

## LA FLEXION D'UNE POUTRE EN DOUBLE I DE SECTION VARIABLE

*V. Basilievitch*

(Received December 20, 1979)

Le problème de flexion des poutres de section variable se présente souvent dans la pratique technique. Pour leur calcul, comme pour les poutres de section constante, on applique habituellement l'hypothèse de Bernoulli — Euler,  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 u}{dx^2} = \pm \frac{M}{EJ}$  et  $\sigma = \frac{M}{J} y$ . La justification de cette hypothèse sur les poutres de section constante et pour les différentes charges est prouvée par les nombreux travaux de St. Venant, de Michel et d'autres. Cependant pour les poutres de section variable la possibilité d'application de l'hypothèse de Bernoulli — Euler n'a pas été suffisamment étudiée et prouvée.

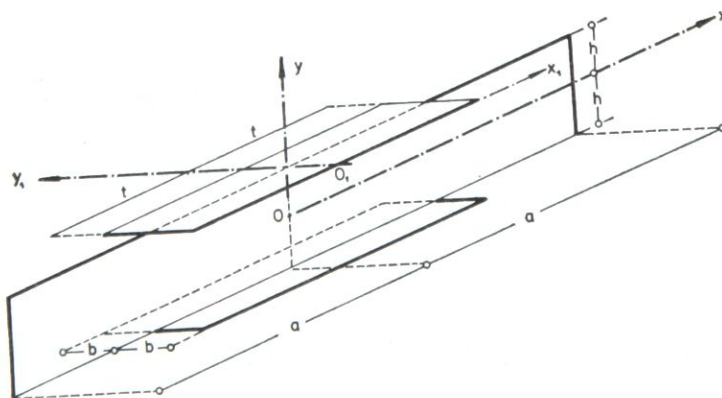


Fig. 1

Le but de cette étude est de comparer les résultats de calcul d'une poutre en double I de section variable Fig. 1, uniformément chargée par une charge  $q$ , suivant la théorie d'élasticité et appliquant l'hypothèse de Bernoulli — Euler.

### Calcul d'après la théorie d'élasticité

On suppose que la tension des brides et de l'âme de la poutre se présente en deux dimensions et par conséquent leurs fonctions de tension d'Airy doivent être biharmoniques. On les détermine séparément pour l'âme de la poutre et pour les moitiés des brides et elles doivent satisfaire les conditions limites sur les contours libres et les conditions de l'égalité des dilatations des brides et de l'âme de la poutre sur les lignes de jonction.

Pour l'âme de la poutre la fonction biharmonique dans le système des coordonnées  $Oxy$ :

$$\Phi_{R(x,y)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{2a} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \left( A_n + B_n \frac{n\pi y}{2a} \right) Ch \frac{n\pi y}{2a} + \left( C_n + D_n \frac{n\pi y}{2a} \right) Sh \frac{n\pi y}{2a} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

satisfait les conditions d'appui d'une poutre simple et les symétries de forme de la poutre et la charge par rapport à l'axe  $y$ . Les conditions limites sur les contours libres seront satisfaites si  $f_n(y)$  est impaire par rapport à l'axe de  $x$  ce qui exige que les coefficients  $A_n$  et  $D_n$  soient zéro, ainsi que sur le bord inférieur de l'âme de la poutre pour  $y = -h$  il n'y a pas de forces dans la direction de l'axe  $y$ .

$$P_y = \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_R}{\partial x^2} = 0$$

d'où

$$f_n(-h) = B_n \frac{n\pi(-h)}{2a} Ch \frac{n\pi(-h)}{2a} + C_n Sh \frac{n\pi(-h)}{2a} = 0$$

ce qui exige que  $C_n = -B_n \frac{n\pi h}{2a} Cth \frac{n\pi h}{2a}$

Par conséquent la fonction de la tension de l'âme de la poutre est:

$$(1) \quad \Phi_{R(x,y)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left( \frac{n\pi y}{2a} Ch \frac{n\pi y}{2a} - \frac{n\pi y}{2a} Cth \frac{n\pi h}{2a} Sh \frac{n\pi y}{2a} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

L'état de la tension sur les contours de l'âme de la poutre parallèles à l'axe  $x$  pour  $y = \pm h$  est présenté par cette fonction:

La tension tangentielle

$$\begin{aligned}
 P_x = (\pm \tau_x)_{y=\pm h} &= \pm \left( \frac{\partial^2 \Phi_R}{\partial x \partial y} \right)_{y=\pm h} = \\
 (2) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^2 \frac{Sh \frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}}{2Sh \frac{n\pi h}{2a}} \sin \frac{n\pi x}{2a}
 \end{aligned}$$

La tension normale, c'est à dire la dilatation, puisqu'on a  $\sigma_y = 0$ .

$$\begin{aligned}
 E(e_x)_{= \pm y = \pm h} = (\sigma_x)_{y=\pm h} &= \left( \frac{\partial^2 \Phi_R}{\partial y^2} \right)_{y=\pm h} = \\
 (3) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^2 2Sh \frac{n\pi h}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}
 \end{aligned}$$

Pour une partie de bride, d'un côté de l'âme de la poutre, la fonction biharmonique, dans le système des coordonnées  $O_1 x_1 y_1$ .

$$\begin{aligned}
 \Phi_{P(x_1, y_1)} &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} f_m(y_1) \cos \frac{m\pi x_1}{2t} = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \left( M_m + N_m \frac{m\pi y_1}{2t} \right) Ch \frac{m\pi y_1}{2t} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( P_m + R_m \frac{m\pi y_1}{2t} \right) Sh \frac{m\pi y_1}{2t} \right] \cos \frac{m\pi x_1}{2t}
 \end{aligned}$$

