TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 5, pp. 35—43, 1979.

APPROXIMATIONS PARAMETRIQUES DANS LA THÉORIE DE LA COUCHE LIMITE NON STATIONNAIRE APPLIQUÉES AUX ÉCOULEMENTS AUTOUR DES CORPS DÉFORMABLES

J. Jovanović et R. Ašković

(Reçu le 26 Février 1979)

Introduction

Les méthods modernes analytiques à calculer la couche limite laminaire sont, en majeure partie, basées sur l'idée bien connue de Loitsianski [1]: à l'aide d'ensembles infinis de form-paramètres, transférés ensuite en nouvelles variables independantes, il est possible à transformer les équations de la couche limite sous une forme universelle. Cette équation universelle peut être intégrée une fois pour toutes et la solution, présentée par exemple sous la forme des tableaux numériques, sert ensuite pour le calcul des différents cas spéciaux.

Il est à remarquer que dans le cas de la couche limite non stationnaire cette idée d'universalisation a été utilisée par plusieurs auteurs — collaberateurs à la Chaire de Mécanique des fluides à la Faculté de Génie Mécanique à Belgrade. Tous ces travaux ont été basés sous l'hypothèse que dans la vitesse extérieur de l'écoulement à potentiel les variables x et t sont séparées:

$$U(x, t) = \Omega(t) V(x), \tag{1}$$

où $\Omega(t)$ définie le mouvement du corps, tandis que la forme du corps intervient à travers $V(x)$. C'est le professeur Konstantin Voronjec qui avait fait une remarque, il y a quelques ans, sur la validité physique de la fonction (1), en illustrant cela par l'écoulement autour des corps déformables où la fonction V dépend implicitement de deux variables (x, t) et reste d'une forme arbitraire. À la base de cette remarque, Đukić [3] a développé une méthode pour le traitement de la couche limite non stationnaire dans le cas où la fonction $U(x, t)$ est d'une forme quelconque. En introduisant une variable non stationnaire du type de Watson, ainsi que deux ensembles de paramètres sous la forme de matrices, il a transformé le système d'équations de la couche limite à une seule équation à dérivées partielles, traitée ensuite par la méthode de développement en séries.

Le but de ce travail est une extension de l'idée de Đurić [2] afin de pouvoir traiter le problème de l'écoulement autour des corps déformables, dans le cas où la fonction $U(x, t)$ est de la forme:

$$U(x\ t)=\Omega(t)\,V(x, t).$$

Introduction de deux nouveaux ensembles infinis de paramètres et une généralisation des paramètres, déjà utilisés en [2], donnera la possibilité à faire l'universalisation des équations de la couche limite.

Transformation des équations

Les équations de la couche limite non stationnaire laminaire d'un fluide incompressible dans un système de coordonnées lié à l'obstacle du corps, avec les conditions limites et initiales, sont:

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\,\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3},\\
&y=0:\psi=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0;\quad y\to\infty:\frac{\partial\psi}{\partial y}\to U(x, t),\\
&t=t_a:\psi=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0\quad \text{pour chaque } y,
\end{aligned}\right\}$$

où l'instant t_a est définie par $\Omega(t_a)=0$.

Dans le cas d'une plaque plane ($V=1$), les équations de la couche limite non stationnaire (2), transformées sous la forme intégrale se ramène à:

$$(3)\qquad \frac{dz_p}{dt}=2H,$$

où

$$H=\zeta_p-g_1,\quad g_1=\frac{1}{\Omega}\,\frac{d\Omega}{dt}\,z_p,\quad \zeta_p=\left[\frac{\partial(u/\Omega)}{\partial(y/\delta_p)}\right]_{y=0},\quad z_p=\frac{\delta_p^2}{\nu}.$$

Ici $\delta_p=\int\limits_0^\infty\left(1-\frac{u}{\Omega}\right)dy$ représente l'éppaisseur de déplacement sur une plaque plane.

