TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 7, pp. 21—32, 1981, UDK 531—11

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Александар Бакша

(Поступила 2 VII 1980)

Дифференциальные уравнения движения механических систем можно вывести из любого интегрального принципа механики применением вариационного исчисления, что в литературе хорошо известно. В данной статье получаются несколько форм дифференциальных уравнений движения с использованием принципа максимума Понтрягина, исходя из интегральных принципов механики.

1. Рассмотрим механическую систему, конфигурация которой определяется обобщенными координатами x^i $(i=1, \ldots, N.)$ и которая движется в поле с потенциалом

$$V=V(x, t)^{*)}. \tag{1.1}$$

Движение системы стесняет r голономных связей

$$g_\nu(x, t)=0, \quad (\nu=1, \ldots, 1.2) \tag{1.2}$$

а также и s неголономных связей

$$\varphi_\mu(x, \dot{x}, t)=0 \quad (\mu=1, \ldots, s) \tag{1.3}$$
$$(r+s<N).$$

Пусть движение системы на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ описивается уравнениями

$$x^i=x^i(t). \tag{1.4}$$

Относительно функций (1.4) предполагается, что они абсолютно непрерывны и имеют ограниченные производные, т.е. что кривая

$$x=x(t)$$

абсолютно непрерывна.

Интегральные принципы механики основываются на утверждении, что, при известных условиях, функционал

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} f^0 \ (x(t), \dot{x}(t), t) \ dt \tag{1.5}$$

---

* $V(x, t)=V(x^1, \ldots, x^N, t)$

где f заданная функция, имеет стационарное значение (более точно: при соответствующем малом промежутке времени $t_1—t_0$ — минимальное) на истинном пути (1.4), если к сравнению с ним привлекается многообразие окольных путей, совпадающих с истинным в начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1.

Исходя от этого утверждения можно вариационным исчислением получить дифференциальные уравнения движения как голономной так и неголономной механической системы, что известно ([1], [2]). Мы получим некоторые из этих уравнений с помощью принципа максимума Понтрягина [3]. Для этого сформулируем прежде всего основное утверждение интегральных принципов как задачу оптимального управления.

Процесс управления определяем уравнениями

$$\frac{dx^i}{dt} = u^i \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{1.6}$$

Здесь $u = (u^1, \ldots, u^N)$ — управляющий параметр, который выбирается в классе всех ограниченных кусочно-непрерывных и кусочно-гладких вектор-функций, определенных на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Таким образом, область управления U совпадает со всем N — мерным пространством переменных $(u^1, \ldots, u_N)$. Задачу управления сформулируем следующим образом:

Пусть заданы точки $M_0 = (x\,(t_0))$ и $M_1 = (x\,(t_1))$, координаты которых удовлетворяют условиям (1.2). Среди всех допустимых управлений, переводящих систему из положения M_0 в положение M_1, согласно уравнениям (1.6), (1.2) и (1.3), найти такое, для которого функционал (1.5) принимает наименьшее возможное значение.

Для того, чтобы траектория

$$x = x\,(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

уравнения (1.6), соответствующая управлению $u\,(t)$, целиком лежала в многообразий (1.2), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$g_\nu\,(x(t_0), t_0) = 0 \qquad p_\nu\,(x(t),\ u\,(t)t) \equiv \frac{\partial g_\nu}{\partial x^i}\,u^i + \frac{\partial g_\nu}{\partial t} = 0 \tag{1.7}$$

Для выполнения неголономых связей эти условия таковы:

$$\varphi_\mu\,(x\,(t),\ u\,(t), t) = 0. \tag{1.8}$$

Очевидно, что всякая оптимальная траектория здесь с формулированной задачи является экстремалью интеграла (1.5) и наоборот. Поэтому принцип максимума, представляющий собой необходимое условие оптимальности, является в то же время и необходимым условием для этого, чтобы траектория (1.4) была экстремалью интеграла (1.5). Принцип максимума мы используем в форме теоремы (теорема 23, [3]):

