TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 6, pp. 133—143, 1980, UDK 531

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ЭНЕРГИИ СИСТЕМ СТЕСНЕННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СВЯЗЯМИ

В. А. Вуйичич

(Соопщено 25 апреля 1979)

Известно что интеграл энергии $T+V=h$ для склерономных систем и интеграл $T_2-T_0+V=h^*$ для систем, стесненных реономными связями, не одинаковы ни по форме, ни по физическому значению. Интеграл энергии $T+V=h$ показывает закон сохранения полной энергии консервативной системы. Закон сохранения полной механической энергии движения систем, подчиненых реономным связям, не доказан; наоборот, доказывается его недопустимость в n — мерном конфигурационном пространстве. Это обычно доказывается с помощью дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода которые не допускают интеграла энергии. В этой статъе показана возможность вывода интеграла механической энергии движения систем точек, стесненных реномными связями при определённым условиям. Кроме того, обсуждается вопрос числа дифференциальных уравнений движения в расширенном конфигурационном и фазовом пространстве. К системе дифференциальных уравнеый Лагранжа второго рода добавляется одно дифференциальное уравнение, а число дифференциальных уравнений Гамильтона увеличивается на два.

1. С целью более ясного доказательства рассмотрим сначала систему N точек $M_\nu\,(\nu=1,\ldots,N)$ стесненных идеальными независимьыи голономными связями

$$f_\sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N;\, t)=0, \qquad (\sigma=1,\ldots,k<3N) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}_\nu$ радиус-векторы точек M_ν, у которых массы m_ν постоянные. Векторы $\mathbf{r}_\nu=\mathbf{r}_\nu(q^1,\ldots,q^n;\,t)$ функции времени $t=q^0$ и $n=3N-k$ обобщенных координат Лагранжа $q^i\,(i=1,\ldots,n)$ Векторы $\mathbf{v}_\nu$ скорости движения точек запишем

$$\mathbf{v}_\nu=\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q^0}\frac{dq^0}{dt}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1}\frac{dq^1}{dt}+\cdots+\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q^n}=\dot q^\alpha\,\mathbf{g}_{(\nu)\,\alpha} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{g}_{(\nu)\,\alpha}=\dfrac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$ базные векторы расширенного конфигурационного пространства.

Дифференциальиые уравнения движения точек

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu) = \mathbf{F}_\nu + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \, grad_{\mathbf{r}_\nu} f_\sigma \tag{1.3}$$

умножим скалярно на базные векторы $\mathbf{g}_{(\nu)\alpha}$ и суммируем по индеку ν. Получим $n+1$ ковариантных дифференциальных уравнений движения

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot q^\beta}{dt} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

где $\dfrac{D\dot q^\beta}{dt} = \dfrac{d\dot p^\beta}{dt} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\dot q^\alpha \dfrac{dq^\gamma}{dt}$ ковариантная производная по времени обобщенной скорости $\dot q^\beta$, Q_α обобщенные силы и $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}(q^0, q^1, \ldots, q^n)$ основный тензор расширенного конфигурационного пространства R_{n+1}. Мы потом проанализируем структуру системы дифференциальных уравнений (1.4) и обобщенных сил Q_α, а теперь определим интеграл энергии рассматриваемых систем, стесненных нестационарными связями (1.1). Если систему дифференциальных уравнений (1.4) умножим на $\dot q^\alpha$ и суммируем по индексу α, получим инвариант

$$a_{\alpha\beta}\dot q^\alpha D\dot q^\beta = Q_\alpha \, dq^\alpha \tag{1.5}$$

или

$$D\left(\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta\right) = Q_\alpha \, dq^\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.6}$$

Так как абсолютный дифференциал DJ инварианты J равняется обычном дифференциалу dJ той же инварианты, уравнение (1.6) представляет закон изменения кинетической энергии T,

$$dT = Q_\alpha \, dq^\alpha \tag{1.7}$$

где

$$T = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta = \frac{1}{2} a_{ij}\dot q^i \dot q^j + a_{0i}\dot q^i + \frac{1}{2} a_{00} \tag{1.8}$$

$$(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n; \; i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

кинетическая энергия механической реономной системы точек. Предположим, что существует потенциал V^*, так что

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V^*}{\partial q^\alpha}, \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