Satisfait les conditions limites sur les contours libres si pour  $y_1 = 0$ ,  $f_m(0) = 0$  et  $f'_m(0) = 0$ , ce qui exige que les coefficients  $M_m = 0$  et  $P_m = -N_m$ . Egalement doit être satisfaite la condition, que la ligne de jonction de la bride avec l'âme de la poutre, à cause de la symétrie, doit être pour  $y_1 = b$  le déplacement  $v$  dans la direction de l'axe  $y_1$  égal zéro.

$$Ev = \left[ \left( \frac{2t}{m\pi} \right)^2 f_m'''(b) - (2 + \mu) f'_m(b) \right] \cos \frac{m\pi x_1}{2t} = 0$$

ce qui exige que

$$R_m = \frac{2Ch \frac{m\pi b}{2t} - (1 + \mu) \frac{m\pi b}{2t} Sh \frac{m\pi b}{2t}}{(1 + \mu) \frac{m\pi b}{2t} Ch \frac{m\pi b}{2t} - (1 - \mu) Sh \frac{m\pi b}{2t}} N_m$$

Par conséquent la fonction de la tension pour une partie de bride, d'un bout de l'âme de la poutre est:

$$\Phi_{P(x_1, y_1)} = \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} N_m \left[ \frac{m \pi y_1}{2 t} Ch \frac{m \pi y_1}{2 t} + \left( \frac{2 Ch \frac{m \pi b}{2 t} - (1 + \mu) \frac{m \pi b}{2 t} Sh \frac{m \pi b}{2 t}}{(1 + \mu) \frac{m \pi b}{2 t} Ch \frac{m \pi b}{2 t} - (1 - \mu) Sh \frac{m \pi b}{2 t}} \cdot \frac{m \pi y_1}{2 t} - 1 \right) Sh \frac{m \pi y_1}{2 t} \right] \cdot \cos \frac{m \pi x_1}{2 t} \quad (4)$$

L'état de la tension sur la ligne de jonction de la bride et de l'âme de la poutre  $y_1 = b$  représente par cette fonction:

La tension tangentielle

$$P_x = (\tau_x)_{y_1=b} = \left( \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial x \partial y} \right)_{y_1=b} = \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} N_m \left( \frac{m \pi}{2 t} \right)^2 \frac{Sh \frac{m \pi b}{t} + \frac{m \pi b}{t}}{(1 + \mu) \frac{m \pi b}{2 t} Ch \frac{m \pi b}{2 t} - (1 - \mu) Sh \frac{m \pi b}{2 t}} \cdot \sin \frac{m \pi x_1}{2 t} \quad (5)$$

La tension normale

$$(\sigma_y)_{y_1=b} = \left( \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial x^2} \right)_{y_1=b} = - \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} N_m \left( \frac{m \pi}{2 t} \right)^2 \frac{(1 + \mu) \left( \frac{m \pi b}{2 t} \right)^2 + (1 - \mu) Sh^2 \frac{m \pi b}{2 t}}{(1 + \mu) \frac{m \pi b}{2 t} Ch \frac{m \pi b}{2 t} - (1 - \mu) Sh \frac{m \pi b}{2 t}} \cos \frac{m \pi x_1}{2 t} \quad (6)$$

$$(\sigma_{x_1})_{y_1=b} = \left( \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial y^2} \right)_{y_1=b} = \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} N_m \left( \frac{m \pi}{2 t} \right)^2 \frac{(1 + \mu) \left( \frac{m \pi b}{2 t} \right)^2 + 4 Ch^2 \frac{m \pi b}{2 t} - (1 - \mu) Sh^2 \frac{m \pi b}{2 t}}{(1 + \mu) \frac{m \pi b}{2 t} Ch \frac{m \pi b}{2 t} - (1 - \mu) Sh \frac{m \pi b}{2 t}} \cos \frac{m \pi x_2}{2 t} \quad (7)$$



Les expressions (6) et (7) déterminent la dilatation de la bride sur la ligne de jonction avec de l'âme de la poutre.

$$E(e_{x_1})_{y_1=b} = (\sigma_{x_1})_{y_1=b} - \mu (\sigma_{y_1})_{y_1=b} = \sum_{m=1,3..}^{\infty} N_m \left( \frac{m\pi}{2t} \right)^2 \cdot \frac{(1+\mu)^2 \left( \frac{m\pi b}{2t} \right)^2 + 4Ch^2 \frac{m\pi b}{2t} - (1-\mu)^2 Sh^2 \frac{m\pi b}{2t}}{(1+\mu) \frac{m\pi b}{2t} Ch \frac{m\pi b}{2t} - (1-\mu) Sh \frac{m\pi b}{2t}} \cos \frac{m\pi x_1}{2t}$$

L'égalité des dilatations de l'âme de la poutre et de la bride, sur leur ligne de jonction, réalise les forces par action mutuelle de l'âme de la poutre et de la bride. Ces forces sont les inconnues recherchées de ce problème, présentées par une serie infinitésimale, dont les coefficients  $\theta_m$  il faut déterminer.

$$(9) \quad P_x = \pm \sum_{m=1,3..}^{\infty} \theta_m \sin \frac{m\pi x_1}{2t}$$

D'après le principe de l'action et de la réaction ces forces doivent être pour l'âme de la poutre et la bride, de même intensité et de signe contraire. Pour ces forces sur l'extrémité supérieure de l'âme de la poutre on a pris le signe + et pour sa bride le signe -.

