Bemerkungen

Es wird der Fall instationärer Rohrströmung zäher Flüssigkeit behandelt, bei dem sich am Anfang der Rohrleitung eine Kreiselpumpe befindet, die notwendige Strömungsenergie zur Verfügung stellt. In dem Falle ist am Rohranfang die Abhängigkeit des Druckes von der Zeit nicht explizit bekannt, kann aber auf Grund der Pumpenkennlinie die Abhängigkeit des Druckes von dem Durchfluss, der als Funktion der Zeit ebenfalls noch unbekannt ist, angegeben werden.

Wir gehen von folgenden vereinfachenden Voraussetzungen aus:

- Die Rohrleitung ist ein gerades, horizontales, starres Rohr mit konstantem kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius R und der Länge L (s. Fig. 1).

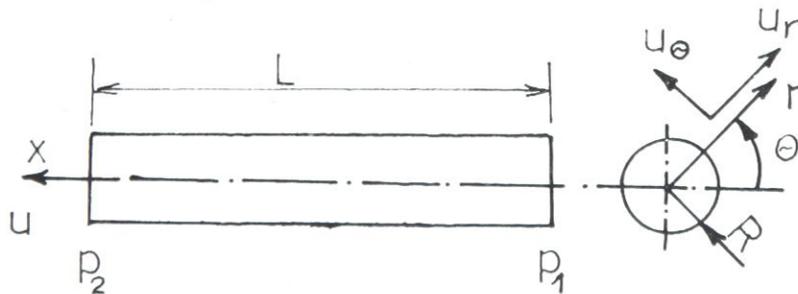


Fig. 1.

- Das Fluid ist Newtonsch und inkompressibel, $\rho = \text{const.}$
- Die Strömung ist isotherm, $T = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$
- Die Bahnen der Fluidteilchen sind parallel mit der Rohrachse.
- Es wirken keine äusseren Kräfte, $\vec{F} = 0$.
- Das Rohr ist vor Beginn der Strömung mit Flüssigkeit ausgefüllt. Der Druck am Rohranfang beginnt zu wirken mit dem augenblicklichen Öffnen des Absperrorgans an der Pumpendruckseite. Bis zu dem Augenblick hat die Pumpe mit nominaler Drehzahl gegen das geschlossene Absperrorgan an der Pumpendruckseite gearbeitet und den Druck p_0 vor dem Absperrorgan erzeugt.
- Die lokale Druckverluste in der Rohrleitung sind zu vernachlässigen.

Wir benutzen die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen und die Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten. Wegen der obigen Voraussetzungen ist die Strömung achsensymmetrisch, so dass sich die Strömungsgleichungen auf folgende eine Differentialgleichung reduzieren [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{p_1 - p_2}{\rho L} \quad (1)$$

Die Anfangs – und die Randbedingung lauten:

$$\begin{aligned} \text{für } t = 0: \quad u &= 0 \\ \text{für } r = R: \quad u &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

In unserem Falle herrscht am Rohranfang der von der Kreiselpumpe erzeugte Druck p_1 , während am Ende des Rohres der konstante atmosphärische Druck $p_2 = p_B$ herrschen möge.

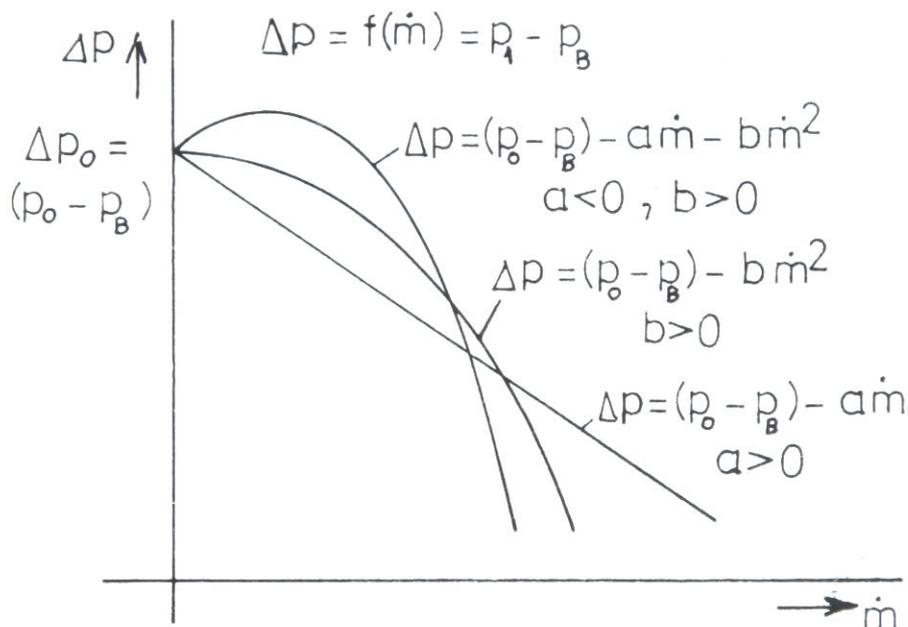


Fig. 2.