включая и $Q_0 = -\dfrac{\partial V^*}{\partial t}$. Тогда правая часть уравнения (1.7) тоже полный дифференциал

$$Q_\alpha \, dq^\alpha = -\frac{\partial V^*}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = -\frac{\partial V^*}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial V^*}{\partial t} dt = dV^* \tag{1.10}$$

и мы получим интеграл энергии реономной системы,

$$T+V^*=h=\text{const.}, \tag{1.11}$$

или

$$T_2+T_1+T_0+V^*(t, q^1, \ldots, q^n)=h, \tag{1.12}$$

где

$$T_2=\frac{1}{2}\dot{q}^i\dot{q}^j, \qquad T_1=a_{0i}\dot{q}^i, \qquad T_0=\frac{1}{2}a_{00} \tag{1.13}$$

,,Интеграл" (1.11) показывает закон энергии механической системы, движение которой стесненно нестационарными голономными связями. По форме этот интеграл соотвествует интегралу сохранения энергии механической консервативной системы. Между тем вопрос интеграла (1.11) или (1.12) более сложный. Поэтому ищет более полный и ясный анализ с математической и механической точки зреня.

Что касается математической стороны вопроса вывода интеграла (1.11) и (1.12) легко показать его справедливость. Из соотношения (1.2) для любой ν — той точки показывается независимость $n+1$ базных векторов $\mathbf{g}_\alpha$ $(\alpha=0, 1, \ldots, n)$. Поэтому и $n+1$ дифференциальных уравнений независимые. если существует такой потенциал $V^*=V^*(q^0, q^1, \ldots, q^n)$ зависимый от $n+1$ координат $q^0, q^1, \ldots, q^n$, и Q_α удовлетворяют соотношениям (1.9) и (1.10) то существует первый интеграл (1.11) или (1.12).

2. С механичесћой точки зрения вопрось вывода и существования интеграла энергии (1.12) гораздо сложнейший. Достаточно сравнить обобщенный интеграл энергии

$$T_2-T_0+V=h \tag{2.1}$$

с ,,интегралом" (1.12) и заметить что слово идет о неодинаковым интегралам. Если ещё заметим что V не зависит от времени t, а V^* зависит, будет ясно что это не одинаковые ни физические законы которые выражают интегралы (2.1) и (1.12). Чтобы раскрить сущность проблемы выведём интеграл (2.1) тем же способом как и интеграл (1.12). Известно что исходные дифференциальные уравнения для интеграла (2.1) дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i=-\frac{\partial V}{\partial q^i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Эты уравнения преобразуются к ковариантном виде

$$a_{i\alpha}\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt}=Q_i=-\frac{\partial V}{\partial q^i}, \qquad (\alpha=0, 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Умножим теперь каждое уравнение (2.3) соотвественно на dq^i и суммируем по индексу i; следует:

$$a_{i\alpha}\dot{q}^i D\dot{q}^\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q^i}dq^i.$$

Чтобы получить дифференциал кинетической энергии, к сумме на левой стороны уравнения добавим $a_{0\beta}\dot{q}^0 D\dot{q}^\beta - a_{0\beta}\dot{q}^0 D\dot{q}^\beta = 0$. Следует:

$$a_{i\beta}\dot{q}^i D\dot{q}^\beta + a_{0\beta}\dot{q}^0 D\dot{q}^\beta - a_{0\beta}\dot{q}^0 D\dot{q}^\beta = D\left(\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\right) -$$

$$- a_{0\beta}\dot{q}^0 D\dot{q}^\beta = D(T_1 + T_2 + T_0) - a_{0\beta}\dot{q}^0 D\dot{q}^\beta = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}dq^i.$$

Заметим что

$$a_{0\beta}\dot{q}^0 D\dot{q}^\beta = a_{0\beta} D\dot{q}^\beta = D(a_{0\beta}\dot{q}^\beta) = D(a_{0i}\dot{q}^i + a_{00}) = D(T_1 - 2T_0).$$

Из-за этого дальше происходит

$$D(T_2 - T_0) = -\frac{\partial V}{\partial q^i}dq^i. \tag{2.4}$$

Правая часть уравнения (2.4) может быть полным дифференциалом только если V не зависит от времени t. В этом случае $D(T_2 - T_0) = -dV$ и мы получим (2.1).