Les forces d'influence mutuelle de la bride et l'âme de la poutre, qui agissent sur la ligne de jonction supérieure, peuvent être présentées par la fonction de la tension lorsqu'on pose (5) égal à (9)

$$(\tau_x) = -\frac{1}{2} P_x = \sum_{m=1,3..}^{\infty} N_m \left( \frac{m\pi}{2t} \right)^2 \cdot \frac{Sh \frac{m\pi b}{t} + \frac{m\pi b}{t}}{(1+\mu) \frac{m\pi b}{2t} Ch \frac{m\pi b}{2t} - (1-\mu) Sh \frac{m\pi b}{2t}} \sin \frac{m\pi x_1}{2t} = -\frac{1}{2} \sum_{m=1,3..}^{\infty} \theta_m \sin \frac{m\pi x_1}{2t}$$

ce qui détermine le coefficient  $N_m$  en fonction  $\theta_m$ .

$$(10) \quad N_m = -\frac{(1+\mu) \frac{m\pi b}{2t} Ch \frac{m\pi b}{2t} - (1-\mu) Sh \frac{m\pi b}{2t}}{2 \left( \frac{m\pi}{2t} \right)^2 \left( Sh \frac{m\pi b}{t} + \frac{m\pi b}{t} \right)} \theta_m$$

Les forces d'influence mutuelles de la bride superieure et de l'âme de la poutre agissent seulement sur la ligne de jonction c'est à dire dans l'intervalle  $-t < x < +t$ . Dans les intervalles  $-a < x < -t$  et  $+t < x < +a$  où il n'y a pas de bride ces forces n'existent pas, ce qui est demotre par la fonction

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & -a < x < -t \\ \sin \frac{i \pi x}{2t} & -t < x < +t \\ 0 & +t < x < +a \end{cases} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_{in} \sin \frac{n \pi x_1}{2a}$$

d'ou on a

$$(11) \quad \alpha_{in} = - \frac{4(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)} n \cos \frac{n \pi t}{2a}}{\pi \left[ n^2 - \left( \frac{ia}{t} \right)^2 \right]}$$

Ainsi les forces d'influence mutuelle entre la bride et l'âme de la poutre, qui agissent sur le bord superieur de l'âme de la poutre, peuvent être exprimées par la fonction de la tension par (2), (9) et (11).

$$\begin{aligned} (\tau_x)_{y=+h} = P_x &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \left( \frac{n \pi}{2a} \right)^2 \frac{Sh \frac{n \pi h}{a} - \frac{n \pi h}{a}}{2 Sh \frac{n \pi h}{2a}} \sin \frac{n \pi x_1}{2a} = \\ &= \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \theta_i \sin \frac{i \pi x}{2t} = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \theta_i \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_{in} \sin \frac{n \pi x}{2a} \end{aligned}$$

ce qui determine les coefficients  $B_n$  en fonction de  $\theta_m$ .

$$(12) \quad B_n = - \frac{8 n Sh \frac{n \pi h}{2a} \cos \frac{n \pi t}{2a}}{\left( \frac{n \pi}{2a} \right)^2 \pi \left( Sh \frac{n \pi h}{a} - \frac{n \pi h}{a} \right)} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \theta_i \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}}{\left[ n^2 - \left( \frac{ia}{t} \right)^2 \right]}$$

La solution du problème est obtenue avec les conditions des égalités des dilatations des brides et de l'âme de la poutre sur les lignes de jonction par l'influence de toutes les forces: mutuelle entre des brides et de l'âme de la poutre et la charge donnée  $q$ .

La dilatation de la bride supérieure sur la ligne de jonction produit par la force d'influence mutuelle avec l'âme de la poutre peut être déterminée quand on applique (10) dans (4).

$$(13) \quad E(P e_x)_{y_1=b} = \sum_{m=1,3..}^{\infty} \frac{(1-\mu)^2 Sh^2 \frac{m\pi b}{2t} - 4Ch^2 \frac{m\pi b}{2t} - (1+\mu)^2 \left(\frac{m\pi b}{2t}\right)^2}{2\left(Sh \frac{m\pi b}{t} + \frac{m\pi b}{t}\right)} \cdot \theta_m \cos \frac{m\pi x}{2t}$$

La dilatation de l'âme de la poutre sur la ligne de jonction supérieure produit par la charge donnée  $q$  est:

$$(14) \quad E(q e_x)_{y=-+h} = -\frac{24 a^2 q}{\pi^3 h^2} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^3} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

La dilatation de l'âme de la poutre sur la ligne de jonction supérieure produit par la force d'influence de la bride supérieure peut être déterminée quand on applique (12) dans (3).

$$(15) \quad E(R e_x)_{y=+h} = -\frac{16}{\pi} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{nSh^2 \frac{n\pi h}{2a} \cos \frac{n\pi t}{2a}}{Sh \frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}} \cdot \sum_{i=1,3..}^{\infty} \theta_i \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}}{\left[n^2 - \left(\frac{ia}{t}\right)^2\right]} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

La comparatson des dilatations de la bride et de l'âme de la poutre doit se faire seulement dans l'intervalle  $-t < x < +t$  ce qui est possible pour l'âme de la poutre par la fonction

$$f_2(x) = \left| \cos \frac{n\pi x}{2a} \right|_{-t < x < +t} + \sum_{m=1,3..}^{\infty} \beta_{nm} \cos \frac{m\pi x}{2t}$$

d'où on a

$$(16) \quad \beta_{nm} = -\frac{4 a^2 m (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \cos \frac{n\pi t}{2a}}{\pi t^2 \left[ n^2 - \left(\frac{ma}{t}\right)^2 \right]}$$



