TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 7, pp. 67—72, 1981, UDK 531

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА В КАНАЛАХ

Александр Яковенко

(Поступила 10 X 1980)

В технологических процессах получения различных синтетических материалов приходится иметь дело с пульпами, пастами, строительными растворами, кондитерскими и фармацевтическими массами и т.п.

Эти материалы характеризуются наличием предела текучести τ_0. Ниже этого предела материал может вести себя как твердое, недеформирующееся тело (модель Сен-Венана), либо как идеально упругое тело Гука (модель Прандтля). За пределом текучести материал течет как обычная ньютоновская жидкость при напряжении сдвига $\tau - \tau_0$.

Сочетание пластичности и вязкости впервые было обнаружено Шведовым у растворов желатина, а затем Бингамом у масляных красок.

Многочисленными исследованиями было обосновано уравнение реологического состояния вязкопластичного материала

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{\partial v}{\partial n} \tag{1}$$

где μ — коэффициент вязкости; n — нормально к направлению скорости; знак μ совпадает со знаком $\sqrt{\partial v / \partial n}$

При течении вязкопластичного материала в канале вся область потока распадается на две области. В первой области — ядре потока, где $\tau \leqslant \tau_0$, материал ведет себя как упругое тело. Во второй области — пограничном слое, где $\tau > \tau_0$, действуют вязкие и упругие силы. В этой области имеет место сложное распределение скорости.

При неустановившемся течении профиль ядра потока является искомой функцией времени. Так как на его поверхности $\tau = \tau_0$, то из уравнения (1) следует, что $\partial v / \partial n = 0$. Рассматривая ядро, как тело переменной массы, применим закон сохранения количества движения в дифференциальной форме:

$$m \frac{dv_0}{dt} = F + (v_0 - v_1) \frac{dm}{dt},$$

где v_0 — скорость ядра; m — масса его; v_1 — скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц; F — поверхностные силы. Полагая, что частицы отделяются (присоединяются) без удара, получим

$$\rho\frac{dv_0}{dt}=p(t)-\frac{2^i\,\tau_0}{y_0(t)}, \qquad (2)$$

где $p(t)$ — давление; $y_0(t)$ — профиль поверхности ядра; $i=0,1$ — соответствует плоской и цилиндрической симметрии канала. Проинтегрировав по переменной t уравнение (2), получим выражение для скорости ядра потока

$$v_0(t)=v_0(0)+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^t\left[p(\eta)-\frac{2^i\,\tau_0}{y_0(\eta)}\right]d\eta. \qquad (3)$$

Гидродинамическая задача о течении несжимаемого вязкопластичного материала в плоскопараллельном и цилиндрическом канале при заданном перепаде давления сводится к решению следующей системы уравнений в безразмерном виде

$$\frac{\partial V}{\partial Zh}=\frac{1}{Y^i}\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y^i\frac{\partial V}{\partial Y}\right)+\left(\frac{S}{Y}\right)^i+q(Zh),\ \xi(Zh)<Y<1,\ Zh>0; \qquad (4)$$

$$V(0,\,Y)=F(Y); \qquad (5)$$

$$V(Zh,\,1)=0; \qquad (6)$$

$$V(Zh,\,\xi)=\varphi(Zh)=F[\xi(0)]+\int\limits_0^{Zh}\left[q(\eta)-\frac{2^iS}{\xi(\eta)}\right]d\eta; \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial Y}\right|_{Y=\xi}=0, \qquad (8)$$

где $\xi(Zh)$ не принимает экстремальных значении.

Здесь обозначено:

$V=v/u$—безразмерная скорость; u — средняя по сечению и времени скорость потока; $Y=y/h$ — безразмерная поперечная координата; $2h$ — ширина (диаметр) канала; t — время; $y_0(t)$ — профиль поверхности ядра; $Zh=\nu t/h^2$ число Жуковского; ν — коэффициент кинематической вязкости; $\xi(Zh)=y_0(t)/h$ — безразмерный профиль поверхности ядра потока; $q(Zh)=h^2p/\mu u$ — безразмерный период давления; $S=\tau_0\,h/\mu u$ — параметр Сен-Венана Из граничного условия (7) следует, что профиль поверхности ядра потока определяетсЬ не только искомой функцией $V(Zh,\,Y)$, но и ее производной по переменной Zh. Это его отличие от соответствующего условия на подвижной границы в задачах типа Стефана является весьма существенным.

Поэтому при решении задачи часто полагают, что ядро меняется по известному закону [1]. Но такое предположение, очевидно, не отражает реальную картину процесса.