Introduisons maintenant les nouvelles variables; d'abord, une variable normale:

$$(4)\qquad \eta=A\,\frac{y}{\delta_p}$$

où A est une constante, et ensuite — au lieu des variables x et t — quatre ensembles infinis de paramètres de forme:

$$
(5)\qquad \left.\begin{aligned}
l^n_{k+1} &= \Omega^{n+1} V^n \frac{\partial^{k+n+1} V}{\partial x^{n+1}_{k+n} \partial t^k} z_p^{k+n+1}, \quad g_k = \frac{1}{\Omega} \frac{d^k \Omega}{dt^k} z_p^k, \\
p^n_k &= \Omega^n V^{n-1} \frac{\partial^{k+n} V}{\partial x^n \partial t^k} z_p^{k+n}, \quad \gamma^n_k = \Omega^k V^{k+1} \frac{\partial^{k+n} V}{\partial x^k \partial t^n} z_p^{k+n},
\end{aligned}\right\}
$$

où:

$$
k \in (1, 2, \ldots), \qquad n \in (0, 1, \ldots).
$$

Au moyen des expressions (3) et (5) on obtient aisément les formules de transformation suivantes:

$$
(6)\qquad \left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{z_p} \sum_{k=1,\, n=0}^{\infty} \left(a^n_k \frac{\partial}{\partial l^n_{k+1}} + b_k \frac{\partial}{\partial g_k} + d^n_k \frac{\partial}{\partial \gamma^n_k} + c^n_k \frac{\partial}{\partial p^n_k} \right), \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{\Omega V z_p} \sum_{k=1,\, n=0}^{\infty} \left(s^u_k \frac{\partial}{\partial l^n_{k+1}} + j^n_k \frac{\partial}{\partial p^n_k} + r^n_k \frac{\partial}{\partial \gamma^n_k} \right),
\end{aligned}\right\}
$$

où:

$$
(7)\qquad \left.\begin{aligned}
a^n_k &= l^n_{k+1} [(n+1) g_1 + n p^0_1 + 2H(k+n+1)] + l^n_{k+2}, \\
b_k &= (2kH - g_1) g_k + g_{k+1}, \\
d^n_k &= \gamma^n_k [k g_1 + (k-1) p^0_1 + 2H(k+n)] + \gamma^{n+1}_k, \\
c^n_k &= p^n_k n g_1 + (n-1) p^0_1 + 2H(k+n)] + p^n_{k+1}, \\
s^n_k &= n \gamma^0_1 l^n_{k+1} + l^{n+1}_{k+1}, \\
j^n_k &= (n-1) \gamma^0_1 p^n_k + p^{n+1}_k, \\
r^n_k &= (k-1) \gamma^0_1 \gamma^n_k + \gamma^n_{k+1}.
\end{aligned}\right\}
$$

Cherchons la solution de l'équation (2) sous la forme:

$$
(8)\qquad \psi(x, y, t) = \frac{\delta_p \Omega V}{A} F(\eta, \{g_k\}, \{l^n_{k+1}\}, \{p^n_k\}, \{\gamma^n_k\}),
$$

où F est une fonction réelle, continue et infinement dérivable par rapport à toutes ses variables dans le domaine considéré.

Après l'introduction de l'expression (8) dans l'équation (2) on obtient:

$$\begin{aligned}(9)\quad & \frac{\partial^3 F}{\partial\eta^3}+\frac{\gamma_1^0}{A^2}\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)^2+F\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right]+\frac{1}{A^2}(g_1+p_1^0)\left(1-\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)+\frac{H}{A^2}\eta\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}=\\ &=\frac{1}{A^2}\sum_{k=1,\,n=0}^{\infty}\left(a_k^n\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\,\partial l_{k+1}^n}+b_k\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\,\partial g_k}+d_k^n\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\,\partial\gamma_k^n}+c_k^n\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\,\partial p_k^n}+\right.\\ &+\frac{1}{A^2}\sum_{k=1,\,n=0}^{\infty}\left[s_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\,\partial l_{k+1}^n}-\frac{\partial F}{\partial l_{k+1}^n}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right)+j_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\,\partial p_k^n}-\frac{\partial F}{\partial p_k^n}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right)+\right.\\ &\left.+r_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\,\partial\gamma_k^n}-\frac{\partial F}{\partial\gamma_k^n}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right)\right],\end{aligned}$$

avec les conditions:

$$F=\frac{\partial F}{\partial\eta}=0 \quad \text{pour} \quad \eta=0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial\eta}\to 1 \quad \text{pour} \quad \eta\to\infty.$$

Puisque ni l'équation (9) ni les conditions ci-avant ne dépendent des données particulières du problème considéré, cela signifie que cette équation est universelle et peut être intégrée une fois pour toutes.

Il reste cependant à résoudre séparement, pour $\Omega(t)$ donné, l'équation différentielle ordinaire (3), afin de trouver z_p, c'est-à-dire δ_p.