La condition que la dilatation de la bride (13) et de l'âme de la poutre (14) et (15) sur leur ligne de jonction dans l'intervalle  $-t < x < +t$  doivent être égales (16)

$$\begin{aligned}
 E (P e_x)_{y=b} &= E (Q e_x)_{y=+h} + E (R e_x)_{y=+h} = \\
 &= \sum_{m=1,3..}^{\infty} \frac{(1-\mu)^2 Sh^2 \frac{m\pi b}{2t} - 4 Ch^2 \frac{m\pi b}{2t} - (1+\mu)^2 \left(\frac{m\pi b}{2t}\right)^2}{2 \left( Sh \frac{m\pi b}{t} + \frac{\tau b}{t} \right)} \theta_m \cos \frac{m\pi x}{2t} = \\
 &= \left\{ + \frac{24 a^2 q}{\pi^3 h^2} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(1-)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^3} + \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{16 n Sh^2 \frac{n\pi h}{2a} \cos \frac{n\pi t}{2a}}{\pi \left( Sh \frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a} \right)} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \sum_{i=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}}{\left[ n^2 - \left( \frac{ia}{t} \right)^2 \right]} \theta_i \right\} \frac{4 a^2 \cos \frac{n\pi t}{2a}}{\pi t^2} \sum_{m=1,3..}^{\infty} \frac{m (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}}{\left[ n^2 - \left( \frac{ma}{t} \right)^2 \right]} \cos \frac{m\pi x}{2t}
 \end{aligned}$$

déterminent un système infini des equations linéaires

$$\begin{aligned}
 &\left[ \frac{(1-\mu)^2 Sh^2 \frac{m\pi b}{2t} - 4 Ch^2 \frac{m\pi b}{2t} - (1+\mu)^2 \left(\frac{m\pi b}{2t}\right)^2}{2 \left( Sh \frac{m\pi b}{a} + \frac{m\pi b}{a} \right)} m (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \right] \frac{t^2}{a^2} \theta_m - \\
 &- \frac{64}{\pi^2} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{n Sh^2 \frac{n\pi h}{2a} \cos^2 \frac{n\pi t}{2a}}{Sh \frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}} \sum_{i=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}}{n^3 \left[ n^2 - \left( \frac{ia}{t} \right)^2 \right] \left[ n^2 - \left( \frac{ma}{t} \right)^2 \right]} \theta_i = \\
 (17) \quad &= \frac{96 a^2 q}{\pi^4 h^2} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cos \frac{n\pi t}{2a}}{n^3 \left[ n^2 - \left( \frac{ma}{t} \right)^2 \right]}
 \end{aligned}$$

dont la solution determine les valeurs inconnues des coefficients  $\theta_m$  forces de l'influence mutuelle entre la bride et l'âme de la poutre. Ces equations peuvent être resolues par les approximations succesives, puisqu'elles demontrent la reduction de la deformation de la poutre sous l'action des forces entre les brides et l'âme de la poutre et determinent le minimum d'énergie potentielle de son deformation.



Ainsi on peut, au moyen de (12) et (1), déterminer la fonction de tension de l'âme de la poutre et par (10) et (4) la fonction de tension de la bride.

Par l'exemple ainsi présenté et calculé on peut voir que la concordance des dilatations de la bride (13) et celle de l'âme de la poutre (14) et (15) Fig. 2 est parfaite et on peut, par conséquent, déterminer leurs tensions avec la même précision. Cependant ce n'est pas le cas avec les forces, puisque le serie (9) n'est pas convergente.

Les forces inconnues de l'action mutuelle entre la bride et l'âme de la poutre qu'on recherche peuvent être plus précisément déterminées si on les divise en deux groupes:

Une qui sollicite le long de la ligne de jonction de la bride et de l'âme de la poutre une dilatation constante  $Ee_{sx}$ .

$$(18) \quad P_S = \sum_{m=1,3..}^{\infty} \alpha_m \sin \frac{m \pi x}{2 t}$$

et l'autre qui provoque le long de la ligne de jonction de la bride et l'âme de la poutre une dilatation variable  $Ee_{px}$ .

$$(19) \quad P_P = \sum_{m=1,3..}^{\infty} \lambda_m \sin \frac{m \pi x}{2 t}$$

d'où

$$(20) \quad \theta_m = \alpha_m + \lambda_m$$

A cause de l'identite des dilatation de la bride et l'âme de la poutre sur leur ligne de jonction leur derrivées doivent être aussi identiques.

Puisque les derrivées des dilatations constant sont zéro

$$(21) \quad \frac{\partial E_R e_{sx}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_P e_{sx}}{\partial x} = 0$$

dans les expressions (13) et (15) restent seulement les coefficients  $\lambda_m$  on peut les determiner séparement.

La comparaison des derrivées de dilatation de la bride et de l'ame de la poutre doit se faire selement dans l'intervalle  $-t < x < +t$  ce qui est possible pour l'âme de la poutre par la fonction

$$f_3(x) = \left| \sin \frac{n \pi x}{2 a} \right|_{-t < x < +t} = \sum_{m=1,3..}^{\infty} \gamma_{nm} \sin \frac{m \pi x}{2 t}$$

d'ou on a

$$(22) \quad \gamma_{nm} = - \frac{4 a (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} n \cos \frac{n \pi t}{2 a}}{\pi t \left[ n^2 - \left( \frac{m a}{t} \right)^2 \right]}$$

La condition que les dérivées de dilatation de la bride et de l'âme de la poutre sur leur ligne de jonction doivent être dans l'intervalle  $-t < x < +t$  égales et d'après (13), (14), (15), (21) et (22)

