TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 5, pp. 85—90, 1979.

О ПРИНЦИПЕ СРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА-ЛЯПУНОВА В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ

А. А. Мартынюк

(Получено февраля 26, 1979)

§ 1. Формулировка задачи

Рассматривается система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \mu R(t, x), \tag{1}$$

где $x \in E_n$, $X(t, x) \in C(I \times D, E_n)$, $R(t, x) \in C(I \times D, E_n)$, где $I = [0, \infty)$, D-открытая область в $E_n : D = \{x : \| x \| < H\}$, $H = \text{const} > 0$, $\| \cdot \|$-евклидова норма, μ-малый положительный параметр. Предполагается, что при $(t_0, x_0) \in \operatorname{int}(I \times D, E_n)$ решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует и единственно при всех $t \geqslant t_0$, $X(t, 0) = R(t, 0) = 0$. Кроме того будем считать известным решение $\bar{x}(t) = \bar{x}(t, t_0, x_0)$ порождающей системы, соответствующей (1):

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{2}$$

при тех же начальных значениях $(t_0, x_0) \in \operatorname{int}(I \times D, E_n)$.

Сформулируем задачу исследования следующим образом. В случае лишь устойчивости системы (2) сформулировать принцип сравнения для вывода теорем об устойчивости системы (1) на основе метода сравнения С. А. Чаплыгина [1] и прямого метода А. М. Ляпунова [2].

§ 2. Лемма принципа сравнения

Пусть $\bar{x}(t) = \bar{x}(t, t_0, x_0)$ решение системы (2) $(t_0, x_0) \in \operatorname{int}(I \times D, E_n)$ существует и единственно при всех $t \geqslant t_0$. Доказательство приводимых далее утверждений об устойчивости невозмущенного движения системы (1) основано на следующем условии разрешимости задачи Чаплыгина. Рассмотрим интегральное уравнение с малым параметром

$$y(t) = y_0(t, x_0, \mu) + \mu \int_{t_0}^{t} \omega(s, y(s), \| \bar{x}(s) \|)\, ds, \quad t \geqslant t_0 \tag{3}$$

обозначим через $G_y(t, x_0, \mu)$ его y-верхнее непрерывное решение [3].

Лемма 1. *Пусть выполняются условия:*

1) *Функция* $\omega(t, y, z)$ *непрерывна по* t, z *в области* $(0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty,$ $-\infty < h^0 < z < H^0 < \infty)$ *и является неубывающей функцией* y $(-\infty < h < y < H < \infty)$.

2) *Функция* $y_0(t, x_2, \mu)$ *непрерывна по* t *и при* $\mu < \mu_1$ $(|y_0(t, x_0, \mu)| < \delta\ \forall t \geqslant t_0)$.

3) *Непрерывная функция* $v(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$v(t) < y_0(t, x_0, \mu) + \mu \int_{t_0}^{t} \omega(s, v(s), \|\bar{x}(s)\|)\, ds, \quad t \geqslant t_0$$

при $0 < \mu < \mu_2$, $\mu_2 = \text{const} > 0$.

Тогда

$$v(t) < G_y(t, x_0, \mu) \tag{4}$$

при всех $t \geqslant t_0$ *и для* $0 < \mu < \mu_0$, $\mu_0 = \min(\mu_1, \mu_2)$.

Доказательство леммы проводится аналогично тому, как в [4] доказана разрешимость задачи Чаплыгина для другого вида интегральных уравнений.

Следующее утверждение в различных модификациях используется во многих работах, связанных с исследованием устойчивости решений на основе принципа сравнения.

Лемма. 2. *Пусть для системы дифференциальных уравнений возмущенного движения* (1) *существует функция Ляпунова* $V(t, x)$ *такая, что*

$$a(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant B(\|x\|),$$

где $a(r)$, $B(r)$ *при* $r \in [0, H]$ *монотонно возрастающие функции* r $(a(0) = B(0) = 0)$. *и вдоль решений системы* (1) *функция* $v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0))$ *удовлетворяет двусторонней оценке*

$$g_y(t, x_0, \mu) < v(t) < G_y(t, x_0, \mu) \tag{5}$$

при всех $t \geqslant t_0$, $0 < \mu < \mu_0$.

