TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 7, pp. 113—117, 1981, UDK 531—11

SUR LES VALEURS PROPRES ET LES VECTEURS PRINCIPAUX DU TENSEUR D'IMPULSION-ENERGIE DE FERROFLUIDE

Dragi Radojević

Recu le 19. novembre 1980)

On considère dans ce travail les valeurs propres et les vecteurs principaux du tenseur d'impulsion-énergie de ferrofluide conducteur de chaleur. Ce modèle a été introduit par Cissoko et Cattaneo [1] et défini comme un milieu magnetique polarisé; polarisé par le champ magnetique dans lequel le fluide flotte. On suppose le fluide considéré comme isotrope.

Le tenseur d'impulsion-énergie de ferrofluide est composé par le tenseur d'impulsion-énergie de fluide parfait, celui du champ magnétique et de la partie relative à la conduction de la chaleur. Dans ce cas on traite le champ électromagnétique avec l'induction électrique et l'induction magnétique. On écrit le tenseur d'impulsion-énergie du ferrofluide dans la forme

$$T_{\alpha\beta} = \mathcal{T}_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} - q_\alpha u_\beta$$

Le tenseur d'impulsion-énergie du fluide parfait reste de la forme connue

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = (\rho + p)\; u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}$$

ρ est la densité de masse propre, p est la pression, u_α est la quadrivitesse, $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique de l'espacetemps de Minkowski, i.e. $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(-1, -1, -1, 1)$; la vitesse de la lumiére est $c = 1$.

A cause de l'induction, le champ électro-magnétiqu e est défini par deux tenseurs, le tenseur de champ électrique-induction magnétique, $H_{\alpha\beta}$, et le tenseur d'induction électrique-champ magnétique, $G_{\alpha\beta}$. La part électromagnétique du tenseur d'impulsion-énergie du ferrofluide est de la forme

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta} H_{\xi\eta} G^{\xi\eta} - H_{\alpha\xi} G_\beta{}^\xi.$$

Le vecteur du flux de chaleur est défini par $q_\alpha = -k\dfrac{\partial\theta}{\partial x^\alpha}$, oú θ représente la quantité de chaleur.

Pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs principaux du tenseur d'impulsion-énergie considéré, on va exprimer ses composantes par les vecteurs du champ électrique, e_α, d'induction électrique, d_α, du champ magnetique, h_α et d'induction magnétique, b_α. Ensuite, on choisira le système de coordonnées convenable qui, d'une part, élucidera la situation physique et d'autre part simplifiera le calcul. Après, on va construire la matrice du tenseur considéré, et on va calculer les valeurs propres et les vecteurs principaux de la matrice obtenue.

Pour exprimer $\tau_{\alpha\beta}$ par e_α, d_α, h_α et b_α on va user les formules qui donnent les connections de $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ avec ces vecteurs

$$H_{\alpha\beta} = u_\alpha e_\beta - u_\beta e_\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\gamma b^\delta$$

$$G_{\alpha\beta} = u_\alpha d_\beta - u_\beta d_\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta\varphi\psi} u^\varphi h^\psi$$

Le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ prend la forme

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\lambda e^2 - \mu h^2) g_{\alpha\beta} - e_\rho d^\rho u_\alpha u_\beta - e_\alpha d_\beta + u_\beta \varepsilon_{\alpha\xi\gamma\delta} d^\xi u^\gamma b^\delta + \\ + u_\alpha \varepsilon_{\beta\xi\varphi\psi} e^\xi u^\varphi h^\psi - \varepsilon_{\alpha\xi\gamma\delta} g^{\rho\xi} \varepsilon_{\beta\rho\varphi\psi} u^\gamma b^\delta u^\varphi h^\psi$$

Les composantes du tenseur $T_{\alpha\beta}$ seront exprimées en relation du système spécial de coordonnées. Suivant une petite part du fluide, on va lui fixer un systéme de coordonnées dont les axes spatiaux seront choisis de telle manière que l'un d'eux, par exemple ox^3, soit perpendiculaire au vecteur e_α, comme au vecteur h_α, dans l'évenement considéré. Ainsi on obtient

$$u_i = 0, \quad u_4 = 1, \quad e_3 = 0, \quad h_3 = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

et aussi

$$d_3 = 0, \quad b_3 = 0$$

En usant cette simplification, on va calculer les composantes de tenseur $T_{\alpha\beta}$. On va les présenter dans la forme de la matrice

$$\left\{\begin{array}{cccc} p + \frac{1}{2}(\lambda e^2 + \mu h^2) + b_2 h_2 - e_1 d_1 & -e_1 d_2 - h_1 b_2 & 0 & k\frac{\partial\theta}{\partial x} \\ -e_1 d_2 - h_1 b_2 & p + \frac{1}{2}(\lambda e^2 + \mu h^2) - e_2 d_2 - b_1 h_1 & 0 & k\frac{\partial\theta}{\partial y} \\ 0 & 0 & p + \frac{1}{2}(\lambda e^2 - \mu h^2) & -d_1 b_2 + d_2 b_1 + k\frac{\partial\theta}{\partial z} \\ 0 & 0 & -e_1 h_2 + e_2 h_1 & \rho + \frac{1}{2}(\lambda e^2 - \mu h^2) + k\frac{\partial\theta}{\partial t} \end{array}\right\} \tag{1}$$