Это первый интеграл дифференциалных уравнений движения Лагранжа второго рода (2.2) или (2.3). Известно и видно что число дифференциальных уравнений движения (2.2) равняется числу степеней свободы движения n. Между тем размерность расширенного конфигурационного пространства R_{n+1} равняется $n+1$. Поэтому, чтобы рассматривать движение в пространстве R_{n+1} надо брать систему дифференциальных уравнений (1.4) или к системе (2.3) добавить дифференциальное уравнение, соотвествующее координате $q^0 = t$. Зиметим, что с геометрической точки зрения дифференциальные уравнения (2.2) или (2.3) получаются как проекции векторных дифференциальных уравнений (1.3) к направлениям базисных векторов $\mathbf{g}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ а дифференциалнные уравнения (1.4) как проекции на те же самые направления и ещё к направлению вектора $\mathbf{g}_0 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$. Это показывает что дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода (2.2) не описивают движение систем в направлению вектора $\mathbf{g}_{(\nu)0} = \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}$. Другими словами эти уравнения не обхватывают в полности действительное движение систем стесненных нестационарными связями. Эту строгую констатацию надо доказать. В этой целю рассмотрим интеграл энергии исходя прямо из дифференциальных уравнений движения (1.3) у которых действующие силы имеют более ясное физическое значение чем их отображения-обобщенные силы Q_α.

Векторы скоростей и радиус векторы или их координаты, которые являются в дифференциальным уравнениям (1.3) зависимы вследствии связей (1.1), которые теперь напишем в виде

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu (t, q^1 \ldots, q^n), \qquad (n = 3N - k). \tag{2.5}$$

Умножим скалярно каждое дифференциальное уравнение (1.3) соотвественно на вектор действительного перемещения $d\mathbf{r}_\nu = v_\nu \, dt$ ν-той точки и потом суммируем по индексу ν. Получим закон изменения кинетической энергии в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot d\mathbf{v}_\nu = \sum_{N=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{K} \lambda_\mu \, grad_\nu f_\mu \cdot d\mathbf{r}_\nu. \tag{2.6}$$

Это соотношение нельзя рассматривать независимо от соотношений (1.1) или (2.5). Чтобы интегрировать дифференциальное уравнение (2.6), если это возможно, приведем его суммы к полным дифференциалам через независимые переменные q^i и время t. В этой целю все скорости $\mathbf{v}_\nu$, радиус векторы и дифференциалы $d\mathbf{r}_\nu$ в (2.6) заменим соотвествуыщим векторам (2.5) и (1.2). Для обозначений

$$\begin{cases} 2T_2 = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j, \qquad T_1 = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j} \dot{q}^j \\[2ex] \qquad\qquad 2T_0 = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \end{cases} \tag{2.7}$$

после подстановки (1.2) в (2.6) левая часть этого уравнения получит вид

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot d\mathbf{v}_\nu = d(T_2 + T_1 + T_0). \tag{2.8}$$

Тем же способом получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu &= \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} dq^i + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} dt = \\ &= Q_i \, dq^i + Q_0^* \, dt, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где очевидно

$$Q_0^* = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \tag{2.10}$$

и $Q_i \, (i = 1, \ldots, n)$ обобщенные силы. Обратим внимание на то, что выражение (2.9) для работы на действительном перемещению отличается от соотвественной виртуальной работы $Q_i \, \delta q^i$, но не и работы на действительном перемещению $Q_\alpha\, dq^\alpha$ систем стесненных стационарными связями, в котором случае $Q_0^*\equiv 0$, так как $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\equiv 0$.

Последная сумма соотношения (2.6) преобразуется как следует

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_\mu\, grad_\nu f_\mu\cdot d\mathbf{r}_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_\mu\, grad_\nu\, f_\mu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}\,dq^i+ \tag{2.11}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_\mu\, grad_\nu f_\mu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\,dt=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial q^i}\,dq^i+\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_\mu\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}+\frac{\partial f_\mu}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial t}+\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial t}\right)dt.$$

Подстановком (2.5) в (1.1) получим тождества

$$f_\mu(t,\, q^1,\, \ldots,\, q^n)\equiv 0 \tag{2.12}$$

из-за чего следует

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial q^i}\equiv 0 \qquad (\mu=1,\, \ldots,\, k;\quad i=1,\, \ldots,\, n).$$