Тогда свойство устойчивости (равномерной устойчивости), асимптотической устойчивости (равномерной асимптотической устойчивости) неустойчивости невозмущенного движения системы (1) *однозначно определяется соответствующими свойствами* y*-верхнего* (y*-нижнего*) *решений* $G_y(t, x_0, \mu)$ $(g_y(t, x_0, \mu))$ *уравнения сравнения* (3).

Не останавливаясь на доказательстве этой леммы, отметим здесь монографию В. И. Зубова [5] и статью К. Кордуняну [6], в которых утверждения такого типа строго доказаны для случая дифференциального уравнения сравнения, интегрирующегося в явном виде [5].

§ 2. Исследовани устойчивости решения $x=0$ системы (1)

Утановим вначеле оценку для функции Ляпунова $V(t, x)$ вдоль решений системы (1) в том случае, когда порождающая система имеет устойчивое нулевое решение.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия:*

1°. *Для системы* (2) *существует непрерывная определенно положительная допускающая бесконечно малый высший предел функция Ляпунова* $V(t, x)$ *такая, что в области* $(I \times D, E_n)$

$$(6) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + (\operatorname{grad} V, \ X(t, x)) \leqslant 0.$$

2°. *Существует функция* $\omega(t, y, z)$ $(\omega(t, 0, z)=0)$ *монотонно возрастающая по* y *при фиксированных* (t, z) *из области* $(I \times D, E_n)$, *такая что*

$$(7) \qquad |\psi(t, x)-\psi(t, \bar{x})| < \omega(t, V, \ \|\bar{x}\|),$$

где $\psi(t, x)=(\operatorname{grad} V, \ R(t, x))$ *а* $\psi(t, \bar{x})$ *функция, получающаяся из* ψ *при подстановке в выражение* $\psi(t, x)$ *решения* $\bar{x}(t, t_0, x_0)$ *порождающей системы* (2).

Тогда для функции $v(t)=V(t, x(t, t_0, x_0))$ *вдоль решений системи* (1) *имеет место оценка*

$$(8) \qquad v(t) < y_0(t, x_0, \mu)+\mu \int_{t_0}^{t} \omega(s, v(s), \ \|\bar{x}(s)\|)\, ds,$$

при всех $t \geqslant t_0$, *где*

$$y_0(t, x_0, \mu)=V(t_0, x_0)+\mu \int_{t_0}^{t} \psi(s, \bar{x}(s))\, ds.$$

Отметим, что в силу предположений о функциях $V(t, x)$ и $\omega(t, y, z)$ уравнение (3) является интегральным уравнением сравнения для неравенства (8) и т.к. $y_0(t, x_0, \mu)$ суть функция ограничена в точке $t=t_0$, то согласно леммы 1 разрешимость задачи Чаплыгина [4] для (3) обеспечена.

Рассмотрим далее неравенство (8). Предположим, что существуют функции $c(t, \mu)$ и $k(t) \geqslant 0$ непрерывные при $t \geqslant t_0$, которые обеспечивают оценку

$$(9) \qquad \mu \int_{t_0}^{t} \omega(s, v(s), \ \|\bar{x}(s)\|)\, ds \leqslant c(t, \mu) \int_{t_0}^{t} k(s)\, v^{\alpha}(s)\, ds.$$

Неравенство (8) с оценкой (9) будем рассматривать в двух случаях

$$c(t, \mu)=\begin{cases} 2\mu & \text{при} \quad 0<\alpha<1, \\ B(t, \mu) \geqslant 0 & \text{при} \quad \alpha \geqslant 2. \end{cases}$$