Es ist bekannt, dass der Förderdruck einer Zentrifugalpumpe Funktion des Massendruckflusses \dot{m} ist. Die Funktion $\Delta p = p_1 - p_2 = f(\dot{m})$ (s. Fig. 2) ist im allgemeinen einem Polynom zweiten Grades mit negativem Anfangskoeffizienten am nächsten. Sie hängt von der Pumpentype ab und wird experimentell ermittelt. Der linearen Abhängigkeit der Funktion $\Delta p = f(\dot{m})$ entspricht dem theoretischen Fall der Pumpendurchströmung, ohne Reibungs- und sonstige Verluste. Viele Typen von Zentrifugalpumpen haben angenähert lineare Abhängigkeit des Förderdruckes von dem Durchfluss.

2. Exakte Lösung des Problems der instationären Rohrströmung zäher Flüssigkeit für den Fall linearer Abhängigkeit des Druckes am Rohranfang von dem Durchfluss

Wir nehmen zuerst lineare Abhängigkeit des Druckes p_1 am Rohranfang von dem Durchfluss \dot{m} an. Mit p_0 bezeichnen wir den Druck am Rohranfang für $t = 0$, d.h. unmittelbar nach dem sofortigen Öffnen des Absperrorgans an der Pumpendruckseite.

$$p_1 = p_0 - a \cdot \dot{m}, \quad a - \text{Parameter} \quad (3)$$

$$p_2 = p_B = \text{const.}$$

Für den Massendurchfluss \dot{m} gilt:

$$\dot{m} = \rho \cdot Q = \rho \cdot 2\pi \int_0^R u(r, t) \cdot r \cdot dr \quad (4)$$

wo Q den volumetrischen Durchfluss durch das Rohr darstellt.

Damit geht die Strömungsgleichung (1) in eine Integro-Differentialgleichung über, in welcher die Geschwindigkeit $u = u(r, t)$ als die gesuchte unbekannte Funktion erscheint

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + P_1 - k \cdot \int_0^R u \cdot r \cdot dr \quad (5)$$

und wo wir noch die Abkürzungen

$$P_1 = \frac{p_0 - p_B}{\rho L}; \quad k = 2\pi \cdot \frac{a}{L} \quad (6)$$

eingeführt haben.

Zur Lösung der Gleichung (5) benutzen wir die Methode der funktionalen Laplace-Transformationen. Nach dem Übergang von der Originalfunktion u zur Bildfunktion u^* in der Gl. (5) und Benutzung der Bedingungen (2), bekommen wir mit p als Transformationsparameter:

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du^*}{dr} - \frac{p}{\nu} \cdot u^* = -\frac{P_1}{\nu} + \frac{k}{\nu} \cdot \int_0^R u^* \cdot r \cdot dr \quad (7)$$

$$\text{für } r = R: \quad u^* = 0 \quad (8)$$

Das unbekannte Integral auf der rechten Seite der Gl. (7), bzw. ihre ganze rechte Seite, ist nicht Funktion von r , weshalb wir sie als gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung behandeln können. Ihr allgemeines Integral lautet:

$$u^*(r, p) = A \cdot I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right) + B \cdot K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right) + \frac{P_1}{p} - \frac{k}{p} \int_0^R u^* \cdot r \cdot dr \quad (9)$$

Da für $r = 0$ die Macdonaldsche Funktion K_0 unendlich wird, müssen wir $B \cong 0$ nehmen.

Nach Multiplikation beider Seiten der Gl. (9) mit $r \cdot dr$ und anschliessender Integration in den Grenzen von 0 bis R und Benutzung bekannter Relationen zwischen den Besselschen Funktionen, bekommen wir:

$$\int_0^R u^* \cdot r \cdot dr = \frac{2p}{2p + kR^2} \cdot \left[A \cdot R \sqrt{\frac{v}{p}} \cdot I_1 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + \frac{R^2}{2} \cdot \frac{P_1}{p} \right] \quad (10)$$

Nach Ersetzen des letzten Ausdruckes in die Gl. (9) und Bestimmung der Konstante A aus der Bedingung (8), bekommen wir endgültig:

$$u^*(r, p) = -P_1 \cdot \frac{I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right) - I_0 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{p I_0 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + \frac{\pi R^2 a}{L} \cdot I_2 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} \quad (11)$$

Um die Originalfunktion u zu bestimmen, benutzen wir die Umkehrformel der Laplace-Transformation:

$$u(r, t) = -\frac{P_1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \cdot \frac{I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right) - I_0 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{p I_0 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + \frac{\pi R^2 a}{L} \cdot I_2 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} \cdot \frac{dp}{p} \quad (12)$$

Nach beiderseitiger Multiplikation der Gl. (12) mit $2\pi r \cdot dr$ und anschliessender Integration in den Grenzen von 0 bis R , erhalten wir die Umkehrformel zur Bestimmung des Durchflusses auf Grund des bekannten Laplace-Bildes:

$$Q(t) = \pi R^2 P_1 \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \cdot \frac{I_2 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{p I_0 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + \frac{\pi R^2 a}{L} \cdot I_2 \left(R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} \cdot \frac{dp}{p} \quad (13)$$

Die Grösse σ , die in den Grenzen der obigen Integrale erscheint, ist so zu nehmen, dass alle Singularitäten des Integranden in der komplexen p -Ebene links von der Geraden $\sigma - i\infty$ und $\sigma + i\infty$ liegen.