Поэтому виражение работы сил реакций связей (2.11) на действительном перемещению $d\mathbf{r}_\nu$ приводится к

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_\mu\, grad_\nu\, f_\mu\cdot d\mathbf{r}_\mu=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_\mu\, grad_\nu f_\mu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\,dt. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13), (2.11) и (2.8) в уравнение (2.6) получим закон изменения кинетической энергии реономной системы в виде

$$d(T_2+T_1+T_0)=Q_i\, dq^i+Q_0\, dq^0 \tag{2.14}$$

где, в силу (2.11),

$$Q_0=\sum_{\nu=1}^{N}\left(\mathbf{F}_\nu+\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_\mu\, grad_\nu f_\mu\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\,. \tag{2.15}$$

Мы снова пришли к закону (1.7) в котором теперь ясна структура обобщенной силы Q_0. Это показывает что интеграл энергии (1.12), как первый интеграл дифференциальных уравнений движения (1.4), невозмоно определить если неизвестные силы реакции. Между тем интеграл (1.12) можно определить с начала в интегралном виде, а после определния и в окончательном виде. В этом случау возможно определить множители Лагранжа $\lambda_\mu = \lambda_\mu(t)$ и целое выражение

$$R_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{K} \lambda_\mu \, grad_\nu f_\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \tag{2.16}$$

как функции от времени t. Виражение (2.15) напишем в виде

$$Q_0 = Q_0^* + R_0 \tag{2.17}$$

где Q_0 опреденно соотношением (2.11). Если силы F_ν потенциальные у которых потенциал $V = V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ зависит только от положения точек, то через нестационарные связи (2.5) этот потенциал будет функция координат Лагранжа и времени t. В этом случаю

$$Q_0^* = \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{и} \quad Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.18}$$

Подставляя Q_0^* в (2.17) и потом Q_0 и Q_i в (2.14) получим

$$d(T_2 + T_1 + T_0) = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + R_0 \, dt \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n).$$

Предполагая что удовлетворяются условия $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta} = \frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha}$ дальше следует

$$dT + dV = R_0 \, dt \tag{2.19}$$

и отсюда интеграл (1.13) в виде

$$T + V = \int R_0 \, dt + C \tag{2.20}$$

где $C = \text{const}$, $T = T_2 + T_1 + T_0 = T(t, q^1, \ldots q^n; \dot{q}, \ldots, \dot{q}^n)$ кинетическая и $V = V(t, q^1, \ldots, q^n)$ потенциальная энергия.

Если известно или если возможно определить $R_0 = R_0(t)$ как функцию времени t, интеграл энергии (2.20) будет

$$T + V + \Pi(t) = h = \text{const.}, \tag{2.21}$$

где $\Pi(t) = \int Q_0(t) \, dt$. Из n дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода определим n неизвестных координат и скоростей $\dot{q}^i$. Помощу их из последнего дифференциального уравнения, соотвествующего координате $q_0 = t$ определим $R_0 = R_0(t)$ в функции времени t.

Поэтому надо к системе (2.2) от n дифференциальных уравнений добавить $n+1$ -ое уравнение чтобы эта система была полная так как для действительного движения в расширеном конфигурационном пространстве R_{n+1} нужно $n+1$ дифференциальных уравнений движения (1.4); это как уже сказали отражения дифференциальных уравнений движения (1.3) на направлениям базных векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, включая и вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$. Етому вектору, который указубаем на отличие действительного и возможного движения, отвечает дифференциальное уравнение

$$a_{0\alpha}\frac{D\dot{q}^{\alpha}}{dt}=Q_0 \qquad (\alpha=0,\,1,\,\ldots,\,n) \tag{3.1}$$

или то-же самое

$$a_{0\alpha}\frac{d\dot{q}^{\alpha}}{dt}+\Gamma_{\alpha\beta,\,0}\,\dot{q}^{\alpha}\,\dot{q}^{\beta}=Q_0, \tag{3.2}$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta\ 0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta 0}}{\partial q^{\alpha}}+\frac{\partial a_{\alpha 0}}{\partial q^{\beta}}-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\right) \tag{3.3}$$