(Т) Нусть $u\;(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — оптимальное управление, а соотвествующая ему регулярная оптимальная траектория уравнения

$$\frac{dx^j}{dt} = f^j\,(x, u) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n.)$$

удовлетворяет на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ системе уравнений:

$$p_a(x(t),\ u(t)) = 0 \quad (a = 1, \dots, m.).$$

Тогда сущестует такая ненулевая непрерывная вектор-функция

$$\psi(t) = (\psi_0(t),\ \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

что на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ функций $u(t)$, $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\text{a)}\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial \psi},$$

$$\text{b)}\ \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}\ \psi, x, u)}{\partial x} + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_a \frac{\partial p_a(x, u)}{\partial x},$$

где

$$\mathscr{H}(\psi, x, u) = \psi_j f^j(x, u)$$

и выполняется условие максимума

$$\text{c)}\quad \mathscr{H}(\psi(t),\ x(t).\ u(t)) = \frac{\sup}{u}\ \mathscr{H}(\psi,\ x,\ u)$$

причем

$$\text{c}_1)\ \ \mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ u(t)) = 0;$$

кусочно-глаткие функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, определяются из условия максимума как множители Лагранжа из формулы

$$\text{c}_2) = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_a \frac{\partial\, p_a(x, u)}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial g_\alpha(u)}{\partial u},$$

кроме того

$$\text{d)}\quad \psi_0 = \text{const.} \leqslant 0.$$

Замечание: Уравнения $q^\alpha(u) = 0$ определяют границу области U. В здесь сформулированой задаче область U неограничена; поэтому эти уравнения не существуют ($g_\alpha(u) \equiv 0$).

В силу теоремы (Т) для решения поставленной задачи оптимального управления мы должны составить функцию $\mathscr{H}$, которая, в силу (1.6), принимает здесь вид

$$\mathscr{H}(\psi, x, u, t) = \varphi_0 f^0(x, u, t) + \psi_i u^i + \psi_{N+1} \qquad (i = 1, \dots, N) \tag{1.9}$$

причем

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x, u, t);\ x^0(t_0) = 0; \qquad \frac{dx^{N+1}}{dt} = 1,\ x^{N+1}(t_0) = t_0. \tag{1.9'}$$

Однако, непосредственным применением уравнений а) и б) и условия c_2) не получаются привычные уравнения движения механических систем. Дело в том, что варированные траектории, использованные в доказательстве теоремы (Т), не удовлетворяют условиям кинематхческий осуществимости движения ([2], стр. 666). Вариация $\delta x\ (t)=(x\ \ (t))$ должна удовлетворять уравнениям ([3], стр. 312)

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^i}\,\delta x^i+\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial u^i}\,\delta u^i+\frac{\partial R_\mu}{\partial\mu}\,\delta\mu=0 \tag{1.10}$$

которые выводятся из того, что траектория целиком удовлетворяет уравнениям связей. Однако, кроме этих уравнений вариации должны удовлетворять и локалным условиям, которые мы запишем (по Четаеву) в следующей форме

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\dot{x}^i}\,\delta x^i=0. \tag{1.11}$$

Дифференцируя по времени уравнения (1.11) и сравнивая полученные уравнения с (1.10), приходим к условиями кинематической осуществимости смежного движения:

$$\left(\frac{d}{dt}\;\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^i}\right)\,\delta x^i=0. \tag{1.12}$$

В случае, когда φ_μ — полная производная от некоторой функции, уравнения (1.12) тождествено выполнаются.

Функции $p_\nu\ (x(t),\ u(t),\ t)$ тождествено удовлетворяют уравнениям (1.12).