Das Integral auf der rechten Seite der Gl. (13) bestimmen wir durch Anwendung des Residuensatzes. Zu diesem Zweck müssen wir vorher alle singulären Punkte der Funktion unter dem Integralzeichen bestimmen, die wir wegen der bekannten Beziehung zwischen den Besselschen Funktionen reellen und imaginären Argumentes auch in folgender Form schreiben können (s. z.B. [1], [4]):

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{p F_2(p)} = \frac{e^{pt} \cdot \mathcal{J}_2 \left(iR \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{p \left[\frac{\pi R^2 a}{L} \cdot \mathcal{J}_2 \left(iR \sqrt{\frac{p}{v}} \right) - p \mathcal{J}_0 \left(iR \sqrt{\frac{p}{v}} \right) \right]} \quad (14)$$

Es lässt sich leicht schliessen, dass $p = 0$ kein singulärer Punkt der Funktion $F_1(p)/F_2(p)$ ist, so dass die Funktion $F(p)$ einen pol erster Ordnung im Koordinatenursprung haben wird.

Um auch die übrigen singulären Punkte der Funktion $F(p)$ zu bestimmen, führen wir die neue Veränderliche $z = x + iy$ ein:

$$z = iR \sqrt{\frac{p}{\nu}}; \quad p = -\nu \frac{z^2}{R^2} \quad (15)$$

Damit erhalten wir:

$$F_1(z) = e^{-\frac{\nu}{R^2} z^2} \cdot J_2(z) \quad (16)$$

$$F_2(z) = \frac{\pi R^2 a}{L} \cdot J_2(z) + \frac{\nu}{R^2} \cdot z^2 \cdot J_0(z) \quad (17)$$

Die Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ sind ganze transzendenten Funktionen, holomorph in der ganzen z -Ebene mit Ausschluss des unendlich fernen Punktes, der ein wesentlich singulärer Punkt dieser Funktionen ist. Deshalb sind die Pole der meromorphen Funktion $F(z) = F_1(z)/F_2(z)$, als einzige Singularitäten, die diese Funktion überhaupt haben kann, die Nullstellen der Funktion $F_2(z)$. Um die Pole von $F(z)$ zu ermitteln, müssen wir also alle Nullstellen von $F_2(z)$ bestimmen.

Man kann sich leicht überzeugen, daß für $a > 0$ die Funktion $F_2(z)$ keine rein imaginären Nullstellen haben kann. Eine Übersicht über die reellen Nullstellen der Funktion $F_2(z)$ können wir am zweckmässigsten durch graphische Darstellung der Funktionen

$$f_1(x) = -\frac{\nu L}{\pi R^4 a} = \text{const.} \quad (18)$$

und

$$f_2(x) = \frac{J_2(x)}{x^2 \cdot J_0(x)} \quad (19)$$

gewinnen. Die reellen Nullstellen von $F_2(z)$ befinden sich in den Abszissen der Schnittpunkte der Kurven $f_1(x)$ und $f_2(x)$ (s. Fig. 3).

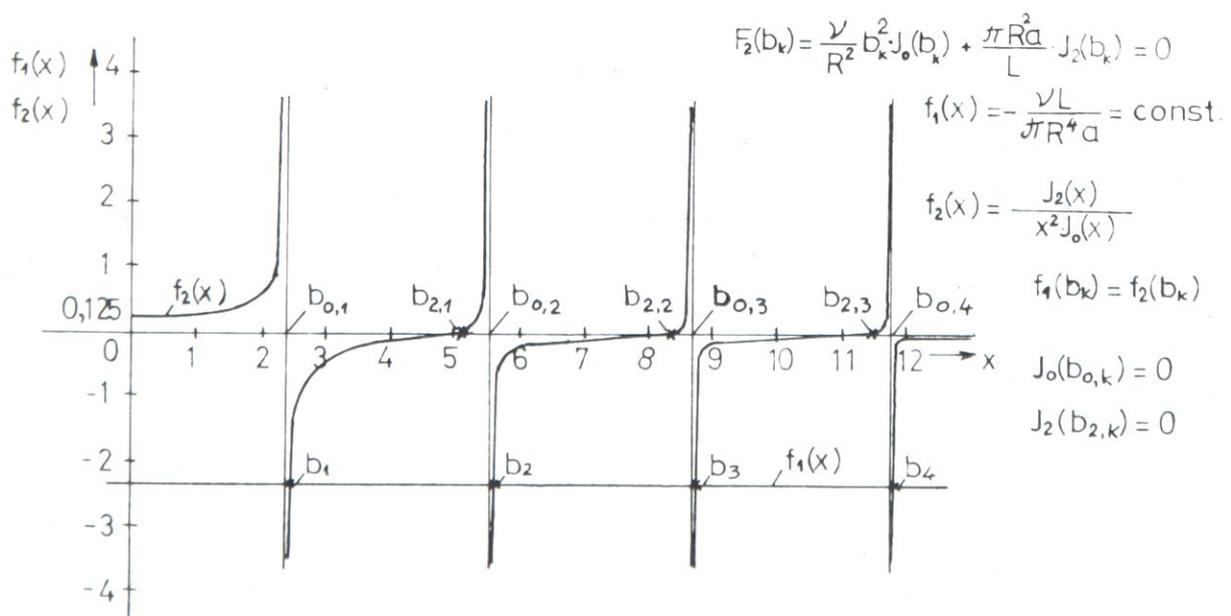


Fig. 3.