символы Кристоффеля первого рода. Имея в вуду что $\dot{q}^0=1$, дифференциальное уравнение (3.1) можно привести к виду

$$a_{0i}\frac{d\dot{q}^{i}}{dt}+\Gamma_{ij,\,0}\,\dot{q}^{i}\,\dot{q}^{j}+\Gamma_{00,\,0}=Q_0 \tag{3.4}$$

где, очевидно,

$$\begin{cases}\Gamma_{00,\,0}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a_{00}}{\partial t}=\displaystyle\sum_{\nu=1}^{N}m_{\nu}\frac{\partial^3\mathbf{r}_{\nu}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_{\nu}}{\partial t}\\[2ex] \Gamma_{i0,\,0}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a_{00}}{\partial q^i}=\displaystyle\sum_{\nu=1}^{N}m_{\nu}\frac{\partial^2\mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i\,\partial t}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_{\nu}}{\partial t}\end{cases} \tag{3.5}$$

Дифференциальное уравнение (3.2), которое получили скалярным умножением дифференциальных уравнений (1.3) на вектор $\mathbf{g}_{(\nu)0}$, отвечает дополнительному уравнению Лагранжа второго рода,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^0}-\frac{\partial T}{\partial q^0}=Q_0, \tag{3.6}$$

где, как уже сказали, $q^0=t$. Это легако показать. Частная производня

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^0}=a_{i0}\,\dot{q}^{i}+a_{00}=p_0 \tag{3.7}$$

представляет обобщенный импульс, соотвествующий координате q^0. Дальше находим:

$$(3.8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q^0} = a_{i0}\,\ddot q^i + \dfrac{\partial a_i{}^0}{\partial q^j}\,\dot q^i \dot q^j + \dfrac{\partial a_{i0}}{\partial t}\,\dot q^i + \dfrac{\partial a^{00}}{\partial q^i}\,\dot q^i + \dfrac{\partial a_{00}}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial q^0} = \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial t}\,\dot q^i \dot q^j + \dfrac{\partial a_{i0}}{\partial t}\,\dot q^i + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a_{00}}{\partial t}. \end{cases}$$

Если заметим что

$$\frac{\partial a_{i0}}{\partial q^j}\,\dot q^i \dot q^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{i0}}{\partial q^j} + \frac{\partial a_{j0}}{\partial q^i}\right)\dot q^i \dot q^j$$

и (3.8) подставим в (3.6), получим

$$a_{0i}\,\ddot q^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{j0}}{\partial q^i} + \frac{\partial a_{i0}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\dot q^i \dot q^j + $$

$$+ \frac{\partial a_{00}}{\partial q^i}\,\dot q^i + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{00}}{\partial t} = Q_0.$$

Это, в смисле (3.3) и 3.5), уравнение (3.4).

Дифференциальное уравнение Лагранжа второго рода (2.2) и уравнение (3.6) представляют теперь необходымою систему от $n+1$ дифференциальных уравнений с помощу которых можно получить интеграл энергии (2.20) действительного движения систем материальных точек стесненных реономными связями. Дифференциальные уравнения Лагранжа (2.2) определяют n координат $q^i = q^i(t)$ если известные обобщенные силы Q_i. Но при движении систем стесненных нестационарными связями не известна сила вследствие которой связи изменяются. Соотвествующая координата в пространстве R_{n+1} нам известна и мы помощю уравнения (3.6) определяем $n+1$ -вую координату Q_0 вектора обобщенной силы.

4. Интеграл энергии (1.11) при высказанным условиям получается и из дифференциальных уравнений Гамильтона если этой системе уравнений добавим пару уравнений

$$(4.1)\qquad \dot q^0 = \frac{\partial H}{\partial p_0}, \qquad \dot p_0 = -\frac{\partial H}{\partial q^0}$$

или, то-же самое,

$$(4.2)\qquad 1 = \frac{\partial H}{\partial p_0}, \qquad \dot p_0 = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

соотвествующих фазовым координатам $\dot q^0$ и p_0.