Уравнение в варияциях ([3], стр. 312), в силу (1.12), можно написать в виде $(\delta_\mu=0)$

$$\frac{d}{dt}\,(\delta x^k)=\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j}+\sum_{\nu=1}^{r}\lambda^k{}_\nu\frac{\partial p_\nu}{\partial x^j}+\sum_{\mu=1}^{s}\varkappa^k_\mu\frac{d}{dt}\;\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\dot{x}^j}\right)\,\delta x^j$$

а сопряженное с ним уравнение

$$\frac{d\psi_k}{dt}=-\frac{\delta f^j}{\partial x^k}\;\psi_j+\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu\frac{\partial p_\nu}{\partial x^k}+\sum_{\mu=1}^{s}\varkappa_\mu\,\frac{d}{dt}\;\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial u^k} \tag{1.13}$$

(f°, p_ν и φ_μ не зависят от x° и u°).

В силу (1.9) и (1.13), уравнения а) и б) теоремы (Т) примут следующий вид:

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial\mathscr{H}(\psi,x,u)}{\partial\psi_i}\;(=)\,u^i\quad(i=1,\ldots,N) \tag{1.14}$$

$$\frac{dx^0}{dt}=f^0\,x,u,t),\qquad\frac{dx^{N+1}}{dt}=1,$$

и

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial x^i} + \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial p_\nu(x, u, t)}{\partial x^i} + \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_\mu(x, u, t)}{\partial u^i} \quad (1.15)$$

$$\psi_0 = \text{const.} \leqslant 0, \qquad \frac{d\psi_{N+1}}{dt} = -\psi_0 \frac{\partial f^0}{\partial t}$$

а формула c) —

$$\psi^0 \frac{\partial f^0(x, u, t)}{\partial u^i} + \psi_i = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial p_\nu(x, u, t)}{\partial u^i} + \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \varphi_\mu(x, u, t)}{\partial u^i}. \quad (1.16)$$

2. Принцип Гамильтона. Сформулированная выше задача оптимального управления будет эквивалентна принципу Гамильтона, если

$$f^0(x, u, t) = L(x, u, t), \quad (2.1)$$

где $\mathsf{L}(x, x, t)$ функция Лагранжа (кинетическип потенциал). Заменив (2.1) в (1.14) — (1.16) и исключив переменые ψ и u, получаем (поставив $\psi_0 = -1$) уравнения движения для неголономной механическоп системы в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = -\sum_{\nu=1}^{r} \dot{\lambda}_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial x^i} - \sum_{\mu=1}^{s} \dot{\varkappa}_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{x}^i}, \quad (2.2)$$

где еще можно погставить $\dot{\lambda}_\mu = -\Lambda_\mu$, $\dot{\varkappa}_\mu = -\mathrm{k}_\mu$ и таким образом привести их к привычной форме. ([1], [2]).

Из (Т) (условие c_2)), в силу (1.9), (1.16) и (2.1) получаем

$$-L + \left(\frac{\partial L}{\partial u^i} + \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial p_\nu}{\partial u^i} + \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}\right) u^i + \psi_{N+1} = 0. \quad (2.3)$$

Если система:

1° консервативная и склерономная

2° неголономные связи однородны относительно $\dot{x}^i$, уравнение (2.3) получает форму

$$T + V = \text{const}$$

(интеграл энергии) потому, что

$$\frac{d\psi_{N+1}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \psi_{N+1} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial u^i} u^i = \frac{dg_\nu}{dt} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i} u^i = \pi_\mu \varphi_\mu = 0$$

($\pi_{(\mu)}$ — степень однородности функции φ_μ).

2.1 Покажем теперь, как можно получить уравнения движения в каноническом виде. Вместо произвольнных криволинейных координат x^i введем независимые лагранжевы координаты q $(\alpha=1, \ldots, n=N-r)$ которые тождествено удовлетворяют уравнениям голономных связей (1.2). Таким образом, ограничения (1.7) не существенны, а (1.8) принимают вид

$$\Phi_\mu(q, u, t)=0. \tag{2.4}$$

Вектор-функция $u(t)$ теперь принадлежит n-мерному пространству координат $u^1, \ldots, u^n$.

