TEORIJSKA I PRIMENJENA **MEHANIKA** 8, pp. 133—138, 1982, UDK 531.4

ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫЙ ВИД МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ПОСЛЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЛИУВИЛЛЕВЫХ СИСТЕМ

Я. В. Татаринов

(Поступило 10 июля 1981)

Показано, что в лиувиллевых системах с двумя степенями свободы множество точек, в которые можно попасть из произвольно зафиксированного начального положения с данной по модулю начальной скоростью, имеет вид криволинейного восьмиугольника, расположенного в области возможности движения с соответствующей энергией. При возмущении этот восьмиугольник переходит в некоторую близкую область.

1. **Определение.** Пусть есть система с двумя степенями свободы,

$$K(x,\dot{x}) = T + V = \frac{1}{2}\,\Sigma\, g^{ij}(x)\,\dot{x}_i\,\dot{x}_j + V(x)$$

ее интеграл энергии. Через

$$V^k = \{x :\ V(x) \leqslant k\} \tag{1}$$

обозначеним область возможности движения с энергией k. Пусть $\int(x_0, \dot{x}_0)$ — траектория движения с заданными начальным положением x_0 и начальной скоростью $\dot{x}_0$. Множеством достижимости $A^{v_0}(x_0)$ называется замыкание объединения всех траекторий таких движений, которые порходят через точку x_0 с заданной по модулю (в смысле метрики многообразия положений, задаваемой живой силой) скоростью $v_0 = |\dot{x}_0| = \sqrt{\Sigma\, g^{ij}\, \dot{x}_i^\circ\, \dot{x}_j^\circ}$:

$$A^{v_0}(x_0) = \overline{\bigcup_{|\dot{x}_0| = v_0} \int(x_0, \dot{x}_0)}$$

Так, в задаче Кеплера множество достижимости в случае планетарных движений ограничено эллипсом безопасности.

Заметим, что замыкание объединения множеств равно замыканию объединения замыканий этих же множеств; в частности,

$$\overline{\bigcup \int(x_0, \dot{x}_0)} = \overline{\bigcup \overline{\int(x_0, \dot{x}_0)}} \tag{2}$$

и потому в данном только что определении можно брать объединение замыканий траекторий. У всех движений с рассматриваемыми начальными условиями одна и та же полная энергия

$$k = V(x_0) + \frac{1}{2}\, v_0^2$$

Поэтому можно писать и $A^k(x_0)$. Очевидно, что

$$A^k(x_0) \subset V^k \tag{3}$$

Если $V \not\equiv \mathrm{const}$, то $A^k(x_0)$, вообще говоря, далеко не исчерпывает все V^k.

Из одной теоремы В.В. Козлова вытекает, что множество достижимости всегда имеет общую точку с границей сответствующей области возможности движения, так как через данную точку всегда проходит движение, вдостигающее границы [1] Например, в случае гармонического осциллятора

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{\mathcal{K}}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad \mathcal{K} > 0$$

область возможности движения есть круг

$$V^k = \left\{x_1^2 + x_2^2 \leqslant \frac{2k}{\mathcal{K}}\right\},$$

а множество достижимости ($x_{20} = 0$ лишь для простоты)

$$A^{v_0}(x_{10}, 0) = \left\{\frac{\omega^2 x_1^2}{\omega^2 x_{10}^2 + v_0^2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{v_0^2} \leqslant 1\right\}, \omega = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{m}}$$

есть эллипс, концами большой полуоси упирающийся в границу круга V^k.

2. **Основной пример.** Рассмотрим теперь бигармонический осциллятор

$$m\ddot{x}_1 = -\mathcal{K}_1 x_1, \quad m\ddot{x}_2 = -\mathcal{K}_2 x_2, \quad \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 > 0.$$

Имеют место квадратичные интегралы

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 x_1^2 + \mathcal{K}_2 x_2^2) = k,$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 x_1^2 - \mathcal{K}_2 x_2^2) = l.$$

Предположим, что отношение частот колебаний по каждой оси

$$\upsilon = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_i}{m}}$$

есть иррациональное число. Тогда замыкание любой траектории представляет собой прямоугольник

$$\overline{\int (x_0, \dot{x}_0)} = \left\{|x_1| \leqslant \sqrt{\frac{k+l}{\mathcal{K}_1}}, |x_2| \leqslant \sqrt{\frac{k-l}{\mathcal{K}_2}}\right\}, \tag{4}$$