Уравнения (4.1) с известными дифференциальными уравнениями Гамильтона

$$(4.3)\qquad \dot q^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

представляют полную систем от $2n+2$ дифференциальных уравнений

$$\dot{q}^{\alpha}=\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \tag{4.4}$$

$$(\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

$$\dot{p}_{\alpha}=-\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \tag{4.5}$$

для определения движения в расширенном фазовом пространстве Φ_{2n+2}. Здесь ясно что функция Гамильтона $H=p_{\alpha}\,\dot{q}^{\alpha}-L^{*}=T+V^{*}$ равнается суммы кинетической энергии (1.8) и потенциала V^{*}, опрделенного соотношениями (1.9) и (1.10). Кинетическую энергию надо выразить через переменные Гамильтона q^{α} и p_{α} $(\alpha=0,\ 1,\ \ldots\ n)$, т.е.

$$T=\frac{1}{2}\,a^{\alpha\beta}\,p_{\alpha}\,p_{\beta}=\frac{1}{2}\,a^{ij}\,p_{i}\,p_{j}+a^{0\,i}\,p_{0}\,p_{i}+\frac{1}{2}\,a^{00}\,p_{0}\,p_{0} \tag{4.6}$$

где p_0 определённо соотношением (3.7).

Умножим каждое уравнения (4.4) соотвествено на dp_{α} и уравнения (4.5) соотвествено на dq^{α} и потом суммируем. Получим

$$\dot{q}^{\alpha}\,dp_{\alpha}=\frac{dp_{\alpha}}{dt}\,dq^{\alpha}=\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\,dp_{\alpha},$$

$$\dot{p}_{\alpha}\,dq^{\alpha}=-\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}}\,dq^{\alpha}$$

Видно что дальше происходит

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\,dp_{\alpha}+\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}}\,dq^{\alpha}=d\,H=0, \tag{4.7}$$

и отсуда закон энергии (1.11), так как $H=T+V^{*}=h$.

В заключение считаю своим очень приятньм долгом выразить глубокую благодарность профессору Валентину Виталевичу Румянцеву за очень полезную критику работы.

ON THE ENERGY CONSERVATION THEOREM FOR THE SYSTEM WITH RHEONOMOUS CONSTRAINTS

Veljko Vujičić

Summary

It is general accepted that the law of energy conseryation for mechanical system with rheonomous constraints is not valid. The aim of this paper is to proove that it is possible to evaluate the energy integral (2.21) of rheonomous system when the potential force exists.

Motion of the system with n degrees of freedon is described by $n+1$ equations (1.4). The equation (3.6) has been added to the system of second order Lagrange differential equations (1.16) that correspond to the coordinate-time $q^0=t$. Two equations (4.1) hawe been added to the Hamilton equation.

This set of equations finaly leads to the law of kinetic energy variation of rheonomous system for the real motion in the form (1.7) and also to the energy integral in form (1.12) or (2.20). By equations (2.14) and (2.15) the way to find out the energy conservation theorem is shown, using $n+1$ differential equations of motion that corresponds to the time instant t.

The energy integrals obtaned (2.20) were compared with Yacoby first enenergy integral. It was showu that these integrals are obtained for the particular conditions as the first integrals of n Lagrange differential equations of second order while the energy integral obtained is the integral of the system of $n+1$ diferential equations.

О ИНТЕГРАЛУ ЕНЕРГИЈЕ СИСТЕМА СА НЕСТАЦИОНАРНИМ ВЕЗАМА

Вељко Вујичић

Извод

У класичној механици усвојени су ставови да не важи закон о одржавању енергије механичког система са реономним везама. У овом раду је изведен закон енергије реономног система у интегралном облику (2.20).

За кретање система са n степена слободе користи се $n+1$ једначина (1.4). Систем Лагранжових диференцијалних једначина друге врсте (1.6) допуњује се једначином (3.6), која одговара координати-времену $q^0=t$. Хамилтонове једначине кретања допуњавају се паром једначина (4.1). Помоћу таквих система диференцијалних једначина одређује се закон промене кинетичке енергије реономног система на стварном кретању у облику (1.7), а интеграл енергије у облику (1.12). Релацијама (2.14) и (2.15) показује се како се интеграл енергије одређује помоћу $n+1$-не диференцијалне једначине која одговара времену t.

Извршено је поређење новодобијеног закона енергије (1.12) са Јакобијевим првим интегралом енергије. Показано је да се ти интеграли добијају за одређене услове као први интеграли n диференцијалних Лагранжових једначина друге врсте, а овде добијени Закон енергије (2.20) је интеграл система од $n+1$ диференцијалне једначине.

Вељко А. Вујичић
Математички институт
Кнез Михаилова 35
11000 Београд