Man kann sich ebenfalls leicht überzeugen, dass die Funktion $F_2(z)$ unendlich viele reellen Nullstellen hat. Für $a > 0$ wird sich immer zwischen je zwei benachbarten Nullstellen $b_{2,k}$ und $b_{0,k}$ der Funktionen $f_0(x)$ und $f_2(x)$ je eine reelle Nullstelle b_k ($k = \pm 1, 2, \dots$) der Funktion $F_2(z)$ befinden. Dazu kommt noch die zweifache Nullstelle ± 0 im Koordinatenursprung. Falls $a < 0$ ist, wird die Funktion $F_2(z)$ ebenfalls unendlich viele reellen Nullstellen haben, die sich jeweils in den Abzissen der Schnittpunkte der Kurven $f_1(x)$ und $f_2(x)$ befinden. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. Für $-\infty < a < -8\sqrt{L}/\pi R^4$ wird die Funktion $F_2(z)$ je eine Nullstelle in jedem Intervall $b_{2,k} < x < b_{0,k}$ haben. Dazu kommt noch ein Paar rein imaginärer Nullstellen, die wir am besten graphisch aus der Gleichung

$$F_2(iy) = \frac{\nu}{R^2} \cdot y^2 \cdot I_0(y) + \frac{\pi R^2 a}{L} \cdot I_2(y) \quad (20)$$

bestimmen können (s. Fig. 4). 2. Für $-8\sqrt{L}/\pi R^4 < a < 0$ wird die Funktion $F_2(z)$ keine rein imaginären Nullstellen haben. Sie wird je eine reelle Nullstelle in jedem Intervall zwischen zwei nachfolgenden Nullstellen der Funktionen $f_2(x)$ und $f_0(x)$, d. h. auch im Intervall $0 < x < b_{0,1}$, haben.

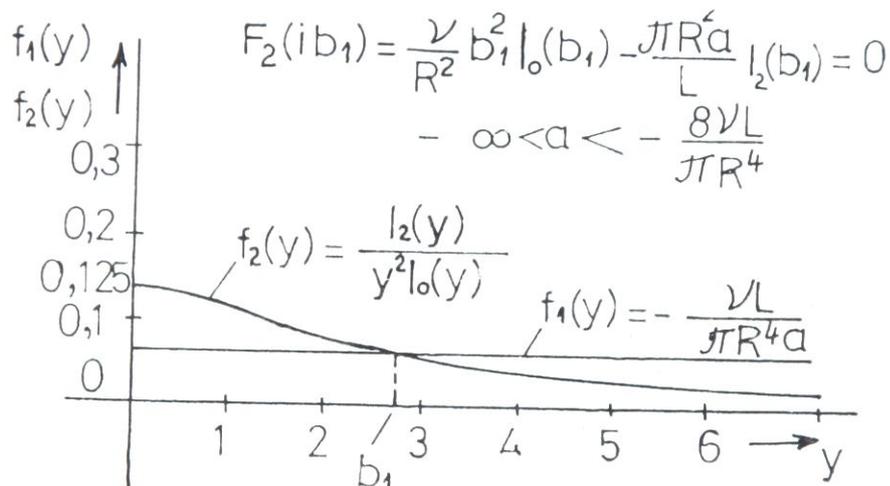


Fig. 4.

Das sind auch alle Nullstellen, die die Funktion $F_2(z)$, abhängig von dem Parameter a , überhaupt haben kann. Komplexe (d. h. komplex konjugierte) Nullstellen kann die Funktion $F_2(z)$ mit Rücksicht auf den physikalischen Sinn des Prozesses den wir beschreiben, nicht haben. Das lässt sich auch auf rein mathematischem Wege beweisen, zum Beispiel durch Anwendung des Satzes von Rouché aus der Funktionentheorie (s. z. B. [3], Teil II, Abschn. IV/2.2).

Damit haben wir auch alle von Null verschiedenen Pole der meromorphen Funktion $F(p)$ bestimmt. Das sind:

$$p_k = -\nu \frac{b_k^2}{R^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Alle diese Pole sind reell und einfach und liegen links vom Koordinatenursprung, mit Ausnahme des Falles, wenn $-\infty < a < -8\sqrt{L}/\pi R^4$ gilt, in welchem Falle neben den reellen auch ein Paar rein konjugiert imaginäre Pole existieren.

Mit Rücksicht darauf kann man den bekannten Heavisideschen Entwicklungssatz für meromorphe Funktionen anwenden. Für $Q(t)$ bekommen wir damit endgültig:

$$Q(t) = \frac{\pi R^4 P_1}{8\nu} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi R^4 a}{8\nu L}} \cdot \left[1 - 32 \left(1 + \frac{\pi R^4 a}{8\nu L} \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu}{R^2} b_k^2 t}}{\left(b_k^2 - \frac{\pi R^4 a}{\nu L} \right)^2 + \frac{8\pi R^4 a}{\nu L}} \right] \quad (22)$$

Für $a = 0$ wird $b_k = b_{0,k}$ und man bekommt die bekannte Lösung für den Fall, dass am Rohranfang ständig der konstante Druck $p_1 = p_0$ herrscht (s. [2], Abschn. II/4).

