TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 5, pp. 174—179 1979.

# ПРИЛОЖЕНИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ФОРМАМ ПФАФФА-БИЛИМОВИЧА

*В. А. Вуйичич*

(Сообщено 14. марта 1979)

В большом числе опубликованных ранее работ показана очень широкая возможность применения дифференциальных форм и уравнений Пфаффа к выводу дифференциальных уравнений движения обьекта. Для выгодной динамической формы Ф [2] закон градиента [3] или принцип Пфаффа-Билимовича [4] очень легко приводит к общим ковариантным дифференциальным уравнениям движения

$$dp_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

рассматриваемой механической системы. Всеобщность этого принципа навела автора монографии [2] на мысль назвать его „Обшим феноменологическим дифференциальным принципом". Возвращаясь снова к этому вопросу, мы заметили, что особености форм Пфаффа $\Phi(d)$ и $\Phi(\delta)$ [5] приводят к ковариантным дифференциальным уравнениям оптимального управления [6] движением механической системы в виде

$$(*) \qquad \begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^i}, \end{aligned} \qquad \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u^k}_{u^k = u^k(t)} = 0,$$

где $\mathscr{H}$ функция Понтрягина.

Рассмотрим движение голономной механической системы в $2n+2$ мерном фазовом пространстве, в котором координатами изображающей точки являются величини $q^\nu, p_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ и то: $n$ пременных Лагранжа, $n$ обобщенных импульсов, $q^0 = t$ время, а $p_0$ обобщенный импульс соотвествующий координате $q^0$. Пусть обобщенные силы $Q_\alpha = Q_\alpha(q^0, q^1, \ldots q^n, u^1, \ldots, u^k)$ функции переменных $q^\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ и управляющих параметров $u^j$ $(j = 1, \ldots, k)$. Работу этих сил на виртуальных перемещениях обозначим через

$$(1) \qquad \delta A = Q_\alpha \delta q^\alpha = -\frac{\partial \pi}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \mathscr{F}_\alpha(u^1, \ldots, u^k) \delta q^\alpha,$$

где $\Pi = \Pi(q^0, q^1, \ldots, q^n)$ потенциал сил, и $\mathscr{F}_\alpha$ непотенциальные силы.

Так как рассматриваемая система непотенциальная, форма Пфаффа-Билимовича Ф будет [2], [4]:

(2) $$\Phi = p_\nu \, dq^\nu - (T - A)\, dt,$$

где $T$ кинетическая энергия системы, $A$ работа всех приложеннх сил. Применением закона градиента к форме (2) очень легко получаем дифференциальные уравнения движения. Из них, как известно, следуют дифференциальные уравнения возмущенного движения системы или дифференциальные уравнения в вариациях движения. Однако все те же уравнения можно получить из новой дифференциальной формы, возникающей как вариация динамической формы (2). Это мы покажем. Вариация скалярной инварианты (2) тоже инварианта

(3) $$\delta\Phi = \delta p_\nu \, dq^\nu + p_\nu \, \delta(dq^\nu) - (\delta T - \delta A)\, dt + (T - A)\, \delta(dt).$$

В дальнейшем введем обозначение $\mathscr{L}$ для этой формы, т.е. $\mathscr{L} = \delta\Phi$.

Для рассматриваемой системы удовлетворяются условия [5] [4]

(4) $$\delta(dq^\nu) = d(\delta q^\nu).$$

Если вариации переменных Гамильтона $\delta q^\alpha$ и $\delta p_\alpha$ обозначим через $\xi^\alpha$ и $\eta_\alpha$, т.е. $\delta q^\alpha = \xi^\alpha$ и $\delta p_\alpha = \eta_\alpha$ форму (3) в силу (4), можно написать в виде

(5) $$\mathscr{L} = \eta_\alpha \, dq^\alpha + p_\alpha \, d\xi^\alpha - (\delta T - \delta A)\, dt,$$

при условии

(6) $$\delta(dt) = 0.$$

Имея в виду (1), (4) и определение функции Гамильтона $H$, элемент формы (5) в дифференциале времени $dt$ преобразуем следующим способом

$$\delta T - \delta A = \delta T + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \cdots$$

Если условимся, что

(7) $$\delta q^0 = \delta t = 0$$

то будет

(8) $$\delta T - \delta A = \delta H - \mathscr{F}_\alpha \delta q^\alpha = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \delta p_\nu - \mathscr{F}_\alpha \, \delta q^\alpha.$$