Полученные же в работах [2, 3] резудьтаты весьма громоздки, что затрудняет их практическое использование.

Представляет интерес разработать такую, методику расчета задача рассматриваемого типа, которая позволила бы получить решения в удобном для инженерной практике виде. В основу такой методике в данной работе положено конечное интегральное преобразование, ядро которого представляет собой решение исходного дифференциального уравнения (4) по пространственной переменной [4].

Для применения конечного интегрального преобразования к задаче (4—8) необходимо ввести новую функцию

$$W(Zh,\ Y) = V(Zh,\ Y) - \varphi(Zh)\frac{Y-1}{\xi(Zh)-1}, \tag{9}$$

которая позволит выделить в решении неравномерно сходящуюся часть путем сведения граничных условий (6), (7) к однородным. Подставляя соотношение (9) в уравнение (4) и краевые условия (5—7), получим

$$\frac{\partial W}{\partial Zh} = \frac{1}{Y^i}\,\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y^i\frac{\partial W}{\partial Y}\right) + \Phi(Zh,\ Y); \tag{10}$$

$$W(0,\ Y) = F(Y) - F[\xi(0)]\frac{Y-1}{\xi(0)-1}; \tag{11}$$

$$W(Zh,\xi) = W(Zh,\ 1) = 0, \tag{12}$$

где

$$\Phi(Zh, Y) = \left[\frac{\varphi + S(\xi-1)}{Y(\xi-1)}\right]^i + \frac{Y-1}{\xi-1}\left(\frac{\varphi\dot{\xi}}{\xi-1} - \dot{\varphi}\right) + q(Zh).$$

I. Плоскопараллельный канал (i=0).

В случае задания граничных условий (12) интегральное преобразование Фурье с переменным нижним пределом и формула обращения имеют вид [5]

$$\alpha_n(Zh) = \int\limits_{\xi}^{1} W(Zh,\ Y)\sin\frac{n\pi(Y-\xi)}{1-\xi}\,dY, \tag{13}$$

$$W(Zh,\ Y) = \frac{2}{1-\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(Zh)\sin\frac{n\pi(Y-\xi)}{1-\xi}. \tag{14}$$

Интегральное преобразование (13) позволяет получить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов α_n (Zh) ряда Фурье (14)

$$\frac{d\alpha_n}{dZh} + \left(\frac{n\pi}{1-\xi}\right)^2\alpha_n = \frac{\dot{\xi}}{2(1-\xi)}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_{nm}\alpha_m + \frac{1-\xi}{n\pi}\left\{\frac{\varphi\dot{\xi}}{\xi-1} - \dot{\varphi} - q[(-1)^n - 1]\right\}; \tag{15}$$

$$\alpha_n(0) = \int\limits_{\xi(0)}^{1}\left\{F(Y) - F[\xi(0)]\frac{Y-1}{\xi(0)-1}\right\}\sin\frac{n\pi[Y-\xi(0)]}{1-\xi(0)}\,dY; \tag{16}$$

$$\Omega_{nm}=-1,\ m=n;\ \Omega_{nm}=-\frac{4\,(-1)^{m+n}\,mn}{m^2-n^2},\ m\neq n.$$

Для определения закона движения ядра потока необходимо воспользоваться граничным условием (8), где $V\,(Zh,\ Y)$, согласно выражению (9), имеет вид

$$V\,(Zh,Y)=\frac{2}{1-\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\ \sin\ \frac{n\pi(Y-\xi)}{1-\xi}+\varphi\ \frac{Y-1}{\xi-1}. \tag{17}$$

Подставляя уравнение (17) в соотношение (8), получим

$$\frac{2\pi}{(1-\xi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\ \alpha_n+\frac{\varphi}{\xi-1}=0. \tag{18}$$

2. Цилиндрический канал (i=1)

Для исключения дифференциальных операций по переменной Y в уравнении (10) необходимо воспользоваться интегральным преобразованием Ханкеля

$$\beta_n\,(Zh)=\int\limits_{\xi}^{1}\ Y\,W\,(Zh,\ Y)\ u_0\,(\gamma_n\ Y/\xi)\ d\ Y \tag{19}$$

и формулой обращение вида

$$W\,(Zh,\ Y)=\frac{\pi^2}{2\xi^2}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\ J_0\,(\gamma_n)\,\gamma_n^2}{J_0^2\,(\gamma_n)-J_0^2\,(\gamma_n/\xi)}\ u_0\,(\gamma_n\ \ Y/\zeta) \tag{20}$$

