TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 5, pp. 163–173, 1979.

METHODE DE CALCUL DE LA COUCHE LIMITE TRIDIMENSIONNELLE

Petar Vukoslavčević et Radomir Ašković

(Reçu le 24 Août 1978)

1, Equations de la couche limite tridimensionnelle.

Les équations de la couche limite laminaire tridimensionnelle d'un fluide incompressible peuvent s'écrire, après application du „principe de prévalence" (1) et en introduisant une fonction $\psi(s, z, n)$ de la façon:

$$u=\frac{1}{e_2}\frac{\partial\psi}{\partial n}, \qquad v=-\frac{1}{e_2}\frac{\partial\psi}{\partial s}$$

sous la forme suivante:

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial n^3}+\frac{1}{\nu e_2}\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}-\frac{1}{\nu e_2}\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial n}+ \tag{1}$$

$$+\frac{1}{\nu e_2^2}\frac{\partial e_2}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2=-\frac{e_2}{\nu}U_e\frac{\partial U_e}{\partial s},$$

$$\frac{1}{e_2}\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{1}{e_2}\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n}-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}= \tag{2}$$

$$=\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}\frac{1}{e_2^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2-U_e^2\right],$$

avec les conditions aux limites:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{\partial\psi}{\partial n}=0, \qquad w=0 \text{ pour } n=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\rightarrow e_2 U_e(s, z), \qquad w=0 \text{ pour } n\rightarrow\infty.$$

Le système (s, z, n) de coordonnées curvilignes de Hayes (2) est basé sur les lignes de courant parietales de l'écoulement à potentiel; $e_1(s, z)$ (mesure de la distance de lignes équipotentielles à la paroi), $e_2(s, z)$ (mesure de la distance de lignes de courant parietales de l'écoulement à potentiel) et $e_3=1$ sont les coefficients métriques de ce système. Les composantes (u, w, v) de la vitesse dans la couche limite sont en direction des coordonnées choisies (s, z, n) respectivement. Des fonctions $U_e(s, z)$, $e_1(s, z)$, $e_2(z, z)$ sont des fonctions de la classe C^k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, dans le domaine considéré. ν représente le coefficient de viscosité cinématique, ρ-densité du fluide.

2. Universalisation des équations de la couche limite.

Préparons, maintenant, un procédé de l'universalisation du type de Loitsianski (3) de ces équations (1) et (2). Si les grandeurs caractéristiques de la couche limite: épaisseur de déplacement δ_s, épaisseur de perte de quantité de mouvement δ_{ss} et contrainte tangentielle longitudinale τ_{sp} sont définies de la façon:

$$\delta_s=\int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U_e}\right) dn, \qquad \delta_{ss}=\int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(1-\frac{u}{U_e}\right) dn, \qquad \tau_{sp}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{n=0},$$

on peut, d'abord, introduire une nouvelle variable normale:

$$\eta=K\frac{n}{\delta_{ss}} \tag{3}$$

où K est une constante et, ensuite, au lieu de variables s et z, quatre ensembles infinis de paramètres:

$$\left.\begin{aligned} f_K&=U_e^{K-1}\frac{\partial^K U_e}{\partial s^K}\overset{**}{z}{}^K, & \alpha_K&=U_e^K\frac{1}{e_2}\frac{\partial^K e_2}{\partial s^K}\overset{**}{z}{}^K, \\ \beta_K&=U_e^K\frac{1}{e_1}\frac{\partial^K e_1}{\partial s^K}\overset{**}{z}{}^K, & \Delta_K&=U_e^K\left[\frac{\partial^K}{\partial s^K}\ln\left(\frac{\partial e_1}{\partial z}\right)\right]\overset{**}{z}{}^K \end{aligned}\right\}(k=1, 2, \ldots) \tag{4}$$

où: $\overset{**}{z}=\dfrac{\delta_{ss}^2}{\nu}$.

Supposons les solutions des équations (1) et (2) sous la forme:

$$\psi(s, z, n)=\frac{e_2\,\delta_{ss}}{K}U_e(s, z)\,\mathcal{F}(\eta, \{f_K\}, \{\alpha_K\}), \tag{5}$$

$$w=\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}U_e^2(s, z)\,\overset{**}{z}\,\mathcal{Q}(\eta, \{f_K\}, \{\alpha_K\}, \{\beta_K\}, \{\Delta_K\}), \tag{6}$$

où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Q}$ sont des fonctions réelles, continues et infiniment dérivables par rapport à toutes leurs variables. Après l'introduction des formules (5) et (6) dans les équations (1) et (2) on obtient:

$$(7)\qquad K^2\frac{\partial^3\mathcal{F}}{\partial\eta^3}+\frac{1}{2}E\mathcal{F}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta^2}+(f_1+\alpha_1)\mathcal{F}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta^2}+f_1\left[1-\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\right)^2\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial f_k}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta\,\partial f_k}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha_k}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\eta\,\partial\alpha_k}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\right)=0,$$

$$\mathcal{F}=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}=0,\qquad \eta=0;\qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\to 1,\qquad \eta\to\infty;$$

$$(8)\qquad K^2\frac{\partial^2\mathcal{Q}}{\partial\eta^2}+\left(\frac{1}{2}E+f_1+\alpha_1\right)\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\eta}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial f_k}+b_k\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha_k}\right)\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\eta}-$$

$$-(E+2f_1-\beta_1+\Delta_1)\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\mathcal{Q}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial f_k}+b_k\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\alpha_k}+p_k\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\beta_k}+\right.$$

$$\left.+q_k\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\Delta_k}\right)\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}=1-\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\eta}\right)^2,$$

$$\mathcal{Q}=0,\qquad \eta=0;\qquad \mathcal{Q}\to 0,\qquad \eta\to\infty,$$

où:

$$a_k=(k-1)f_kf_1+f_{k+1}-kEf_k,$$

$$b_k=(kf_1-\alpha_1)\alpha_k+\alpha_{k+1}+kE\alpha_k,$$

$$p_k=(kf_1-\beta_1)\beta_k+\beta_{k+1}+kE\beta_k,$$

$$q_k=kf_1\Delta_k+\Delta_{k+1}+kE\Delta_k$$

sont les formules recurentes, provenues des relations (4).

Il reste encore à trouver les variables dont la fonction $E=U_e\dfrac{\partial\overset{**}{z}}{\partial s}$, figurant dans les équations (7) et (8), dépend. A cette fin nous allons profiter l'équation de quantité de mouvement de la couche limite pour la composante longitudinale u sous la forme:

$$(9)\qquad U_e\frac{\partial\overset{**}{z}}{\partial s}=2\frac{\tau_{sp}\,\delta_{ss}}{\mu U_e}-2\frac{\partial U_e}{\partial s}\overset{**}{z}\frac{\delta_s}{\delta_{ss}}-4\frac{\partial U_e}{\partial s}\overset{**}{z}-2U_e\frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s}\overset{**}{z},$$

où:

$$\tau_{sp} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0} = \frac{\mu K}{\delta_{ss}} U_e \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\tau_{sp} \delta_{ss}}{\mu U_e} = K \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0},$$

d'où on voit que $\frac{\tau_{sp} \delta_{ss}}{\mu U_e}$ est une fonction des variables $(\{f_k\}, \{\alpha_k\})$ seulement. Vu que le rapport $\frac{\delta_s}{\delta_{ss}}$ est également une fonction $H(\{f_k\}, \{\alpha_k\})$ des mêmes variables et tenant compte des formules (4) on obtient:

$$U_e \frac{\partial \ddot{z}}{\partial s} = 2K \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} - 2f_1 (H+2) - 2\alpha_1 = E(\{f_k\}, \{\alpha_k\}). \tag{10}$$

Après avoir demontré que l'expression E est une fonction des variables $(\{f_k\}, \{\alpha_k\})$ seulement, on peut constater que ni les équations (7) et (8) ni les conditions aux limites correspondantes ne dépendent de donnés particulières du problème considéré. Cela veut dire que les équations (7) et (8) sont universelles et peuvent être intégrées une fois pour toutes.

3. Une solution numérique des équations universelles.

Les équations paramét.iques à n-paraètres, obtenues de (7) et (8), peuvent être résolues soit numériquement directement à l'aide d'un ordinateur soit en développant les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Q}$ en séries des paramètres et traitant numériquement, ensuite, les équations différentielles ordinaires — issues de ce procédé. Pour le moment nous avons utilisé la deuxième possibilité. En présentant la fonction E sous la forme:

$$\begin{aligned} E = {} & E_{00} + E_{10} f_1 + E_{20} f_1^2 + E_{01} \alpha_1 + E_{02} \alpha_1^2 + \\ & + E_{11} f_1 \alpha_1 + E_{12} f_1 \alpha_1^2 + E_{21} f_1^2 \alpha_1 + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

et les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Q}$ comme suit:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = {} & f_{00}(\eta) + \mathcal{F}_{10}(\eta) f_1 + \mathcal{F}_{20} f_1^2 + \mathcal{F}_{01} \alpha_1 + \mathcal{F}_{02} \alpha_1^2 + \\ & + \mathcal{F}_{11} f_1 \alpha_1 + \mathcal{F}_{12} f_1 \alpha_1^2 + \mathcal{F}_{21} f_1^2 \alpha_1 + \dots, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = {} & \mathcal{Q}_0(\eta) + \mathcal{Q}_1(\eta) f_1 + \mathcal{Q}_2 \alpha_1 + \mathcal{Q}_3 \beta_1 - \Delta_1) + \\ & + \mathcal{Q}_4 f_1 (\beta_1 - \Delta_1) + \mathcal{Q}_5 \alpha_1 (\beta_1 - \Delta_1) + \dots, \end{aligned} \tag{13}$$