Условие (1.16), необходимое для того, чтобы функция

$$\mathcal{H}(\psi, q. u, t)=\psi_0 L(q, u, t)+\psi_\alpha u^\alpha+\psi_{n+1}, \quad (\alpha=1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

имела максимум, в этом случае имеет вид

$$\psi_0 \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}+\psi_\alpha=\sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\alpha}. \tag{2.6}$$

Предположим, что уравнение (2.6) имеет единственное решение

$$\underset{\sim}{u}^\alpha=\underset{\sim}{u}^\alpha(q, \psi, t; \varkappa), \tag{2.7}$$

определенное, непрерывное и непрерывно дифференцируемое по своим аргументам. Заменив u^α в (2.4), в силу (2.7), получаем s уравнений

$$\Phi_\mu(q, u(q, \psi, t, \varkappa), t)=0$$

из которых можно получить

$$\varkappa_\mu=\varkappa_\mu(q, \psi, t). \tag{2.8}$$

Заменив (2.8) в (2.7), получаем

$$u^\alpha=u^\alpha(q, \psi, t).$$

Определим функцию $\mathcal{H}^*(\psi, \mathrm{q}, t)$ следующим образом

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^*(\psi, q, t)&=\mathcal{H}(\psi, q, u(q, \psi, t), t)-\psi_{n+1}= \\ &=\psi_0 L(q, u(q, \psi, t), t)+\psi_\alpha u^\alpha(q, \psi, t).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Частично дифференцируя (2.9) по q^α, в силу (2.6), получим соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial q^\alpha}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha}+\sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial q^\alpha}. \tag{2.10}$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \psi_\alpha}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_\alpha}+\sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial \psi_\alpha}. \tag{2.11}$$

Уравнения (1.14) и (1.15) в силу (2.10) и (2.11) (при $\psi_0 = -1$) приводят нас к каноническим уравнениям

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \psi_\alpha} - \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial \psi_\alpha}$$

$$\dot{\psi}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial q^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial q^\alpha}. \qquad (2,12)$$

В литературе канонические уравнения движений неголономных систем встречаются в еще одной форме, которую мы получим следующим образом. Вместо ψ_α введем новые переменные p_α посредством уравнений

$$p_\alpha = \psi_\alpha - \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\alpha}. \qquad (2.13)$$

Условие максимума (2.6) теперь принимает вид

$$\psi^0 \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + p_\alpha = 0. \qquad (2.14)$$

Предполагая, что

$$det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right)_{\alpha, \beta = 1}^{n} \neq 0,$$

из (2.14) можно получить

$$u^\alpha = u^\alpha (q, p, t). \qquad (2.15)$$

Определим функцию

$$H (q. p, t) = -L (q, u (q, p, t), t) + p_\alpha u^\alpha (q, q, t) \qquad (2.16)$$

(получаемую из $\mathcal{H} (\psi, q, u, t) - \psi_{n+1}$ заменяя переменные ψ_α с помощью (2.13) и принимая $\psi = -1$). Переменные q^α и p_α назовем переменными Гамильтона, а функцию (2.16) — функцией Гамильтона.

Из (2.16), в силу (2.14), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}; \qquad \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_\alpha} = u^\alpha. \qquad (2.17)$$

Полученные соотношения в силу (1.14) и (1.15) приводят нас к уравнениям Гамильтона

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}; \ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} - \sum_{\mu=1}^{s} \dot{\varkappa}_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial \dot{q}^\alpha}. \qquad (2.18)$$

2.1.1 Частным случаем системы, рассматриваемой в 2.1 является голономная консервативная система, кинетическая энергия T и потенциальная энергия V которой

$$2T = a_{\alpha\beta}\ \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \qquad V = V(q^1, \ldots, q^n),$$
$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q^1, \ldots, q^n), \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