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{\partial E_p e_{px}}{\partial x} \right)_{y=b} = \left( \frac{\partial E_q e_{px}}{\partial x} \right)_{y=+h} + \left( \frac{\partial E_R e_{px}}{\partial x} \right)_{y=+h} = \\
 & = - \sum_{m=1,3..}^{\infty} \left[ \frac{(1-\mu)^2 Sh^2 \frac{m\pi b}{2t} - 4Ch^2 \frac{m\pi b}{2t} - (1+\mu)^2 \left( \frac{m\pi b}{2t} \right)^2}{2 \left( Sh \frac{m\pi b}{t} + \frac{m\pi b}{t} \right)} \lambda_m \frac{m\pi}{2t} \right] \\
 & \cdot \sin \frac{m\pi x}{2t} = - \left\{ \left[ - \frac{24a^2 q}{\pi^3 h^2} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^3} - \frac{16}{\pi} \sum_{u=1,3..}^{\infty} \frac{n Sh^2 \frac{n\pi h}{2a}}{Sh \frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}} \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \cos \frac{n\pi t}{2a} \sum_{i=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}}{\left[ n^2 - \left( \frac{ia}{t} \right)^2 \right]} \lambda_i \right] \frac{n\pi}{2a} \right\} (-1) \frac{4an \cos \frac{n\pi t}{2a}}{\pi t} \\
 & \sum_{m=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}}{\left[ n^2 - \left( \frac{ma}{t} \right)^2 \right]} \sin \frac{m\pi x}{2t}
 \end{aligned}$$

déterminent un système infini des équations linéaires

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{(1-\mu)^2 Sh^2 \frac{m\pi b}{2t} - 4Ch^2 \frac{m\pi b}{2t} - (1+\mu)^2 \left( \frac{m\pi b}{2t} \right)^2}{2 \left( Sh \frac{m\pi b}{t} + \frac{m\pi b}{t} \right)} (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \lambda_m - \right. \\
 & \left. - \frac{64}{\pi^2} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{n^3 Sh^2 \frac{n\pi h}{2a} \cos^2 \frac{n\pi t}{2a}}{Sh \frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}} \sum_{i=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}}{\left[ n^2 - \left( \frac{ia}{t} \right)^2 \right] \left[ n^2 - \left( \frac{ma}{t} \right)^2 \right]} \lambda_i = \right. \\
 (23) \quad & \left. = \frac{96a^2 q}{\pi^4 h^2} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cos \frac{n\pi t}{2a}}{n \left[ n^2 - \left( \frac{ma}{t} \right)^2 \right]} \right.
 \end{aligned}$$

dont la solution donnent les valeurs recherchées et inconnues de coefficients  $\lambda_m$  forces qui provoquent la dilatation variable de la bride et de l'âme de la poutre le long de leur ligne de jonction.

Ces équations ainsi que (17) peuvent se résoudre par approximations successives.

La serie (19) converge et represente le groupe des forces qui provoquent la dilatation variable Fig. 5.

Par (20) on obtient

$$(24) \quad \kappa_m = \theta_m - \lambda_m$$

Au moyen des coefficients calculés  $\kappa_m$  et  $\lambda_m$  on peut mieux étudier les dilatations de la bride et de l'âme de la poutre le long de leur ligne de jonction Fig. 3. et Fig. 4.

La serie (18) ne converge pas et possède une singularité dans les points  $x = +t$  et  $x = -t$  Fig. 6.

Le groupe de forces qui provoque la dilatation constante peut être représenté de manière suivante.

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial y^2} = E e_{sx} \cdot 1 = E e_{sx} \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}}{m} \cos \frac{m \pi x}{2t}$$

d'où

$$(26) \quad P = \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial x \partial y} = E e_{sx} b \frac{2}{t} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \sin \frac{m \pi x}{2t}$$

Dans mon étude de l'année 1956 j'ai traité le même problème en introduisant l'hypothèse que sur les extrémités de la bride agissent deux résultantes concentrées  $P$  de même grandeur et de sens contraire qui exercent une tension sur la bride supérieure et provoquent sur elle une dilatation constante. Ces résultantes j'ai présenté par une série nonconvergente

$$(27) \quad P = \frac{2P}{t} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \sin \frac{m \pi x}{2t}$$

qui est identique à la série (26) ce qui prouve que les forces inconnues et recherchées provoquant une dilatation constante de la bride et l'âme de la poutre sur la ligne de leur jonction, sont les résultantes concentrées qui sont déterminées.

$$(28) \quad P = E e_{sx} b$$

Mais seulement reste inconnue la tension dans la région des points de singularité.

Toutes les deux études, celle — ci et celle de l'année 1956 donnent le même état de tension et de la déformation de la poutre.



La ligne élastique de la poutre se détermine par (1) et (12) pour  $y=0$ .

$$(29) \quad Ev = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \left( \frac{2a}{n\pi} \right)^2 f_n'''(0) - (2 + \mu) f_n'(0) \right] \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

*Exemple*

$$b = 1 \text{ dm}; \quad h = 2 \text{ dm}; \quad a = 20 \text{ dm}; \quad t = 10 \text{ dm}; \quad q = 1 \text{ t/dm}$$

Les equations (17)

$m \backslash i$	$\theta_1$	$\theta_3$	$\theta_5$	$\theta_7$	$\theta_9$	$\theta_{11}$	$\alpha_0$
1	-3,2340	+0,0027	+0,0012	-0,0011	+0,0012	-0,0011	-22,7423
3	-0,0027	+0,4019	+0,0012	-0,0012	+0,0011	-0,0013	- 2,0500
5	+0,0012	-0,0012	-0,1746	-0,0013	+0,0010	-0,0014	- 0,7239
7	+0,0011	-0,0012	+0,0013	+0,1100	+0,0014	-0,0013	- 0,3673
9	+0,0012	-0,0011	+0,0010	-0,0014	-0,0816	-0,0012	- 0,2221
11	+0,0011	-0,0013	+0,0014	-0,0013	+0,0012	+0,0655	- 0,1483

déterminent

$\theta_1$	$\theta_3$	$\theta_5$	$\theta_7$	$\theta_9$	$\theta_{11}$
+7,0331	-5,0941	+4,2947	-3,5861	+3,0469	-2,6989