où:

$$
\left|\begin{array}{l}
\mathcal{F}_{00}(\eta)=f_{00}(\eta), \\[2mm]
\mathcal{F}_{10}(\eta)=\dfrac{1}{E_{00}} f_{10\cdot 1}(\eta)+\dfrac{E_{10}}{E_{00}} f_{10\cdot 2}(\eta), \\[2mm]
\mathcal{F}_{20}(\eta)=\dfrac{E_{20}}{E_{00}} f_{20\cdot 1}(\eta)+\dfrac{E_{10}^2}{E_{10}^2} f_{20\cdot 2}(\eta)+\dfrac{E_{10}}{E_{00}^2} f_{20\cdot 3}(\eta)+\dfrac{1}{E_{00}^2} f_{20\cdot 4}(\eta), \\[2mm]
\mathcal{F}_{01}(\eta)=\dfrac{2+E_{01}}{E_{00}} f_{01}(\eta), \\[2mm]
\mathcal{F}_{02}(\eta)=\dfrac{E_{02}}{E_{00}} f_{02\cdot 1}(\eta)+\dfrac{E_{01}^2}{E_{00}^2} f_{02\cdot 2}(\eta)+\dfrac{E_{01}}{E_{00}^2} f_{02\cdot 3}(\eta)+\dfrac{1}{E_{00}^2} f_{02\cdot 4}(\eta); \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-
\end{array}\right.
$$

$$
\left|\begin{array}{l}
\mathcal{Q}_0(\eta)=\dfrac{1}{E_{00}} h_{00}(\eta), \\[2mm]
\mathcal{Q}_1(\eta)=\dfrac{E_{10}}{E_{00}^2} h_{11}(\eta)+\dfrac{1}{E_{00}^2} h_{12}(\eta), \\[2mm]
\mathcal{Q}_2(\eta)=\dfrac{E_{01}}{E_{00}^2} h_{21}(\eta)+\dfrac{1}{E_{00}^2} h_{22}(\eta), \\[2mm]
\mathcal{Q}_3(\eta)=\dfrac{1}{E_{00}^2} h_{33}(\eta), \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-
\end{array}\right.
$$

on tire des équations (7) et (8) deux systèmes récursifs d'équations différentielles ordinaires pour toutes les fonctions f_{ij} et h_{kl}:

$$
\left|\begin{array}{l}
f_{00}'''+\dfrac{1}{2} f_{00} f_{00}''=0, \\[2mm]
L_1(f_{10\cdot 1})=f_{00}'^2-f_{00} f_{00}''-1, \\[2mm]
L_1(f_{10\cdot 2})=-\dfrac{1}{2} f_{00} f_{00}'', \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\[2mm]
L_1(f_{01})=-\dfrac{1}{2} f_{00} f_{00}'',
\end{array}\right.
$$

$$L_2(f_{02\cdot1}) = -\frac{1}{2} f_{00} f_{00}'',$$

$$L_2(f_{02\cdot2}) = -\left(f_{00}' f_{01}' + \frac{3}{2} f_{00}'' f_{01} + \frac{1}{2} f_{00} f_{00}'' + f_{01}'' + f_{01}'^2 + \frac{3}{2} f_{01} f_{01}''\right),$$

$$L_2(f_{02\cdot3}) = -\left(3 f_{00}'' f_{01} + 2 f_{00} f_{01}'' + f_{00}' f_{01}' + 6 f_{01} f_{01}'' + 4 f_{01}'^2\right),$$

$$L_2(f_{02\cdot4}) = -\left(4 f_{01}'^2 + 6 f_{01} f_{01}'' + 2 f_{00} f_{01}'' - 2 f_{00}' f_{01}'\right);$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$D_1(h_{00}) = 1 - f_{00}'^2,$$

$$D_2(h_{11}) = -2 f_{00}' f_{10\cdot2}' - \frac{3}{2} f_{10\cdot2} h_{00}' + f_{10\cdot2}' h_{00} - \frac{1}{2} f_{00} h_{00}' + f_{00}' h_{00},$$

$$D_2(h_{12}) = -2 f_{00}' f_{10\cdot1}' - f_{00} h_{00}' + 2 f_{00}' - \frac{3}{2} f_{10\cdot1} h_{00}' + f_{10\cdot1}' h_{00},$$