Für $t \rightarrow \infty$ bekommt man die bekannte Formel für den Durchfluss für den Fall stationärer laminarer Strömung durch kreiszylindrisches Rohr, an wessen Rohranfang eine Pumpe mit der Betriebskennlinie $\Delta p = (p_0 - p_B) - a\dot{m}$ für die Aufrechterhaltung der Strömung sorgt. Im Arbeitspunkt des Systems Pumpe – Rohrleitung (Schnittpunkt zwischen der Pumpenkennlinie und der Rohrleitungskennlinie) ist der Pumpenförderdruck am Rohranfang bei stationärer Strömung gleich dem gesamten Druckabfall in der Rohrleitung (s. Fig. 5). Wenn wir nur den Reibungsdruckabfall nach Poiseuille berücksichtigen, dann bekommen wir aus der erwähnten Bedingung die Gleichung:

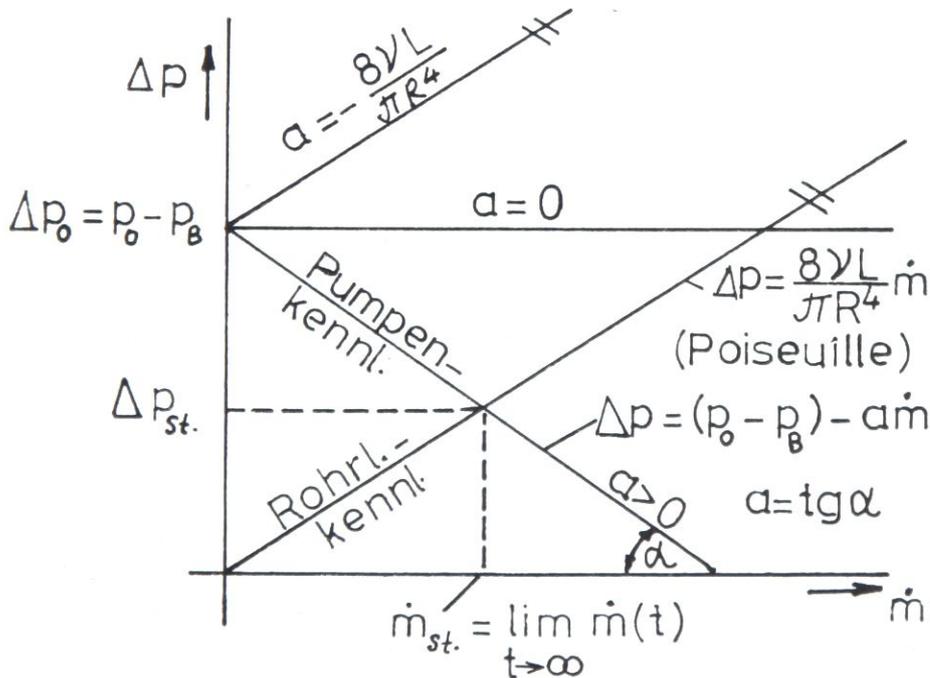


Fig. 5.

$$Q_{st} = \frac{\pi R^4 P_1}{8\nu} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi R^4 a}{8\nu L}} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \quad (23)$$

Der Fall $a < 0$ ist mehr von theoretischer Natur. Es fällt auf, dass für $a < -8\nu L / \pi R^4$ sich niemals ein stationärer Betrieb einstellen wird, was sich mit der Existenz eines Paares rein imaginärer Nullstellen der Funktion $F_2(z)$ erklärt.

Wenn wir auf prinzipiell die gleiche Weise auch das Integral für $u(r,t)$ auf der rechten Seite der Gl. (12) lösen, bekommen wir:

$$u(r,t) = \frac{R^2 P_1}{4 \nu} \cdot \left\{ 1 - \frac{r^2}{R^2} - 8 \left(1 + \frac{\pi R^4 a}{8 \nu L} \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu}{R^2} \cdot b_k^2 \cdot t} \cdot \left[\mathcal{J}_0 \left(\frac{r}{R} b_k \right) - \mathcal{J}_0(b_k) \right]}{\left[b_k^3 - \frac{\pi R^4 a}{\nu L} \left(b_k - \frac{4}{b_k} \right) \right] \cdot \mathcal{J}_1(b_k) - 2 \left(\frac{\pi R^4 a}{\nu L} + b_k^2 \right) \mathcal{J}_0(b_k)} \right\} \quad (24)$$

Aus dieser Formel erkennen wir, dass das Geschwindigkeitsprofil nur für $t \rightarrow \infty$ parabolisch wird. Für $a=0$, dh. $b_k = b_{0,k}$, bekommen wir die bekannte Formel für die Geschwindigkeit für den Fall $p_1 = p_0 = \text{const.}$ (s. [2], Gl. 4.16). Wenn wir beide Seiten der Gl. (24) mit $2\pi r \cdot dr$ multiplizieren und anschliessend von 0 bis R integrieren, bekommen wir den schon gefundenen Ausdruck für den Durchfluss $Q(t)$, s. Gl. (22), was die Richtigkeit der gewonnenen Resultate bestätigt.