Здесь

$$f^0(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) = T - V,$$

функция (2.5)

$$\mathcal{H}(\psi, q, u) = \frac{1}{2}\ \psi_0\ a_{\alpha\beta}\ u^\alpha u^\beta - \psi_0\ V + \psi_\alpha u^\alpha,$$

а соотвествующие уравненя а) и б)

$$\dot{q}^\alpha = u^\alpha$$

$$\dot{\psi}_\alpha = -\psi^0 \left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} u^\beta u^\gamma - \frac{\partial V}{\partial q^\alpha}\right). \qquad (2.19)$$

Из условия максимума c_2) получается, что

$$\psi_0\ a_{\alpha\beta}\ u^\beta + \psi_\alpha = 0,$$

откуда следует (при $\psi_0 = -1$)

$$u^\alpha = -a^{\alpha\beta}\ \psi_\beta \qquad (a^{\alpha\beta}\ a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma). \qquad (2.20)$$

Заменив (2.20) в (2.19) и исключая переменные ψ_α, получим:

$$\ddot{q} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \quad \gamma \end{matrix} \right\} \dot{q}^\beta\ \dot{q}^\gamma = -a^{\alpha\beta}\ \frac{\partial V}{\partial q^\beta}, \qquad (2.21)$$

т.е.

$$\frac{D\dot{q}^\alpha}{Dt} = Q^\alpha. \qquad (2.21')$$

3. Принцип наименьшего действия. Принцип наименьшего действия относится к системам, полная механическая энергия которых сохраняет постоянное значение

$$T + V = \text{const.} \qquad (3.1)$$

Поэтому здесь рассмотрим склерономные системы, чья кинетическая энергия T и потенциальная энергия V равны

$$2T = a_{\alpha\beta}\ \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$
$$V = V(q^1, \ldots, q^n).$$

Здесь q^α — независимые лагранжевые координаты. Движение системы, быть может, стеснено стационарными однородными неголономными связями

$$\Phi_\mu(q, \dot{q}) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, s).$$

Поэтому здесь сформулированная задача оптимального управления будет эквивалентна принципу наименьшего действия, если

$$f^0 = 2T, \quad p(q, u) = T(q, u) + V(q) - h = 0, \quad \Phi_\mu(q, u) = 0. \tag{3.2}$$

Составим функцию

$$\mathscr{H}^*(q, \psi, u) = 2\psi^0 T + \psi_\alpha u^\alpha. \tag{3.3}$$

Уравнения (1.14), (1.15) в силу (3.2), (3.3), дают

$$\dot{q}^\alpha = u^\alpha, \quad \dot{\psi}_\alpha = -2\psi_0 \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \lambda \frac{\partial p}{\partial q^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\alpha}. \tag{3.4}$$

Из условия (1.16)

$$2\psi_0 \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} + \psi_\alpha = \lambda \frac{\partial p}{\partial u^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\alpha},$$

и уравнения (3.4) (учитывая утверждение d) теоремы (T)), слдует

$$-2\psi_0 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} + \dot{\lambda} \frac{d}{dt} \frac{\partial p}{\partial u^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\alpha} = -2\psi_0 \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \lambda \frac{\partial p}{\partial q^\alpha}. \tag{3.5}$$

Для определения λ можно использовать c_1):

$$2\psi_0 T + \Big(-2\psi_0 \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} + \lambda \frac{\partial p}{\partial u^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{s} \varkappa_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial u^\alpha}\Big) u^\alpha = 0.$$

Отсюда находим

$$-2\psi_0 + 2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \psi_0 = \text{const.} < 0.$$

Окончительно получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\dot{\varkappa}_\mu}{\psi^0} \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial \dot{q}^\alpha}. \tag{3.6}$$