Les valeurs propres et les vecteurs principaux du tenseur $T_{\alpha\beta}$ sont, par définition, des scalaires N et des vecteurs l^α qui satisfont à la relation

$$T_{\alpha\beta} l^\beta = N g_{\alpha\beta} l^\beta$$

Les valeurs propres sont des solutions de l'équation

$$| T_{\alpha\beta} - N g_{\alpha\beta} | = 0$$

C'est une équation algébrique du quatrième ordre, qui, par sa forme spéciale, se décompose en deux équations quadratiques

$$\begin{vmatrix} T_{11}+N & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}+N \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} T_{33}+N & T_{34} \\ T_{43} & T_{44}-N \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

La notation $T_{\alpha\beta}$ se réfère à la matrice (1) et on ne l'use que pour plus de simplicité.

Le premier bloc de la matrice est symétrique, et l'équation quadratique qu'on obtient par l'évaluation du premier déterminant (2) a les solutions réelles, i.e.

$$N_{\mathrm{I/II}} = -p - \lambda e^2 \pm \sqrt{(\lambda e^2 - \mu h^2)^2 + 4\,\lambda\mu e^2\,h^2\,\cos^2\alpha}$$

oú α représente l'angle entre e_α et h_α.

On obtient les deux autres valeurs propres comme une solution de l'équation obtenue, par l'évaluation du deuxième déterminant (2). Pour simplifier les calculs, on introduit les notations suivantes

$$\frac{1}{2}\,(\lambda e^2 - \mu h^2) = D; \quad e_1\,h_2 - e_2\,h_1 = P; \quad P_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u^\beta\,e^\gamma\,h^\delta; \quad Q = \rho + k\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

P est le vecteur de Poynting. En usant ces notations on obtient deux autres valeurs propres de forme

$$N_{\mathrm{III/IV}} = \left\{ Q - p \mp \sqrt{(p-Q)^2 + 4\left[\left(p+D\right)\,(Q+D) - P\,\left(4\lambda\mu P - k\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right]}\right\}$$

En ce cas, le discriminant n'est pas toujours positif. C'est la raison de chercher les conditions pour que les valeurs propres soient réelles.

On se limitera à la considération du „gaz sans pression", jugeant que la pression en ce cas est négligeable par rapport à la densité. Supposons, donc, que $p = 0$. Dans notre cas, c'est équivalent à la condition

$$p = -2\,(Q + 2D), \qquad \text{pourtant } p > 0$$

Deux autres valeurs propres obtiennent la forme

$$N_{\mathrm{III/IV}} = \frac{1}{2}\left\{ Q \pm \sqrt{(Q+2D)^2 - 4P\left(\lambda\mu\;P - \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)}\right\}$$

Ces deux valeurs propres seront réelles à condition que:

$$\frac{1}{2\,\lambda\mu}\left\{k\,\frac{\partial\theta}{\partial z} - \sqrt{\left(k\,\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + \lambda\mu(Q+2D)^2}\right\} \leqslant P \leqslant \frac{1}{2\,\lambda\mu}\left\{k\,\frac{\partial\theta}{\partial z} + \sqrt{\left(k\,\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + \lambda\mu\,(Q+2D)^2}\right\}$$

La possibilité d'obtenir la solution double existe aussi et alors

$$N_{\mathrm{III}} = N_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}\,Q$$

Maintenant, on va déterminer les vecteurs principaux du tenseur d'impulsion-énergie considéré comme les solutions du système d'équations suivant

$$T_{\alpha\beta}\,l^\beta = N\,g_{\alpha\beta}\,l^\beta$$

A cause de la forme spéciale de la matrice du tenseur deux autres coordonnées des vecteurs propres, l^3 et l^4, n'apparaissent que dans les deux autres équations. Dans les deux premières équations apparaissent les coordonnées l^1, l^2 et l^4.

On va substituer les deux premières valeurs en système (3). Ainsi, deux autres équations forment un système homogène dont le déterminant est différent de zéro. Il ne permet que des solutions triviales, i.e.

$$l^3 = 0, \quad l^4 = 0$$

l^4 étant égal à zéro, le système composé des deux premières équations devient homogène. Son déterminant est égal à zéro (c'était la condition pour déterminer N_{I} et N_{II}) et les solutions sont linéarement dépendentes. Les deux premiers vecteurs principaux ont la forme

$$\vec{l}_{\mathrm{I/II}} = \left\{1, -\frac{T_{11} + N_{\mathrm{I/II}}}{T_{12}},\ 0, 0\right\} l^1$$