Für die Schubspannung an der Rohrwand bekommen wir:

$$\tau(r,t)_{r=R} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho R P_1}{1 + \frac{\pi R^4 a}{8 \nu L}} \cdot \left\{ 1 - 4 \left(1 + \frac{\pi R^4 a}{8 \nu L} \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \cdot e^{-\frac{\nu}{R^2} \cdot b_k^2 \cdot t} \cdot \mathcal{J}_1(b_k)}{\left[b_k^3 - \frac{\pi R^4 a}{\nu L} \left(b_k - \frac{4}{b_k} \right) \right] \cdot \mathcal{J}_1(b_k) - 2 \left(\frac{\pi R^4 a}{\nu L} + b_k^2 \right) \cdot \mathcal{J}_0(b_k)} \right\} \quad (25)$$

Die Anfangswerte für die Geschwindigkeit, den Durchfluss und die Schubspannung können wir erhalten, wenn wir in dem Laplace-Bild der genannten Grössen $p \rightarrow \infty$ gehen lassen. Auf diese Weise überzeugen wir uns leicht, dass für $t = 0$ alle diese Anfangswerte gleich Null sind. Aus den gewonnenen Lösungen für diese Grössen, s. Gl. (22), (24) und (25), schliessen wir, dass das möglich ist, nur wenn in diesen Gleichungen die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden. Daraus ergeben sich für die Summen in den eckigen Klammern bestimmte Ausdrücke, die für sich selbst interessante, sonst schwer beweisbare mathematische Resultate darstellen.

Bei der praktischen Berechnung der Strömungsgrössen nach den Formeln (22), (24) und (25) genügt es nur einige Anfangsglieder der Summenreihen, die in diesen Formeln erscheinen, zu berechnen, da diese Summen sehr schnell konvergieren. Ausserdem kann man für $|\nu L / \pi R^4 a| \geq 0,5$ mit guter Genauigkeit $b_k \approx b_{0,k}$ für $k = 2, 3, \dots$ (s. Fig. 3) nehmen.

3. Der Fall parabolischer Abhängigkeit des Rohranfangsdruckes von dem Durchfluss

In diesem Falle lässt sich keine explizite exakte Lösung wie bei der linearen Druckabhängigkeit von dem Durchfluss gewinnen. Für $\Delta p = (p_0 - p_B) - a\dot{m} - b\dot{m}^2$ lässt sich die Strömungsgleichung (1) in folgende überführen:

$$Q(t) = \frac{\pi R^4 P_1}{8 \nu} \cdot \left[1 - 32 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu}{R^2} \cdot b_{0,k}^2 \cdot t}}{b_{0,k}^2} \right] - \frac{4 \pi R^2}{L} \cdot \int_0^t [a \cdot Q(\tau) + \rho b \cdot Q^2(\tau)] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu}{R^2} \cdot b_{0,k}^2 \cdot (t-\tau)}}{b_{0,k}^2} \cdot d\tau \quad (26)$$

Das ist eine nichtlineare Integralgleichung vom Abelschen Typ für die un- bekannte Funktion $Q(t)$, die sich nicht explizit lösen lässt. Für $a = b = 0$ bekommt man aus dieser Gleichung die bekannte Lösung für den Fall $p_1 = p_0 = \text{const.}$, [2]. Für $b=0$, $a \neq 0$, haben wir die Lösung im vorigen Abschnitt auf andere Weise gefunden. Für den Fall parabolischer Druckabhängigkeit von dem Durchfluss am Rohranfang müssen wir uns daher mit Näherungslösungen begnügen, s. nächster Abschnitt.

4. Näherungslösungen unter der Annahme von Laminarität wie bei der stationären Laminarströmung

Die Laminarität der instationären Rohrströmung wird oftmals in der Praxis mit der stationären Laminarströmung identifiziert. Das ermöglicht eine verhältnismässig schnelle Ermittlung einer für die Praxis genügend genaue Näherungslösung des Problems.

Wir setzen voraus, dass am Rohranfang folgende allgemeine Abhängigkeit des Druckes von dem Durchfluss herrscht:

$$\Delta P = (p_0 - p_B) - a \cdot \dot{m} - b \cdot \dot{m}^2 \quad (27)$$

Unter den im Abschnitt 1. gemachten Voraussetzungen über die Strömung und das Strömungssystem und der obigen zusätzlichen Voraussetzung über die Laminarität der Strömung, die darauf hinausläuft, dass man für die Reibungskraft im Rohr den Darcy-Weissbachschen Zusammenhang einzusetzen hat, erhält man folgende Differentialgleichung für den Durchfluss Q :

$$\frac{dQ}{dt} = \pi R^2 P_1 - \left(\frac{8 \nu}{R^2} + \frac{\pi R^2 a}{L} \right) \cdot Q - \frac{\pi R^2 \rho b}{L} \cdot Q^2 \quad (28)$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt. Mit der Anfangsbedingung $Q(t) = 0$ für $t = 0$, erhält man die Lösung:

$$\frac{Q}{Q_{st}} = \frac{1 - e^{-\frac{8\nu}{R^2} \cdot \left(1 + \frac{\pi R^4 a}{8\nu L}\right) \cdot \sqrt{1 + A \cdot b} \cdot t}}{1 + \frac{\sqrt{1 + A \cdot b} - 1}{\sqrt{1 + A \cdot b} + 1} \cdot e^{-\frac{8\nu}{R^2} \cdot \left(1 + \frac{\pi R^4 a}{8\nu L}\right) \cdot \sqrt{1 + A \cdot b} \cdot t}} \quad (29)$$