где

$$u_0\,(\gamma_n\ Y/\xi)=J_0\,(\gamma_n\ Y/\xi)\ Y_0\,(\gamma_n/\xi)-J_0\,(\gamma_n/\xi)\ Y_0\,(\gamma_n\ Y/\xi)-$$

„фиксированные" собственные функции; γ_n — корни характеристического уравнения $J_o(\gamma)Y_o(\gamma/\xi)-J_o(\gamma/\xi)Y_o(\gamma)=0$; J_o, Y_o — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов $\beta_n\ (Zh)$ ряда Фурье — Бесселя (20) имеет вид

$$\frac{d\,\beta_n}{dZh}+\left(\frac{\gamma_n}{\xi}\right)^2\ \beta_n=\frac{1}{\xi}\ \frac{d\xi}{dZh}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{nm}\,\beta_m+f_n\,(Zh). \tag{21}$$

Начальные условия

$$\beta_n\,(0)=\int\limits_{\xi(0)}^{1}\left\{F\,(Y)-F\,[\xi\,(0)]\frac{Y-1}{\xi(0)-1}\right\}\ Y\,u_0\,(\gamma_n\ Y/\xi(0))\ \ d\ Y. \tag{22}$$

Здесь обозначено:

$$\lambda_{mn}=\frac{\pi^2\ \gamma_m^2\ \gamma_n\ J_0^2\ (\gamma_m)}{2\xi^3\,[J_0^2\,(\gamma_m)-J_0^2\,(\gamma_m/\xi)]}\ \int\limits_{\xi}^{1}\ Y^2\ u_1\,(\gamma_n\ \ Y/\xi)\ u_0\ \gamma_m\ \ Y/\xi)\ d\ Y,\ \ m\neq n;$$

$$\lambda_{nm} = 1, \quad n = m;$$

$$f_n(Zh) = \int_{\xi}^{1} Y\,\Phi(Zh, Y)\, u_0(\gamma_n Y/\xi)\, dY.$$

Профиль ядра потока с учетом выражением (8), (9), (20) определяется уравнением

$$\frac{\pi^2}{2\xi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n J_0(\gamma_n) \gamma_n^3 u_1(\gamma_n)}{J_0^2(\gamma_n) - J_0^2(\gamma_n/\xi)} + \frac{\varphi}{1-\xi} = 0. \qquad (23)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов рядов Фурье. Эти ряди сходятся равномерно. Численная реализация систем уравнений с помощью стандартных процедур, например Рунге-Кутта, не вызывает принципиальных затруднений. Решение систем уравнений совместно с уравнением на границе ядра потока позволяет определить профиль ядра и его скорость, а также распределение скорости в вязкой области течения.

Следует указать, что предлагаемая методика может быть применена и для случаев, когда сечение канала отлично от рассмотренных.

Важным при этом является то, чтобы исходное дифференциальное уравнение допускало разделение переменных, тогда „фиксированная" собственная функция задачи Штурма-Лиувилля выбирается в качестве ядра интегрального преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. *Механика физических процессов*, МГУ, 1976.

[2] Сафрончик А. И., *Неустановившиеся течение вязкопластичного материала между параллельными стенками*. Прикладная математика и механика, т. 23, вып. 5, 1959.

[3] Сафрончик А. И., *Неустановившиеся течение вязкопластичного материала в круглой трубе*. Мрикл. матем. и мех., т. 24, вып. 1, 1960.

[4] Яковенко А. Г., *Методи решения задач с подвижными границами*, Днепропетровск, 1979.

[5] Jakovenko A., *Unsteady flow of non-newtonian fluids in chanels*, 2nd Yugoslav Symposium on Chemical Engineering, v. 45 (1—2), Beograd, 1980.

VISCOPLASTIC FLOW IN CHANELS

Summary

The flow of Shewedow-Bingham fluids in chanels with rectangular and circular cross sections has been examined. Solution in the form of Furie Series is given. Coefficients are determined on the basis of corresponding Couchy problem for the system of ordinary differential equations of the first order.

VISKOPLASTIČNO TEČENJE U KANALIMA

Izvod

U radu se rasmatra hidrodinamički problem tečenja Bingam-Švedova u cilindričnim i kanalima sa paralelnim zidovima. Predlaže se metodika rešavanja zadataka koja dozvoljava određivanje raspodele brzina u viskoznoj oblasti tečenja, „jedra" potoka, kao i profil površi „jedra". Na osnovu iste metodike dobijaju se integralne transformacije čije je jezgro fiksirano u vremenu. Prikazani su i numerički primeri.

Яковенко Александр Григорьевич
СССР, 3201000 Г. Днепропетровск — 100
пр. Героев 29 кв. 80