вершины которого лежат на границе области возможности движения (1), а именно

$$V^k = \{\mathcal{K}_1 x_1^2 + \mathcal{K}_2 x_2^2 \leqslant 2k\}. \tag{5}$$

Легко видеть теперь, что множество достижимости в силу (2) есть объединение непрерыного семейства прямоугольников (4), а именно

$$A^k(x_{10}, x_{20}) = V^k \cap \left\{|x_1| \leqslant \sqrt{\frac{2k - \mathcal{K}_2 x_{20}^2}{\mathcal{K}_1}},\ |x_2| \leqslant \sqrt{\frac{2k - \mathcal{K}_1 x_{10}^2}{\mathcal{K}_2}}\right\} \tag{6}$$

Это, вообще говоря, криволинейный восьмиугольник, часть сторон которого суть куски границы эллипса V^k, часть — вертикальные или горизонтальные отрезки; множество (6) заполняет всю область (5) только при $x_{10} = x_{20} = 0$. Если ввести переменные угол-действие $\delta \bmod 2\pi$, ρ в этой задаче, то гамильтониан

$$K = \omega_1 \rho_1 + \omega_2 \rho_2$$

интегральные торы в фазовом пространстве проектируются при отображении проекции

$$(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \to (x_1, x_2)$$

на прямоугольники (4).

3. **Обобщение.** Аналогичные наблюдения можно сделать в случае любой лиувиллевой системы. Пусть лагранжиан

$$F = \frac{1}{2}\, f_1(x_1) + f_2(x_2))\,(a_1(x_1)\,\dot{x}_1^2 + a_2(x_2)\,\dot{x}_2^2) - \frac{V_1(x_1) + V_2(x_2)}{f_1(x_1) + f_2(x_2)}$$

и в канонических переменных

$$K = \frac{1}{f_1(x_1) + f_2(x_2)}\left(\frac{y_1^2}{2a_1(x_2)} + \frac{y_2^2}{2a_2(x_2)} + V_1(x_1) + V_2(x_2)\right).$$

Имеются другие квадратичные интегралы

$$L = \frac{y_1^2}{2a_1} + V_1 - f_1 K = l, \quad L' = \frac{y_2^2}{2a_2} + V_2 - f_2 K = -l$$

независимые от K и в сумме равные нулю. Переменные разделяются:

$$y_1 = \pm\sqrt{2a_1(l + Kf_1 - V_1)},\ y_2 = \pm\sqrt{2a_2(-l + kf_2 - V_2)},$$

так что при заданных k, l в фазовом пространстве получим тор,

$$I^{kl} = \{K = k, L = l\}$$

при условии, что множества

$$[x_i^-(k,l), x_i^+(k,l)] = \{(-1)^{i-1}\, l + kf_i(x_i) - V_i(x_i) \geqslant 0\}$$

суть отрезки по переменным x_i. При отображении

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \to (x_1, x_2)$$

тор проектируется в криволинейный прямоугольник (это действительно прямоугольник в метрике на многообразии положений)

$$\{l + kf_1 - V_1 \geqslant 0, \quad -l + kf_2 - V_2 \geqslant 0\}. \tag{7}$$

Примером такой ситуации может служить обобщенная задача двух неподвижных центров: в ней после исключения игнорируемой координаты получается система, лиувиллева структура которой позволяет детально исследовать типы движений [2].

В лиувиллевой системе легко ввести переменные угол-действие по стандартной схеме (см. 3, стр. 347—356): действия

$$\rho_i(k,l) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_i^-(k,l)}^{x_i^+(k,l)} \sqrt{2a_i(x_i)\,(-1)^{i-1}\,l + kf_i(x_i) - V_i(x_i)}\,dx_i$$

обратные функции $k = \bar{K}(\rho_1, \rho_2)$, $l = \bar{L}(\rho_1, \rho_2)$ суть гамильтониан и второй интеграл в новых переменных, а решение уравнений Галмильтона — Якоби

$$\frac{1}{2a_1(x_1)}\,\frac{\partial}{\partial x_1} S_1(x_1, \rho_1, \rho_2) + V_1(x_1) - f_1(x_1)\,\bar{K}(\rho_1, \rho_2) = \bar{L}(\rho_1, \rho_2)$$

$$\frac{1}{2a_2(x_2)}\,\frac{\partial}{\partial x_2} S_2(x_2, \rho_1, \rho_2) + V_2(x_2) - f_2(x_2)\,\bar{K}(\rho_1, \rho_2) = -\,\bar{L}(\rho_1, \rho_2)$$

дает производящую функцию

$$S = S_1(x_1, \rho_1, \rho_2) + S_2(x_2, \rho_1, \rho_2)$$

каноническойй замены переменных

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \to \sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2, \quad \sigma_i \bmod 2\pi.$$

На интегральных торах $I^{kl} = I^{\rho_1 \rho_2}$ располагаются условнопериодические решения

$$\sigma_i = \sigma_{i0} + \omega_i\,(\rho)t$$

с частотами

$$\omega_i\,(\rho_1, \rho_2) = \frac{\partial}{\partial \rho_i}\,\bar{K}\,(\rho_1, \rho_2).$$