Заметим, что ограничение на фазовые переменные

$$p(q, u) = 0,$$

которое является следствием интеграла энергии, не рассматривается точно так же, как и уравнения

$$\Phi_\mu(q, u) = 0,$$

хотя оно имеет характер неголономных связей. Причину этого находим в следующем: Условия для виртуальнных перемещений (1.11), примененые к (3.1), дают

$$a_{\alpha/\beta} \dot{q}^\alpha \delta q^\beta = 0,$$

что естественио обчясняется тем, что возможные вариации ортогональнны скорости в метрике, определенной тензором $\{a_{\alpha\beta}\}$. Трудно обяяснить, почему интеграл энергии ограничивает виртуальнные перемещения этим способом. Поэтому, условие для виртуальнных перемещений (1.11), которое мы могли успешно применить к однородным нелинейным неголономным связям, заменим другим условием. Дифференцированием (3.1) по t получаем

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}-\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha=0$$

откуда вытекает (по Вилковичу) условие для виртуальнных перемещений

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}-\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}\right)\delta q^\alpha=0 \tag{3.7}$$

Заметим, что равенство (3.7) представляет собой условие (1.12) для связей (3.1). Пользуясь равенством (3.7), мы составили уравнения в форме (3.4).

3.1 Принцип наименьшего действия можно высказать и в форме задач оптимального быстродействия. Для того, чтобы рассматриваемая задача была оптимальна по быстродействию, надо положить

$$f^0(q,u)=1.$$

Так как предыдущее условие должно быть эквивалентно принципу наименьшего деистия, его можно записать в форме

$$p_1(q,u)=a_{\alpha\beta}\,u^\alpha u^\beta-1=0 \tag{3.8}$$

и считать его ограничением на фазовые переменные.

Здесь расмотрим только голономные системы. В этом случае, кроме (3.8), существует еще одно ограничение на фазовые переменые, являющееся следствием интеграла энергии

$$p_2(q,u)=\frac{1}{2}\,a_{\alpha\beta}\,u^\alpha u^\beta+V-h=0. \tag{3.9}$$

Ввиду сделанных предположений, в нашей задаче оптимального управления по быстродеиствию функция $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}(q,\psi,u)=\psi_0+\psi_\alpha u^\alpha \quad (\alpha=1,\ldots,n) \tag{3.10}$$

а соотвествующие уравнения управления системой и им сопряженные уравнения, имея в виду (3.8) — (3.10), таковы

$$\dot{q}^\alpha=u^\alpha,\quad \dot{\psi}_\alpha=\lambda_1\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\,u^\beta u^\gamma+\lambda_2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}\right). \tag{3.11}$$

Из условия максимума находим

$$\psi_\alpha=2\lambda_1\,a_{\alpha\beta}\,u^\beta+\lambda_2\,a_{\alpha\beta}\,u^\beta. \tag{3.12}$$

Подставляя так определенные функции ψ_α в равенство c_1), получаем

$$\psi_0 + (2\lambda_1 + \lambda_2) a_\beta\, u_\alpha{}^\alpha\, u^\beta = 0$$

откуда следует, имея в виду (3.8),

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = -\psi_0 = 1. \tag{3.13}$$

Заменой переменных ψ_α с помощью уравнений (3.11) и (3.12) а также параметра λ_1 с помощью (3.13), получаем

$$\ddot{q}^\alpha + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \quad \gamma \end{Bmatrix} \dot{q}^\beta\, \dot{q}^\gamma = \lambda_2\, a^{\alpha\beta}\, \frac{\partial V}{\partial q^\beta}. \tag{3.14}$$

В этих уравнениях остался еще неопределен параметр λ_2. Его можно опр де- лить, используя интеграл энергии. Дифференцированием (3.9) по t, получаем уравнение, в котором $\ddot{q}^\alpha$ можно заменить с помощью (3.14), после чего находим

$$\lambda_2 = -1.$$

Так что уравнения (3.14) окончительно получают следующую форму:

$$\ddot{q}^\alpha + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \quad \gamma \end{Bmatrix} \dot{q}^\beta\, \dot{q}^\gamma = -a^{\alpha\beta}\, \frac{\partial V}{\partial q^\beta} \tag{3.15}$$

и представляют собои контравариантнные уравнения движения консервативной голономной системы.