Эти случаи естественно возникают например для некоторых выражений функций μX_s, μY_s в системе с чисто мнимыми корнями

$$\frac{dx_s}{dt} = -\lambda_s y_s + \mu X_s(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k);$$

$$\frac{dy_s}{dt} = \lambda_s x_s + \mu Y_s(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k).$$

С помощью оценки (9) неравенство (8) приведем к виду

$$v(t) < y_0(t, x_0, \mu) + c(t, \mu) \int_{t_0}^{t} k(s) v^{\alpha}(s)\, ds, \quad t \geqslant t_0. \tag{10}$$

Если $\alpha \geqslant 2$, то в силу теоремы 1 об интегральном неравенстве [7] для $v(t)$ находим

$$v(t) < y_0(t, x_0, \mu) \left\{1 - (\alpha - 1) \int_{t_0}^{t} k(s) B(s, \mu) y_0^{\alpha-1}(s, x_0, \mu\, ds\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{11}$$

при всех $t_0 \leqslant t < t^*$, где

$$t^* = \sup \left\{ t \in I : (\alpha - 1) \int_{t_0}^{t} kBy_0^{\alpha-1}\, ds < 1 \right\}.$$

Принимая во внимание лемму 2 условия устойчивости нулевого решения системы (2) при действии возмущающих сил $\mu R(t, x)$ сформулируем в виде ряда утверждений.

Теорема 1. *Невозмущенное движение системы* (2) *при действии возмущающих сил* $\mu R(t, x)$ *устойчиво при* $0 < \mu < \mu_0$, *где* $\mu_0 = \min(\mu_1, \mu_2)$, *если:*

1°. *Выполняются условия леммы* 3 *с оценкой* (9).

2°. *Существует функция* $m(t_0) \geqslant 0$ *такая, что* $y_0(t, x_0, \mu) < m$ *при всех* $t \geqslant t_0$ *и* $0 < \mu < \mu_1$.

3°. $(\alpha - 1) \int_{0}^{\infty} k(s) B(s, \mu) y_0^{\alpha-1}(s, x_0, \mu)\, ds < \infty$ *при* $0 < \mu < \mu_2$.

Теорема 2. *Невозмущенное движение системы* (2) *при действии возмущающих сил* $\mu R(t, x)$ *равномерно по* t_0 *устойчиво при* $0 < \mu < \mu_*$, *где* $\mu_* = \min(\mu_1^*, \mu_2^*)$, *если:*

1°. *Виполняются условия леммы* 3 *с оценкой* (9).

2°. *Существует постоянная* $M > 0$ *такая, что* $y_0(t, x_0, \mu) < M$ *при всех* $t \geqslant t_0$, $t_0 \geqslant 0$ *и* $0 < \mu < \mu_1^*$;

3°. $(\alpha - 1) \int_{t_0}^{\infty} k(s) b(s, \mu) y_0^{\alpha-1}(s, x_0, \mu)\, ds < M$, $\forall t_0 \geqslant 0$, $0 < \mu < \mu_2^*$.

Теорема 3. *Невозмущенное движение системы* (2) *при действии возмущающих сил* $\mu R(t, x)$ *асимптотически устойчиво, если выполняются условия* 1°, 3° *теоремы* 1 *и* $\lim y_0(t, \mu, x_0) = 0$ *при* $t \to \infty$.

Теорема 4. *Невозмущенное движение системы* (2) *при действии возмущающих сил* $\mu R(t, x)$ *устойчиво равномерно по* t_0 *и асимптотически устойчиво равномерно по* x_0, *если выполняются условия* 1°, 3° *теоремы* 2 *и, кроме того* $\lim y_0(t, x_0, \mu) = 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательства теорем 1—4 основаны на оценке (11) и лемме 2.