Traitement de l'équation universelle

Pour le moment nous avons trouvé la solution de l'équation (9) sous la forme d'un développement en série:

$$\begin{aligned}(10)\quad F=&F_0(\eta,\ \{g_k\})+\gamma_1^0 F_{1a}(\eta,\ \{g_k)+p_1^0 F_{1b}(\eta,\ \{g_k\})+\gamma_1^{0^2} F_{11a}(\eta,\ \{g_k\})+\\ &+p_1^0 F_{11b}(\eta,\ \{g_k\})+\gamma_1^0 p_1^0 F_{12}(\eta,\ \{g_k\})+\ \dots\ .\end{aligned}$$

Si l'on présente ensuite les fonctions F_0, F_{1a}, ... etc. sous forme des séries vis-à-vis des variables g_k:

$$(11)\quad \left.\begin{aligned}F_0\ &=f_{0.0}(\eta)+g_1 f_{0.1}(\eta)+g_1^2 f_{0.11}(\eta)+g_2 f_{0.2}(\eta)+\dots,\\ F_{1a}&=f_{1a.0}(\eta)+g_1 f_{1a.1}(\eta)+g_1^2 f_{1a.11}(\eta)+g_2 f_{1a.2}(\eta)+\dots,\\ F_{1b}&=f_{1b.0}(\eta)+g_1 f_{1b.1}(\eta)+g_1^2 f_{1b.11}(\eta)+g_2 f_{1b.2}(\eta)+\dots,\\ F_{12}&=f_{12.0}(\eta)+g_1 f_{12.1}(\eta)+g_1^2 f_{12.11}(\eta)+g_2 f_{12.2}(\eta)+\dots,\end{aligned}\right\}$$

et la fonction H comme suit:

$$(12)\quad H=H_0+g_1 H_1+g_1^2 H_{11}+g_2 H_2+\ \dots\ ,$$

on obtient un système récursif d'équations différentielles ordinaires pour les fonctions $f(\eta)$:

$$L_0(f_{0.0})=0,$$

$$L_1(f_{0.1})=A^{-2}(f'_{0.0}-H_1\eta f''_{0.0}-1),$$

$$L_2(f_{0.11})=A^{-2}(2H_1f'_{0.1}-H_1\eta f''_{0.1}-H_{11}\eta f''_{0.0}),$$

. . . .

$$L_1(f_{1a.0})=A^{-2}(f'^2_{0.0}-f_{0.0}f''_{0.0}-1),$$

$$L_2(f_{1a.1})=A^{-2}[2(H_1+1)f'_{1a.0}-H_1\eta f''_{1a.0}+2f'_{0.0}f'_{1.0}-f_{0.1}f''_{0.1}-f_{0.1}f''_{0.0}],$$

. . . .

$$L_1(f_{1b.0})=A^{-2}(f'_{0.0}-1),$$

$$L_2(f_{1b.1})=A^{-2}[(2H_1+1)f'_{1b.0}+f'_{0.1}-H_1\eta f'_{1b.0}],$$

. . . .

$$L_2(f_{11a.0})=A^{-2}(2f'_{0.0}f'_{1a.0}-f_{0.0}f''_{1a.0}-f''_{0.0}f_{1a.0}),$$

. . . .

$$L_2(f_{11b.0})=0,$$

. . . .

$$L_2(f_{12.0})=A^{-2}(f'_{1a.0}+f'_{0.0}f'_{1b.0}-f_{0.0}f''_{1b.0}),$$

. . . .

où L_k est un opérateur différentiel linéaire:

$$L_k=\frac{d^3}{d\eta^3}+\frac{H_0}{A^2}\frac{d^2}{d\eta^2}-2\frac{H_0}{A^2}k\frac{d}{d\eta}.$$

Les conditions aux limites sont:

$$f_{0.0}(0)=f'_{0.0}(0)=0,\quad f'_{0.0}(\infty)=1,$$

$$f_{0.1}(0)=f_{0.11}(0)=\cdots=f'_{0.1}(0)=f'_{0.11}(0)=\cdots=f'_{0.1}(\infty)=f'_{0.11}(\infty)=\cdots=0.$$

Si l'on adapte les fonctions (10) et (11) à une plaque plane et tenant compte de la relation (3), il est possible à déterminer les coefficients dans la série (12):

$$H_0=Af''_{0.0}(0),\quad H_1=Af''_{0.1}(0)-1,\quad H_{11}=Af''_{0.11}(0),\ \ldots \tag{13}$$