Les équations (23)

$m \backslash i$	$\lambda_1$	$\lambda_3$	$\lambda_5$	$\lambda_7$	$\lambda_9$	$\lambda_{11}$	$\alpha'_0$
1	-13,4141	+ 0,4351	- 0,3500	+ 0,2378	- 0,0884	- 0,1072	-17,3827
3	- 0,4351	+14,9431	- 0,3067	+ 0,2027	- 0,0496	- 0,1452	- 2,1520
5	- 0,3500	+ 0,3067	-17,8086	+ 0,1264	- 0,0236	- 0,2224	- 0,7762
7	- 0,2378	+ 0,2027	- 0,1264	+21,8051	+ 0,1386	- 0,3387	- 0,3976
9	- 0,0884	+ 0,0496	- 0,0226	- 0,1386	-26,5452	- 0,5022	- 0,2419
11	+ 0,1072	- 0,1452	+ 0,2225	- 0,3387	+ 0,5022	+31,5622	- 0,1638

déterminent

$\lambda_1$	$\lambda_3$	$\lambda_5$	$\lambda_7$	$\lambda_9$	$\lambda_{11}$
+ 1,4387	- 0,1019	+ 0,0136	- 0,0017	+ 0,0043	- 0,0108

Les équations (24) déterminent

$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_5$	$\alpha_7$	$\alpha_9$	$\alpha_{11}$
+ 5,5944	- 4,9922	+ 4,2811	- 3,5844	+ 3,0426	- 2,6881

A moyen de ces coefficients on détermine les tensions et les flèches de la poutre et puis comparées avec le valeurs obtenues en appliquant l'hypothèse de Bernoulli — Euler Fig. 7.

$$A = B = 20 \text{ t}; \quad M = 200 \text{ tdm}; \quad M = 150 \text{ tdm}.$$

$$J = 5,34 \text{ dm}^4; \quad J = 21,68 \text{ dm}^4; \quad P = 27,6 \text{ t}.$$

$$\sigma_{\max} = 18,5 \text{ t/dm}^2; \quad \sigma_{x=t} = 13,8 \text{ t/dm}^2; \quad \sigma_{x=t} = 56,2 \text{ t/dm}$$