Видно что (8) является функцией фазовых переменных $q^\nu$, $p_\nu$, вариаций переменных $\delta q^\alpha = \xi^\alpha$, $\delta p_\nu = \eta_\nu$ и параметров управления $u^j$. Это функция Понтрягина

(9) $$\mathscr{H} = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \xi^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \eta_\nu - \mathscr{F}_\alpha \, \xi^\alpha$$

Вследствие этого форма (5) будет

$$\mathscr{L} = p_\alpha\, d\,\xi^\alpha + \eta_\nu\, dq^\nu - \mathscr{H}\, dt \tag{10}$$

или, так как $\nu = 0, \alpha$; $\alpha = 1, 2, \ldots, n$,

$$\mathscr{L} = p_\alpha\, d\,\xi^\alpha + \eta_\alpha\, dq^\alpha - \mathscr{H}^*\, dt \tag{11}$$

где

$$\mathscr{H}^* = \mathscr{H} - \eta_0. \tag{12}$$

Как видно из (9) и (11) функция $\mathscr{H}$ зависит от фазовых переменных, возмущений, вектора управления и времени, т.е.

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(q^1, \ldots, q^n;\ p_0, p_1, \ldots, p_n;\ \xi^1, \ldots, \xi^n;\ \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n;\ u^1, \ldots, u^k;\ t). \tag{13}$$

Заметим, что форма (10) дегенеративная дифференциальная форма Пфаффа, в которой не достают следующие суммы

$$\left\{\begin{aligned} & q^\nu\, dp_\nu = 0 \\ & \xi^\alpha\, d\,\eta_\alpha = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{и} \qquad M_j\, \delta\, u^j = 0. \tag{14}$$

К форме (11) применим закон градиента [2] акции и получим

$$\left|\begin{aligned} & dp_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\,\xi^\alpha}, && \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\, p_\nu} = 0, \\ & d\,\eta_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\, q^\alpha}, && \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\,\eta_\nu} = 0, \\ & -d\,\mathscr{H}^* = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\, t}, && \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\, u^j} = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Отсюда, из-за (11), следует система дифференциальных уравнений вида (*) т.е.

$$\left|\begin{aligned} & \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\,\xi^\alpha}, && \frac{dq^\nu}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\,\eta_\nu}, \\ & \frac{d\,\eta_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\, q^\alpha}, && \frac{d\,\xi^\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\, p_\alpha}, \\ & \qquad \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\, u^j} = 0. \\ & \alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Дифференциальное соотношение

$$d\mathscr{H}^* = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}$$

тождественно удевлетворено для дифференциальных уравнений (16). Действительно,

$$d\mathscr{H}^* = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} dt,$$

или используя уравнения (16),

$$\frac{d\mathscr{H}^*}{dt} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^0} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_0} \dot{p}_0 +$$

$$+ \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \eta_\alpha} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial \eta_0} \dot{\eta}_0 +$$

$$+ \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u^j} \dot{u}^j - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^0} + \frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial p_0} \dot{p}_0 + \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \eta_0} - 1\right) \dot{\eta}_0 - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} \equiv 0,$$

так как

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^0} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial p_0} = 0, \qquad \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \eta_0} = 1.$$

Частная производная $\frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial p_0} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_0}$ тождественно равнается нулю. Из соотношения $\frac{dq^0}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}^0}{\partial \eta_0}$ смотря на (9), следует

$$\frac{\partial H}{\partial p_0} = 1.$$

Согласно этому,

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_0} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \, \partial q^\alpha} \xi^0 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \, \partial p_\nu} \eta_\nu = 0.$$

Таким способом из дифференциальной формы и закона градиента мы получаем систем дифференциальных уравнений, которые в виде (16) будем називать системой дифференциальных уравнений управления движением механической системы точек. В самом деле, это дифференциальные уравнения движения Гамильтона для голономной, реономной, непотенциальной системы точек; уравнения в вариациях Пуанкаре [6] и условия стационарности [7] функции на управлениями.