Если частоты на данном торе несоизмеримы (отношение их иррационально), то на многообразии положений замыкание траектории движения есть прямоугольник (7). Допустим, что система невырождена, то есть

$$\det \frac{\partial\,(\omega_1, \omega_2)}{\partial\,(\rho_1, \rho_2)} = \det \left\| \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial \rho_i\,\partial \rho_j} \right\| \neq 0.$$

При построении множества достижимости у всех траекторий $k = V(x_0) + \dfrac{v_0^2}{2}$ одно и то же, а l меняется в некоторых пределах $[l_1(x_0, k),\ l_2(x_0, k)]$, причем для всюду плотного множества l из $[l_1, l_2]$ соотвестствующие частоты $\omega_i\,(\rho(k,l))$ несоизмеримы, а замыкание траектории — прямоугольник, концы которого лежат на границе области возможности движения. Поэтому так же, как и в случае бигармонического осциллятора, область достижимости имеет вид криволинейного восьмиугольника, который есть проекция семейства торов

$$I^{kl} : l \in [l_1(x_0, k),\quad l_2(x_0, k)],$$

лежащих на одном уровне энергии $K = k$. Вся эта картина непрерывно зависит от x_0, k или, что эквивалентно, от x_0, v_0.

4. **Возмущение.** Допустим теперь, что лиувиллева система возмущена, например, за счет изменения потенциала; возможно за счет изменения также и в метрике многообразия положений (нам важно лишь, чтобы система оставалась натуральной, то есть имело смысл говорить о многообразии положений и после возмущений). По теореме А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений большая часть торов с несоизмеримыми частотами при возмущении сохраняется, а доля разрушающихся торов мала вместе с возмущением. Как заметил в свое время В. И. Арнольд, а системах с двумя степенями свободы двумерные интегральные торы, сохраняющиеся при возмущении, делят трехмерные уровени энергии подобно тому, как кривая делит двумерную поверхность. Это наблюдение позволило доказать теорему об устойчивости положений равновесия в гамильтоновых системах с двумя степенями свободы в том случае, когда первое приближение, устойчиво, но интеграл энергии не знакоопределен. См. стр. 365—383 в книге [4].

В нашем случае, из того, что сохранившиеся при возмущении торы будут делить дозмущенный уровень $K = k$, следует, что решения с заданными x_0, v_0 после возмущения будут либо лежать на сохранившихся торах, либо проходить в зазорах между ними. Следовательно, спроектировав на многообразие положений, мы увидим, что после возмущения множество достижимости будет мало отличаться от невозмущения множество вдостижимости будет мало отличаться от невозмущенного восьмиугольника. Это до некоторой степени проясняет, какие множества достижимости могут получаться в неинтегрируемых задачах, где явное вычисление их невозможно.

Например, как показал В. И. Орехов, в задаче о движении точки в поле осесимметричной планеты область возможности движения может быть типа диска (после исключения игнорируемой координаты). Близкой к ней является обобщенная задача двух неподвижных центров, в которой также получается аналогичный диск (5). Учитывая вышесказанное, мы получаем качественное представление о виде множеств достижимости в исходной задаче.

Литература

[1] Козлов В.В. *О геометрии области возможных движений с краем.* Вестник Моск. Университета, серия матем., механ., 1977, №5, стр. 118—120.

[2] Алексеев В.М. *Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров.* Классификация движений. Бюлл. ИТА 10, №4, 1965, стр. 241.

[3] Синг Дж.Л. *Классическая динамика.* М., 1963,

[4] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* М., 1974.

[5] Орехов В.И. *Топология фазовых уровней движения точки в нецентральном поле.* Вестник Моск. университета, серия матем., механ., 1978 №2, стр. 117—122.

FORME APPROXIMATIVE DU DOMAINE ACCESSIBLE DANS LES SYSTEMES DE LIOUVILLE PERTURBES

R é s u m é

Le domaine acccessible est la fermeture de l'union de toutes les trajectories passant par un point donné, avec une énergie donnée. On démontre que dans les systèmes de Liouville ces domaines sont en général des octogones curvilignes. Après la perturbation le domaine accessible reste voisin du dit octogone.

PRIBLIŽNI OBLIK DOSTIŽENJA POSLE POREMEĆAJA LIOUVILLE-OVIH SISTEMA

I z v o d

Pokazano je da mnoštvo tačaka u Liouville-ovim sistemima od dva stepena slobode, u koje se može stići iz proizvoljno fiksiranog početnog položaja s datom po modulu početnom brzinom, ima oblik krivolinijskog osmougaonika, koji leži u oblasti mogućeg kretanja sa odgovarajućom energijom.

Я Татаринов, МГУ Механико-математический Факултет,
117234 Москва, СССР