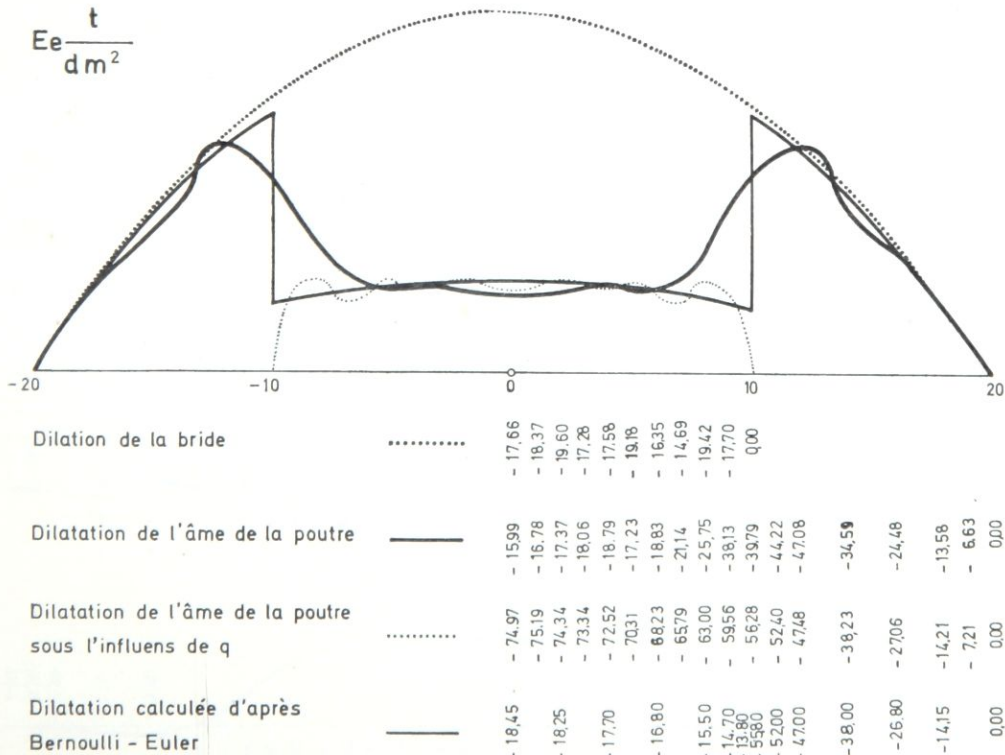


Fig. 2

Dilatation de la bride sur la ligne de jonction avec l'âme de la poutre

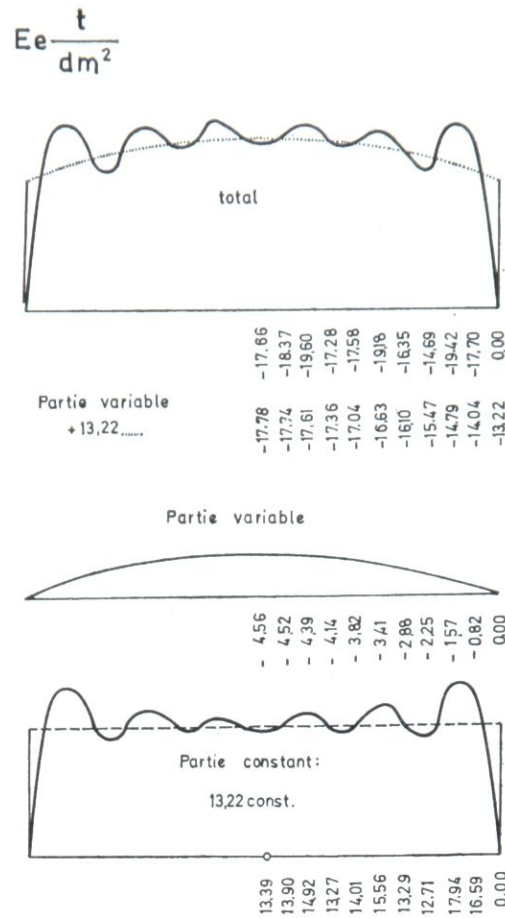


Fig. 3

Dilatation de l'âme de la poutre sous l'action des forces sur la ligne de jonction avec la bride.

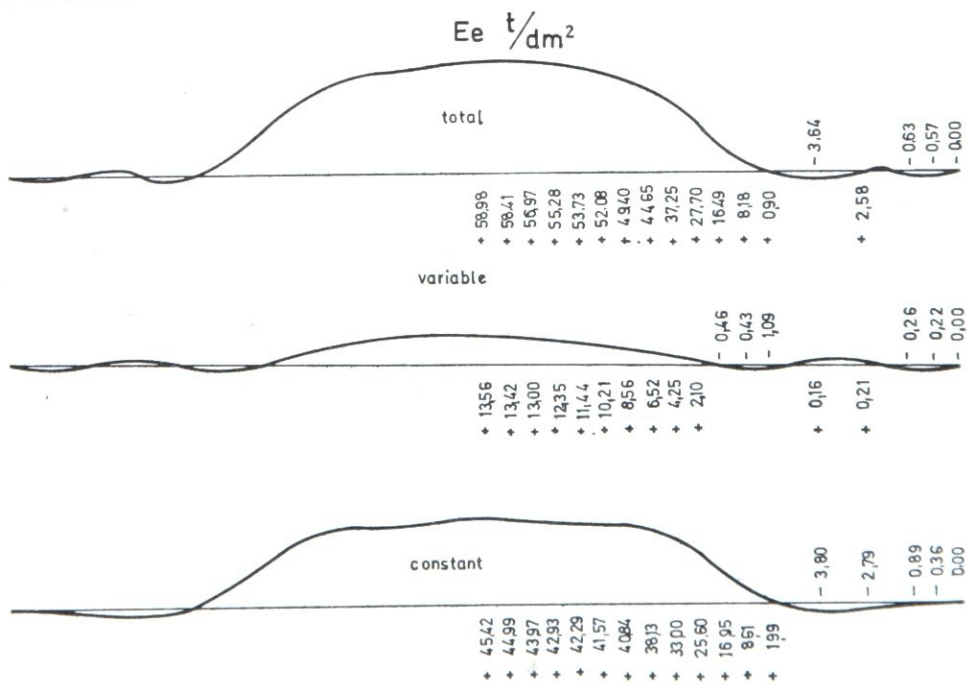


Fig. 4



Les forces sur la ligne de jonction de la bride et de l'âme de la poutre par (26)

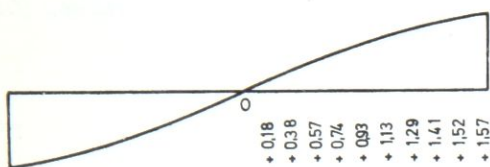


Fig. 5

Les forces sur la ligne de jonction de la bride et de l'âme de la poutre par (19)

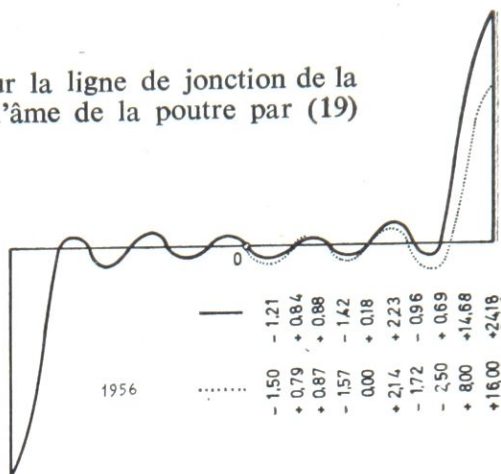
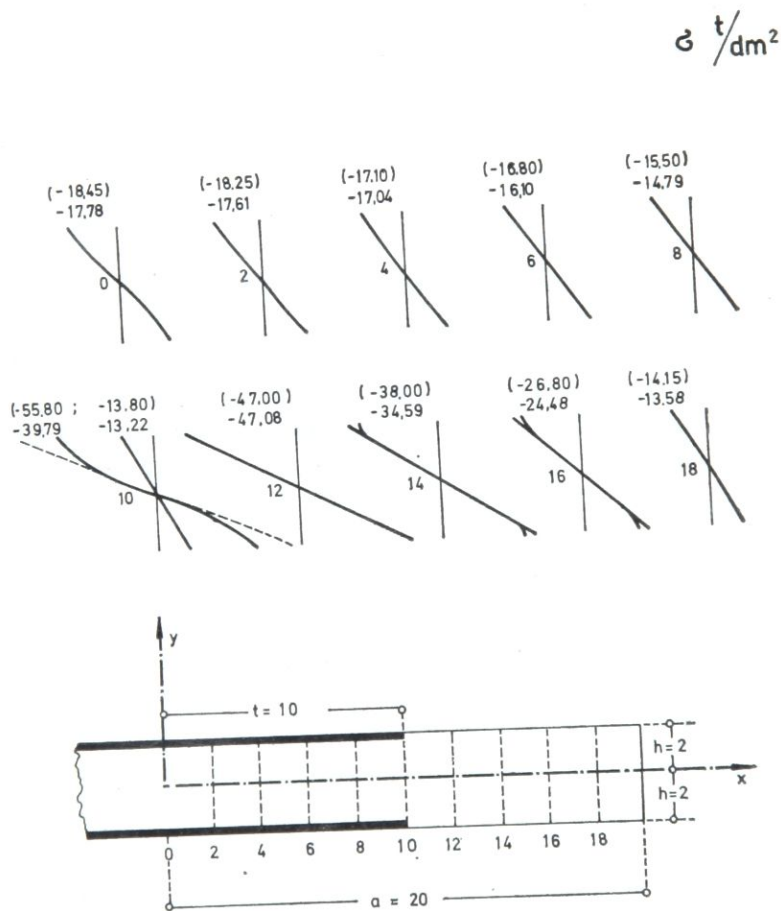