Действительно, уравнения (16) для функции (9) преобразуются в следующие системы:

1. Систему от $2n+1$ дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы

$$
(17) \qquad \begin{cases} \dot{q}^{\nu} = \dfrac{\partial H}{\partial p_{\nu}} & (\nu = 0, 1, \ldots, n) \\ \dot{p}_{\alpha} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} + Q_{\alpha}, & (\alpha = 1, \ldots, n), \end{cases}
$$

2. систему от $2n$ дифференциальных уравнений возмущенного движения, или уравнения в вариациях,

$$
(18) \qquad \begin{cases} \dot{\xi}^{\alpha} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\alpha} \partial q^{\beta}} \xi^{\beta} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\nu}} \eta_{\nu}, & (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \\ \dot{\eta}_{\alpha} = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} \xi^{\beta} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial q^{\alpha} \partial p_{\nu}} \eta_{\nu}, & (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}
$$

и

3. условия управления

$$
(19) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{j}} = \frac{\partial}{\partial u^{j}} (\mathcal{F}_{\alpha} \xi^{\alpha}) = 0, \qquad (j = 1, \ldots, k).
$$

Вследствие выше сказанного для определения $2n$ фазовых переменных $q^{\alpha}, p_{\alpha}$; $2n$ вариациях $\xi^{\alpha}, \eta_{\alpha}$; $k$ параметров управления $u^{j}$ и времени $t$ мы имеем $4n+1$ дифференциальных уравнений (17) и (18) и $k$ соотношений (19). Таким образом мы расширяем область применения формы и уравнений Пфаффа, то есть дифференциального принципа [2].

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Angelich, T., *Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides*, Publications de l'Inst. math. T. II, 1948

[2] Bilimovitch, A. D., *On a General Phenomenological Differential Principe*, The Serbian Academy of sciences and arts, Monographs, Vol CCCLXVIII, Beograd, 1964

[3] Mušicki, Đ., *The Application of Pfaff's Method in Theoretical Physics* (Primena Pfafove metode u teorijskoj fizici). Zbornik radova Srpske akademije nauka. Vol. L. Mathematical institute, k. 5, Beograd, 1965

[4] Vujičić, V. A., *La corrélation du principe de Pfaff-Bilimović avec les autres principes de Mecanique*, Publication de l' Institut Mathématique, T. 1 (15), p. 15—23

[5] Anđelić, T., *Tensor Calculus (Tenzorski račun)*, Beograd, 1967, p. 129—134

[6] Четаев Н. Г., *Устойчивость движения*, Гост. изд. тех. теор. лит. Москва, 1955.

[7] Моисеев Н. Н., *Численые методы в теории оптимальных систем*, изд. „Наука", Москва, 1971.

[8] Whittaker, F. T,, *A treatise on the Analytical Dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies*, First Editon, 1904

## A CONTRIBUTION TO THE PHENOMENOLOGICAL DIFFERENTIAL PRINCIPLE

*V. A. Vujičić*

In this paper the author shows that the optimal control of the motion of holonomic system of the Pfaff's form is determined by the relation (10) where (9) is the Pontryagin's function. By the aid of the law of gradients (15) are obtained the differential equations of optimal control of the observed mechanical system (17).

## ПРИЛОГ ДИФЕРЕНЦИЈАНОМ ФЕНОМЕНОЛОШКОМ ПРИНЦИПУ

*В. А. Вујичић*

Резиме

У више радова за последњих тридесетак година показано је да Пфаф-ове једначине за погодно састављену диференцијалну динамичку форму доводе до диференцијалних једначина кретања посматраног динамичког система.

Примећено је и то се доказује у овом саопштењу да за варирану динамичку форму, која се као таква поново узима за Пфаф-ову форму, закон градијента доводи до коњугованих диференцијалних једначина управљања кретањем механичког система.

Посматрани систем је холономан и реономан; кретање се разматра у фазном простору. Присутне потенцијалне и непотенпијалне силе, које дејствују на тачке система, производе елементарни рад (1). За услове (4) и (6) варијација динамичке форме (2) своди се на (10), где је $\mathscr{H}$ Понтрајагинова функција (9) а $\mathscr{L}$ Пфаф-ова диференцијална форма у којој недостају чланови (14). Применом Закона градијента (15) добијамо спрегнуте диференцијалне једначине управљања кретањем механичког система (16), чији се развијени облик види у једначинама (17), (18) и (19). На тај начин проширена је област примене Пфафових форми и једначина односно диференцијалних принципа [2].

Вељко Вујичић
Његошева 72
11000 Београд