При $0 < \alpha < 1$ применяя к неравенству (10) лемму 2.1 [8] получим

$$v(t) < y_0(t, x_0, \mu) + 2\mu\gamma_0^{\alpha}\left(\int_{t_0}^{t} k^q(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}, \quad q = \frac{1}{1-\alpha}, \tag{12}$$

при $t \in [t_0, T]$, где

$$\gamma_0 = \lim_{r\to\infty}\gamma_r, \quad \gamma_1 = \sigma^q, \quad \gamma_{r+1} = \gamma_r - \frac{\chi(\gamma_r)}{\chi(\beta) - \chi(\gamma_r)}(\beta - \gamma_r);$$

$$\chi(\gamma) = \gamma - p - \sigma\gamma^{\alpha}, \quad p = \int_{t_0}^{T} y_0(s, x_0, \mu)\,ds, \quad \sigma = 2\mu\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t} k^q(s)\,ds\right]dt,$$

$$\beta = (\sigma\alpha)^q - \frac{(1-\alpha)^q\,[\sigma\alpha^q - p - \sigma(\sigma\alpha)^q]}{(1-\alpha^q) - \sigma^{1+\alpha}(1-\alpha^q)}.$$

Оценка (12) позволяет исследовать практическую устойчивость решения [9] системы (1) во всех тех случаях, когда условия устойчивости выражены в терминах ограничений на верхнее решение соответствующего уравнения сравнения [9—11].

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, *Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений*, Избр. труды, М., „Наука“, 1976, с. 307—360.

[2] А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, М.—Л., ОНТИ, 1935, 385 с.

[3] А. А. Мартынюк, *О качественом и численно-аналитическом исследовании устойчивости движения*, Прикл. механика, 1977, 13, вып. 10, с. 87—93

[4] Л. Ф. Рахматуллина, *Об одном применении условий разрешимости задачи Чаплыгина к вопросам ограниченности и устойчивости решений дифференциальных уравнений*, Изв. Вузов, Математика, 1959, № 2, с. 198—201.

[5] В. И. Зубов, *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*, Л., Судпромгиз, 1959, 322 с.

[6] К. Кордуняну, *Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости*, Analele Stinitifice ale univ. ”Al; Cusa“ din Iasi, Sec. I. 6, 1960, pp. 47—58.

[7] Stachurska B., *On a nonlinear integral inequality*, Zeszyty Nauk Univ. Jagiellonskiego 252, Prace. Mat. 15, 151—157 (1971)

[8] Ш. Г. Гамидов, *Некоторые интегральные неравенства для краевых задачи дифференциальных уравнения*, т. У, № 3, 1969, с. 463—472.

[9] Мартынюк, А. А., *Техническая устойчивость в динамике*, К., Техника, 1973, 188 с.

[10] А. А. Мартынюк, *Устойчивость движения сложных систем*, К., Наукова думка, 1975, 355 с.

[11] Michel A. N. *Quantitative Analysis of Systems: Stability, Boundedness, and Trajectory Behavior*, Arch. Ration. Mech. and Analysis, V. 38, № 2, 107—122 (1970).

А. А. Мартынюк
Институт механики АН УССР
Киев

ON CHAPLYGIN-LYAPUNOV COMPARISON PRINCIPLE IN NONLINEAR MECHANICS

A. A. Martinyuk

Summary

For the system of differential equations of perturbed motion with small additively entered perturbations the stability conditions, uniform stability conditions, asymptotic stability conditions are established, in such case when generating system is only stable and hence, in conditions of non-utilization of I. G. Malkin theorem about the stability with constantly acted perturbations. The stability conditions of determined type stability of corresponding comparison system.

О ЧАПЛИГИН-ЉАПУНОВЉЕНОМ ПРИНЦИПУ УПОРЕЂИВАЊА У ЛИНЕАРНОЈ МЕХАНИЦИ

А. А. Мартинјук

Резиме

Разматра се стабилност тривијалног решења нелинеарног система на који дејствују стални мали поремећаји применом „принципа упоређивања Чаплигина" и Љапуновљеног директног метода. Задатак који се решава састоји се у томе да се нађу услови под којим би се о стабилности тривијалног решења разматраног система могло судити на основу стабилности тривијалног решења кореспондентног (такође нелинеарног) система без поремећајних сила.