Так как равенство (3.8) с помощью первого уравнения в (3.11) можно написать в форме

$$a_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha\, \dot{q}^\beta = 1 \quad \left(\dot{q} = \frac{dq}{dt}\right),$$

то параметр t в этом случае представляет дугу траектории фазовой точки в n-мерном пространстве V_n координат q^α, в котором метрика определена основным тензором $(a_{\alpha\beta})$. В специальном случае, когда система движется по инерции,

$$\frac{\partial V}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

и уравнения (3.15) получают форму (если поставить $t = s$)

$$\frac{D}{Ds}\, \frac{dq^\alpha}{ds} = 0. \tag{3.17}$$

Они представляют собой уравнения геодезических в V_n. Отсюда следует, что фазовая точка движется по линии наименшей кривизны

$$k = (a_{\alpha\beta}\ k^\alpha\, k^\beta)^{1/2}, \quad k^\alpha = \frac{D}{Ds}\, \frac{dq^\alpha}{ds}$$

что представляет утверждение принципа Герца

ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. П. Анђелић и Р. Стојановић, *Рационална механика*, Београд 1966.

[2] И. Лурье, *Аналитическая механика*, Москва 1961.

[3] Л. С. Понтрягин, *Математическая теория оптимальных процессов*, Москва 1976.

[4] Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев, *Динамика неголономных систем*, Москва 197.

THE PONTRYAGIN PRINCIPLE OF MAXIMUM AND INTEGRAL PRINCIPLES OF MECHANICS

Summary

It is well known that differential equations of motion of a mechanical system can be obtained from an integral principle of mechanics using variational calculus. We obtain here, starting from integral principles, several forms of the equations of motion, using the Pontryagin principle of maximum.

PONTRJAGINOV PRINCIP MAKSIMUMA I INTEGRALNI PRINCIPI MEHANIKE

Izvod

Razmatra se mehanički sistem koji se kreće u polju sa potencijalom (1.1) u prisustvu holonomnih veza (1.2) i neholonomnih veza (1.3).

Polazeći od integralnih principa mehanike, primenom varijacionog računa, mogu se izvesti diferencijalne jednačine kretanja što je u literaturi dobro poznato. U ovom radu su izvedene jednačine kretanja mehaničkog sistema u više oblika polazeći od integralnih principa, primenom Pontrjaginovog principa maksimuma. U tom cilju je, najpre, formulisan zadatak optimalnog upravljanja ekvivalentan integralnim principima u kome je proces upravljanja definisan jednačinama (1.6), pri čemu upravljanja pripadaju klasi neprekidnih funkcija a kriterijum optimalnosti je zadan funkcionalom (1.5). Upravljanje se vrši uz ograničenja na fazne promenljive (1.7) i (1.8). Ovaj zadatak je rešavan pomoću teoreme (T) / teorema 23, [3], koja je prethodno modifikovana. Naime, da bi bili zadovoljeni uslovi koje na lokalne varijacije nameću neholonomne veze jednačine konjugovanog sistema b) su dovedene na oblik (1.13).

Kada se uslovi postavljenog zadatka formulišu tako da odgovara Hamiltonovom principu dobijaju se Lagranževe jednačine druge vrste (L) i kanonske jednačine u obliku (2.12) i (2.18). Specijalno, za konzervativni holonomni sistem diferencijalne jednačine kretanja su dobijene u obliku (2.21).

Ako se uslovi zadatka optimalnog upravljanja konkretizuju tako da zadatak odgovara principu najmanjeg dejstva, moguće je dobiti jednačine kretanja sistema u obliku (3.6). Kada je principu najmanjeg dejstva korespondiran odgovarajući zadatak optimizacije po brzini dejstva, dobijene su jednačine (3.15) koje u specijalnom slučaju (3.16) predstavljaju tvrđenje Hercovog principa.

Aleksandar Bakša, doc.
Institut za mehaniku
PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA
BEOGRAD, studentski trg 16