Fig. 6



Les valeurs entre parenthèses sont déterminées d'après les porules de Bernoulli — Euler.

$$Eu \frac{t}{dm}$$

La ligne de flèche de l'axe

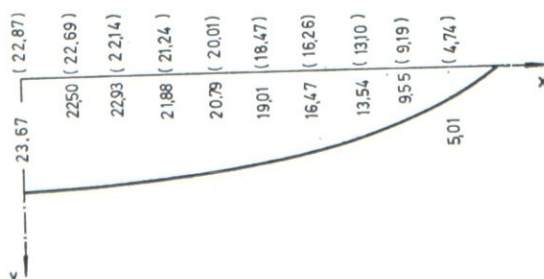


Fig. 7

La flêhhe est déterminée par (28) et par la méthode graphoanalytique.

En comparant on voit que l'application de l'hypothèse Bernoulli — Euler permet de s'en servir pour les poutres de section variable.

#### L I T E R A T U R E

V. Basilievitch. *La flexion d'une poutre en double I de section variable*, 9-th International Congress Theoretical and Applied Mechanics Bruxelles 1956.

V. Basilievitch  
Institut Mathématique  
11000 Belgrad

### THE BENDING OF A I BEAM OF VARIABLE CROSS SECTION

*V. Basilevich*

#### S u m m a r y

The problem of bending of a beam of variable cross section occurs very often in the engineering practice. For their calculation, as well as for the beams of constant cross section, the application of Bernoulli — Euler hypothesis is customary, the justification of which in case of beams of constant cross section is confirmed in different cases of loading in numerous works by St. Venant, Michel and others. For beams of variable cross section, however the justification of the application of Bernoulli — Euler hypothesis has not been sufficiently examined.

The task of this paper is to compare of the calculation of the tension of beams of variable cross section (Fig. 1) loaded by a equally distributed load  $q$  according to the elastic theory and with the application of Bernoulli — Euler hypothesis.

If we accept that in the calculation, according to the elastic theory, the stress of the beam parts (ribs and the half of the flanges) is two dimensional, accordingly their Airy functions of tension are biharmonic. In the selection of the above functions all boundary conditions at free contours are satisfied. On connecting lines of the rib and at the flanges act forces of their mutual influences. When the coefficients of stress functions are represented by the coefficients force function, from conditions identity dilatations of rib and flanges on their connecting lines, an infinite system of linear equations is obtained, the solution of which determines the function of the force and the function of stress, and thereby gives also the stress state of the beam. In the case of calculated example a satisfactory precision is attainable, coinciding with dilatation (Fig. 2).

By comparison of this precise method with the approximate it is seen that the Bernoulli — Euler hypothesis gives a satisfactory precision and accordingly its application in the engineering practice is quite justified.

## SAVIJANJE LIMENOG NOSAČA PROMENLJIVOG PRESEKA

V. Baziljević

## I z v o d

Zadatak ovog rada je upoređivanje proračuna napregnutog stanja nosača promenljivog poprečnog preseka sl. 1 opterećenog jednako podeljenim teretom  $q$  po teoriji elastičnosti i primenom Bernulli — Euleröve pretpostavke.

Usvaja se da je naprezanje delova nosača ravno i prema tome njihove Airyëve funkcije moraju biti ravne biharmonijske. One se biraju zasebno za rebro i za obe polovine pojaseva tako, da zadovoljavaju granične uslove na slobodnim konturama u obliku (1) i (4) sa koeficijentima  $B_n$  i  $N_m$ .

Identičnost dilatacija rebra i pojaseva na njihovoj spojnoj liniji ostvaruju sile uzajamnog uticaja rebra i pojaseva prikazane funkcijom (9) sa koeficijentima  $\theta_m$ . Ove sile su tražene nepoznata, koje rešavaju problem i delaju na oba dela pojasa duž njegove spojne linije sa rebrom i na delu ivice rebra u intervalu  $-t < x < +t$ , koja je spojena sa oba dva dela pojasa, što se prikazuje funkcijom (11).

Nepoznate sile uticaja pojasa i rebra mogu se tačnije odrediti ako se one podele u dve grupe: sile (18) sa koeficijentima  $\kappa_m$  koje izazivaju duž spojne linije pojasa i rebra stalnu dilataciju i sile (19) sa koeficijentima  $\lambda_m$  koje izazivaju duž spojne linije pojasa i rebra promenljivu dilataciju.

Dokazuje se da nepoznate tražene sile koje izazivaju stalnu diformaciju pojasa i rebra imaju koncentrisanu rezultantu (28), ali naponsko stanje koje ona izaziva u okolini singularne tačke ostaje neodređeno. Oba rada ovaj i iz 1956 g. daju isto napregnuto stanje.

V. Baziljević

Matematički institut,

Knez Mihailova 35

11000 Beograd