$$t = \frac{R^2}{8\nu} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi R^4 a}{8\nu L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + A \cdot b}} \cdot \ln \frac{1 + \frac{\sqrt{1 + A \cdot b} - 1}{\sqrt{1 + A \cdot b} + 1} \cdot \frac{Q}{Q_{st}}}{1 - \frac{Q}{Q_{st}}} \quad (30)$$

wobei wegen der übersichtlicheren Schreibweise neben P_1 noch die Abkürzung

$$A = \left[\frac{2 \cdot \frac{\pi R^4}{8\nu L}}{1 + \frac{\pi R^4 a}{8\nu L}} \right]^2 \cdot (p_0 - p_B) = \text{const} > 0 \quad (31)$$

eingeführt wurde.

Der Grenzwert für den Durchfluss für $t \rightarrow \infty$ lautet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \frac{\pi R^4 P_1}{8\nu} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi R^4 a}{8\nu L}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + A \cdot b} + 1} = Q_{st}. \quad (32)$$

Für $t = 0$ und $t \rightarrow \infty$ stimmen die gewonnenen Resultate mit den exakten, bzw. mit den Werten, die der stationären Laminarströmung entsprechen, überein. Für andere Werte der Variablen t ergeben sich dagegen keine übereinstimmenden Werte. Wie man aus numerischen Beispielen ersehen kann, sind diese Abweichungen, vom praktischen Standpunkt her betrachtet, nicht gross.

5. Ergebnisse eines numerischen Beispiels

Für eine gegebene Pumpenanlage zum Transport von mittelschwerem Heizöl von einem Behälter zum anderen sind folgende Angaben bekannt:

Massendurchfluss durch die Rohrleitung:	$\dot{m}_{st} = 20 \text{ kg/s}$
Spezifische Dichte des Heizöls:	$\rho = 865 \text{ kg/m}^3$
Kinematische Zähigkeit des Heizöls:	$\nu = 60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Länge der Rohrleitung:	$L = 23.000 \text{ m}$
Rohrhalbmesser:	$R = 0,11 \text{ m}$

Die Einzelwiderstände und die Flüssigkeitsstanddifferenz in den Behältern sind zu vernachlässigen.

Es ist vorauszusetzen, dass das Rohr kreisförmigen Querschnitts, gerade, waagrecht und starr ist.

Als Lösung ist die Abhängigkeit des Durchflusses von der Zeit nach dem augenblicklichen Öffnen des Absperrorgans an der Pumpendruckseite bis zur Einstellung des Beharrungszustandes für vier Typen von Pumpenkennlinien (graphisch und analytisch in Fig. 6 dargestellt) berechnet und in Fig. 7 kurvenmässig wiedergegeben worden.

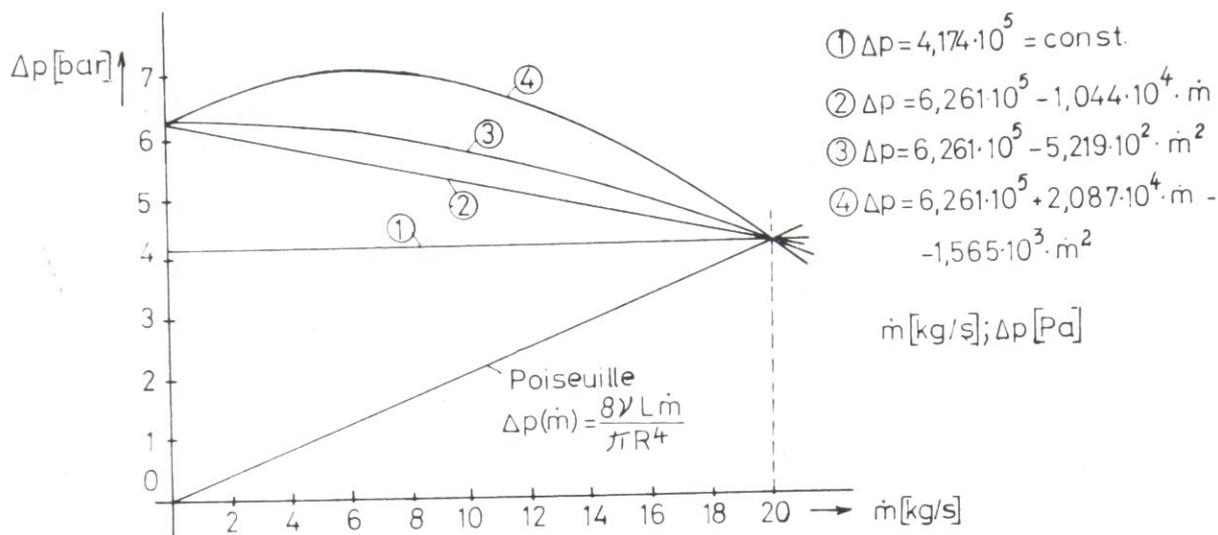


Fig. 6.