D'autre part, si l'on veut que les équations différentielles ordinaires pour les fonctions $f(\eta)$, données ci-avant, deviennent résolvables analytiquement, il convient à choisir que:

$$\frac{H_0}{A^2}=2.$$

Alors, les équations différentielles sont du type parabolique, dont les solutions analytiques peuvent être présentées à l'aide des fonctions de cylindre parabolique [4], liées à l'intégrale de la fonction de Gauss $g_\alpha(\eta)$ comme suit:

$$g_\alpha = \frac{2^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} D_{-1-2\alpha}(\eta\sqrt{2}).$$

En voici qulques solutions:

$$f_{0.0}(\eta) = \eta + g_{1/2}(\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$f'_{0.1}(\eta) = A^{-2}\left[\frac{1}{4} g_0(\eta) + \frac{H_1}{16} g_{-1}(\eta) - g_1(\eta)\right],$$

$$f'_{0.11}(\eta) = \left(\frac{H_{11}}{24 A^2} - \frac{H_1^2}{48 A^4} - \frac{H_1}{96 A^4}\right) g_{-1}(\eta) - \frac{H_1^2}{512 A^4} g_{-2}(\eta),$$

. . . .

$$f'_{1a.0}(\eta) = \frac{\pi}{2} g_0(\eta) - \frac{1}{2}\left(3\pi + \frac{4}{3}\right) g_1(\eta) + \frac{\pi}{16} g_{-1}(\eta) - \frac{\sqrt{\pi}}{6} g_{-1/2}(\eta) -$$

$$- \frac{\pi}{2} g_1(\eta) g_0(\eta) + \frac{\pi}{2} g_{1/2}^2(\eta),$$

. . . .

$$f'_{1b.0}(\eta) = -\pi g_1(\eta) + \frac{\pi}{4} g_0(\eta).$$

. . . .

A l'aide des solutions analytiques, données ci-avant, d'une part, et des formules (13) d'autre part, on peut calculer les constantes:

$$H_0 = \frac{2}{\pi}, \quad H_1 = -\frac{2}{3}, \quad H_{11} = \frac{\pi}{72}, \; \ldots \; . \tag{14}$$

Cependant, pour chaque cas d'écoulement particulier il faut résoudre encore l'équation (3). Bien qu'on puisse, en principe, résoudre cette équation différentielle non linéaire avec un ordinateur, il est plus rationnel parfois de la linéariser en négligeant, en première approximation, le terme en z_p^2 et les termes suivants (la „solution simple"). On obtient, ainsi, l'intégrale:

$$z_p(t) = \frac{4}{\pi} \Omega^{-4/3} \int_{t_a}^{t} \Omega^{4/3} \, dt, \tag{15}$$

qui peut être calculé facilement pour chaque Ω particulier.

Exemple

Pour illustrer les résutlats, obtenus précédemment, prenons un cylindre circulaire dont le rayon R grandit au cours du temps d'après la loi: $R=R_0(1+at)$, étant mis brusquement en mouvement uniforme de translation avec la vitesse U_∞. On a donc:

$$U(x, t)=2U_\infty \sin\frac{x}{R_0(1+at)},$$

où $a=$const. A l'aide de (5) et (15) on obtient:

$$z_p=\frac{4}{\pi}t,$$

$$g_1=0,$$

$$\gamma_1^0=\frac{8}{\pi}\,\frac{U_\infty}{R_0}\,\frac{t}{1+at}\cos\theta,$$

$$p_1^0=-\frac{4}{\pi}\,\frac{at}{1+at}\,\theta\operatorname{ctg}\theta,$$

$$\theta=\frac{x}{R(t)}.$$

En tenant compte de la condition du décollement de la couche limite:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0,$$

dans le cas de la „solution simple" on obtient que le point de déccollement à l'obstacle du corps est déterminé par:

$$f_{0.0}''(0)+\gamma_1^0 f_{1a.0}''(0)+p_1^0 f_{1b.0}''(0)=0,$$

où

$$f_{0.0}''(0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}},\quad f_{1a.0}''(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1+\frac{4}{3\pi}\right),\quad f_{1b.0}''(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On constate d'ici que la distance parcourue par le cylindre ($s_{déc.}=U_\infty t_{déc.}$) jusqu'au moment du décollement, qui apparait dans un point à l'obstacle du corps, est présentée par:

(16)
$$\frac{s_{déc.}}{R_0}=\bar{s}_{déc.}=\frac{1}{\alpha(\theta\operatorname{ctg}\theta-1)-2\left(1+\frac{4}{3\pi}\right)\cos\theta},$$

où le paramètre $\alpha = \frac{aR_0}{U_\infty} = \frac{dR/dt}{U_\infty}$ définie le rapport de deux vitesses: celle de déformation du cylindre contre la vitesse à l'infini amont. Si l'on comprend la relation (16) comme $\tilde{s}_{déc.}$ en fonction de θ, en cherchant le minimum de cette fonction il s'en suit:

$$\alpha = 2\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)\frac{\sin^3\theta}{(\theta - \sin\theta\cos\theta)}. \tag{17}$$

Les deux relations (16) et (17) déterminent le premier décollement en fonction du paramètre α. Le tableau ci-après donne des valeurs de α et $(\tilde{s}_{déc.})_{min.}$ vis-à vis θ, conformément à (16)et (17).