On voit de la forme même que les deux premiers vecteurs sont du type spatial. Pour déterminer les deux autres vecteurs principaux, on va substituer N_{III} et N_{IV} en système (3). Maintenant, le système formé par la troisième et la quatrième équation est homogène. Son déterminant est égal à zéro (c'était la condition pour déterminer N_{III} et N_{IV}). Les coordonnées l^3 et l^4 sont linéarement dépendentes. On détermine l^1 et l^2, exprimés par l^4, des deux premières équations. Les deux autres vecteurs principaux ont la forme suivante

$$\vec{l}_{\mathrm{III/IV}} = \left\{\frac{T_{11}\,T_{24}}{A}, \frac{T_{24}(T_{11} + N_{\mathrm{III/IV}}}{-A}, \frac{N_{\mathrm{III/IV}} - T_{44}}{T_{43}}, 1\right\} l_4$$

$$A = (T_{11} + N)(T_{22} + N) - (T_{12})^2$$

Il reste à examiner le type de ces deux vecteurs principaux. L'examen se réduit à la détermination de signe de l'expression

$$[(T_{43})^2 - (N - T_{44})^2]\, A^2 - (T_{43})^2\,(T_{24})^2\,[(T_{12})^2 + (T_{11} + N)^2]^2$$

Cette expression est positive sous condition

$$\frac{1}{4(\lambda\mu - 1)}\left\{k\frac{\partial\theta}{\partial z} - 4\,(Q + 2D)\right\} < P < \frac{1}{4(\lambda\mu - 1)}\left\{k\frac{\partial\theta}{\partial z} + 4\,(Q + 2D)\right\}$$

Cela signifie qu'il y ait possibilité qu'un vecteur principal soit du type temporel. Les trois autres vecteurs principaux sont du type spatial. Sans cette dernière condition, tous les quatre vecteurs sont du type spatial.

En cas de solution double, il y a possibilité que le vecteur principal, qui correspond à cette valeur propre, soit, ou bien du type spatial, ou bien du type temporel. Cela dépend du rapport du vecteur du champ électrique et magnétique et du vecteur conducteur de chaleur. La condition que ce vecteur soit du type temporel est

$$-\frac{1}{2}\,k\frac{\partial\theta}{\partial t} - k\frac{\partial\theta}{\partial y} \leqslant \frac{1}{2}\,(\lambda e^2 + \mu h^2) - \lambda\,(e_2)^2 + \mu\,(h_1)^2 \leqslant -\frac{1}{2}\,k\frac{\partial\theta}{\partial t} + k\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

Le signe d'égalité correspond au cas oú le vecteur est du type nul.

REFERENCES

[1] Cissoko M.: *Etude relativiste de ferrofluides conducteurs.* Ann. de l'Inst. de H. P., 1977.

EIGEN VALUES AND PRINCIPAL DIRECTIONS OF THE ENERGY MOMENTUM TENSOR OF THE FERROFLUID

Summary

In this paper we investigate the eigen values and principal directions of the energy-momentum tensor of the ferrofluid. The model we are concerned with, was proposed and introduced by Cattaneo and Cissoko. That energy-momentum tensor is not symmetric and it is not positive that eigen values are real. We obtain four different eigen values. Two eigen values are real and corresponding principal directions are space-like. For other two eigen values we find the condition making them real. We analyze the conditions determining the type of the corresponding principal direction.

SOPSTVENE VREDNOSTI I SOPSTVENI VEKTORI TENZORA ENERGIJE IMPULSA FEROFLUIDA

U radu se rasmatra ferofluid provodnik toplote po šemi koju su predložili Kataneo i Cisoko. Tenzor energije-impulsa ovakvog fluida sastoji se iz tri dela: prvi deo je tenzor energije-impulsa idealnog fluida, drugi deo se odnosi na elektromagnetno polje sa indukcijama a treći deo na provođenje toplot

$$T_{\alpha\beta}=(\rho+p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} H_{\xi\mu} G^{\xi\mu} - H_{\alpha\xi} G_{\beta}{}^{\xi}.- q_\alpha u_\beta$$

Oznaka ρ predstavlja sopstvenu gustinu mase, p je pritisak, u_α je četvorobrzina, $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(-1, -1, -1, 1)$ je metrički tenzor prostorvremena Minkovskog, $H_{\alpha\beta}$ je tenzor električnog polja magnetne indukcije, $G_{\alpha\beta}$ je tenzor magnetnog polja električne indukcije, a $q_\alpha = -k\dfrac{\partial\theta}{\partial x^\alpha}$ je vektor toplotnog fluksa, gde je θ količina toplote.

Posmatrani tenzor energije-impulsa nije simetričan zbog pojave električne i magnetne indukcije i vektora protoka toplote, pa zato nije unapred izvesno da će sopstvene vrednosti biti realne. U radu se dolazi do uslova da rešenja budu realna a zatim se izračunavaju sopstveni vektori. Na kraju se analiziraju uslovi koji određuju tip sopstvenih vektora.

Dragi Radojević
Matematički Institut
Knez Mihailova 35
11000 BEOGRAD
JUGOSLAVIJA