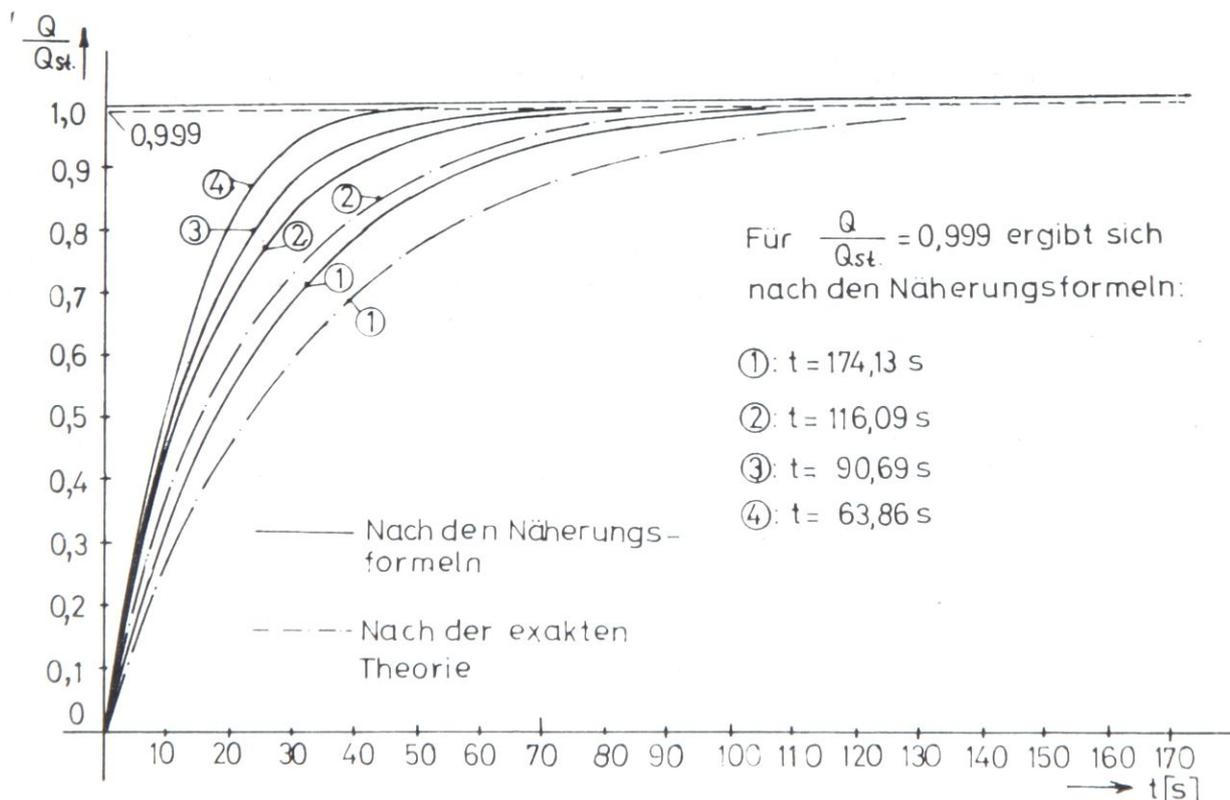


Fig. 7.

* *Bemerkung.* Über diese Arbeit hat der Verfasser am 15. jugoslawischen Kongress für theoretische und angewandte Mechanik im Juni 1981 in Kupari berichtet.
Tomislav Zlatanovski, Rafinerija — Skopje

L I T E R A T U R

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I. — Editors, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, inc., New York, 1970.
- [2] Ašković, R. *Dinamika viskoznog nestišljivog fluida*, poslediplomski kurs na mašinskom fakultetu, II deo, Beograd 1971.
- [3] Priwalow, I. *Einführung in die Funktionentheorie*, Teubner-Verlag Leipzig, 1965.
- [4] Smirnow, W. *Lehrgang der höheren Mathematik*, Teil III/2, S. 448, VEB Deutsches Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.

A CONTRIBUTION TO THE PROBLEM OF NON STATIONARY
FLOW OF A VISCOUS FLUID THROUGH PIPES

S u m m a r y

By using the method of Laplace Transformations in solving the partial differential equations an exact solution to the problem of non stationary rectilinear flow of viscous fluid through a circular pipe for the case when a linear dependence exists between the pressure and the flow rate at the pipe beginning has been presented. Here the case when a parabolic dependence between the pressure and the flow rate exists at the beginning of the pipe has also been considered. Finally, an approximate solution to the problem has been also presented, assuming that there is laminarity of the non stationary flow, similarly to the case of stationary laminar flow of a viscous fluid through a pipe.

PRILOG PROBLEMU NESTACIONARNOG STRUJANJA
VISKOZNE TEČNOSTI U CEVIMA

I z v o d

Primenom metode Laplasovih transformacija na rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina, dato je egzaktno rešenje problema nestacionarnog pravoliniskog strujanja viskozne tečnosti kroz kružnu cev za slučaj da pritisak na početku cevi linearno zavisi od protoka. Razmatran je slučaj kada na početku cevi vlada parabolična zavisnost pritiska od protoka. Dato je i približno analitičko rešenje problema pod pretpostavkom laminarnosti nestacionarnog strujanja kao kod stationarnog laminarnog strujanja viskozne tečnosti kroz kružnu cev.

Tomislav Zlatanovski, Rafinerija — Skopje
91000 Skopje, Kosta Novaković 6