$\theta°$	180	170	160	150	140	130	122.9	120
α	0	0.0047	0.0366	0.1167	0.2570	0.4638	0.6479	0.7322
$(\tilde{s}_{déc.})_{min.}$	0.351	0.367	0.432	0.549	0.851	2.063	1496.78	valeur négative

On voit d'ici que l'augmentation du paramètre α fait déplacer le point du premier décollement en amont vers le point d'impact antérieur en augmentant aussi la distance du décollement parcourue par le cylindre. Pour $\alpha \sim 0.648$, le premier décollement se passe à $\sim 123°$, après la distance $s_{déc.}$ égale à infini, c'est-à-dire — jamais! Pour les plus grandes valeurs du paramètre α, on obtient des valeurs négatives de $(s_{déc.})_{min.}$, ce qui ne correspond pas à la réalité.

REFERENCES

]1] L. G Loïtsianski, *Univerzalne jednačine i parametarske aproksimacije u teoriji graničnog sloja*, Prikl. Meh. Mat. 29 (1), 1965.

[2] M. Đurić, *On the universal form of unsteady incompressible boudary layer equation and its solution*, Publ. de l'Inst. Math., Tome 9 (23), 1969.

[3] Đ. Đukić, *Univerzalne jednačine nestacionarnih graničnih slojeva nestišljive tečnosti pri proizvoljnoj brzini spoljašnjeg strujanja*, Mat. vesnik, 8 (23), 1971.

[4] Whittaker T. E., Watson N. G., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1963.

Jovan Jovanović,
Institut za nuklearne nauke „Boris Kidrič",
11000 Beograd.

Radiša Ašković,
Katedra za Meh. fluida Mašinskog fakulteta,
11000 Beograd.

PARAMETRIC APPROXIMATIONS IN THE THEORY OF NONSTATIONARY BOUNDARY LAYER APPLIED TO THE FLOW AROUND DEFORMABLES BODIES

J Jovanović, B. Ašković

Summary

The unsteady laminar boundary layer on a deformable body in non uniform motion $U(x, t) = \Omega(t)\ V(x, t)$ is discussed. An universalisation of the unsteady boundary layer equations is first made in the sense that neither equations nor boundary conditions depend on particular problem data The universality is achieved by tıansfering sets of parameters which express the influence of time and deformability conditions, charasteristic for each particular problem, into the independent variables. Subsequently, the solution of the universal equation is found in the form of series expansions in mentioned parameters.

ПАРАМЕТАРСКЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ У ТЕОРИЈИ НЕСТАЦИОНАРНОГ ГРАНИЧНОГ СЛОЈА ПРИМЕЊЕНЕ НА СТРУЈАЊЕ ОКО ДЕФОРМАБИЛНИХ ТЕЛА

J. Јованвић, Р. Ашковић

Резиме

Обично се у случају нестационарног ламинарног граничног слоја узима да је брзина спољашњег потенцијалног струјања изражена производом двеју функција: $U(x, t) = \Omega(t)\ V(x)$, где прва функција $\Omega(t)$ дефинише начин (нестационарног) кретања тела, док друга $V(x)$ приказује облик тела. У овом раду се, међутим, третира проблем нестационарног граничног слоја око деформабилног тела, где је спољашња брзина представљена као $U(x, t) = \Omega(t)\ V(x, t)$. Уводећи нову нормалну променљиву, као и четири бесконачна скупа форм-параметара уместо променљивих x, t у раду је извршена универзализација једначина граничног слоја око деформабилног тела произвољног облика. Ове универзалне једначине су потом аналитички третиране помоћу развијања у редове непознатих функција. Коначно, метода је третирана на примеру кружног цилиндра чији радијус R расте са временом по закону $R = R_0(1 + at)$, а истовремено је покренут трзајем транслаторно и сталном брзином. Добивени су физички прихватљиви резултати.