$$D_2(h_{21}) = -2 f_{00}' f_{01}' - \frac{3}{2} f_{01} h_{00}' - \frac{1}{2} f_{00} h_{00}' + f_{01}' h_{00} + f_{00}' h_{00},$$

$$D_2(h_{22}) = -4 f_{00}' f_{01}' - f_{00} h_{00}' - 3 f_{01} h_{00}' + 2 f_{01}' h_{00},$$

$$D_2(h_{33}) = -f_{00}' h_{00}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Les conditions aux limites pour la première fonction f_{00} sont:

$$f_{00}(0) = f_{00}'(0) = 0, \qquad f_{00}'(\infty) = 1,$$

tandis que toutes les autres fonctions, ainsi que leurs premières dérivées, sont égales à zéro aussi bien pour $\eta = 0$ que pour $\eta = \infty$:

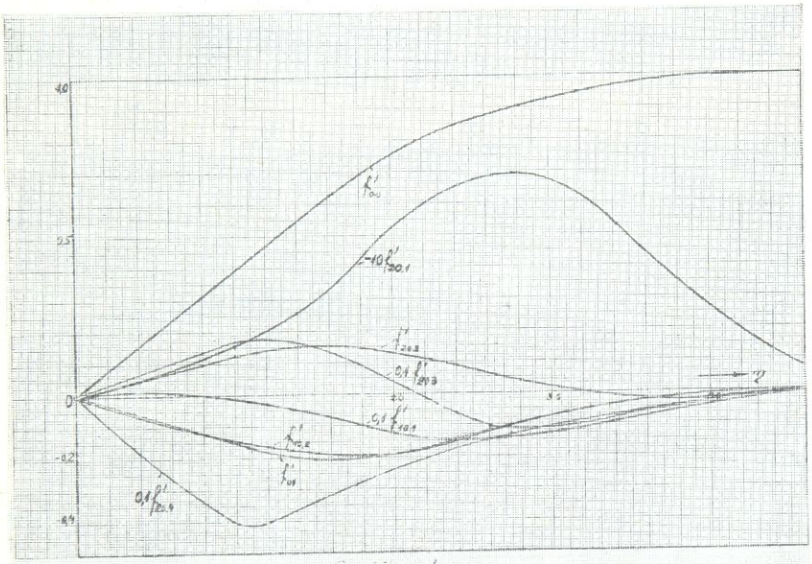
$$f_{ij}(0) = f_{ij}'(0) = f_{ij}'(\infty) = 0,$$

$$h_{kl}(0) = h_{kl}(\infty) = 0.$$

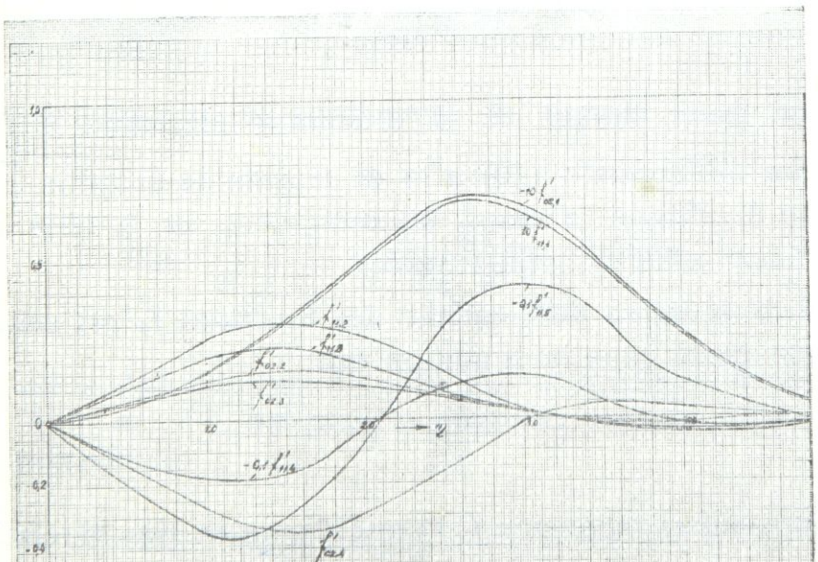
Evidemment, on a introduit aussi deux opérateurs différentiels pour simplifier l'écriture:

$$\left.\begin{aligned} L_n(f) &= \frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f_{00} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + n f_{00}' \frac{df}{d\eta} + \left(n + \frac{1}{2}\right) f_{00}'' f, \\ D_n(h) &= \frac{d^2 h}{d\eta^2} + \frac{1}{2} f_{00} \frac{dh}{d\eta} - k f_{00}' h. \end{aligned}\right\} n = 1, 2, 3, \ldots .$$

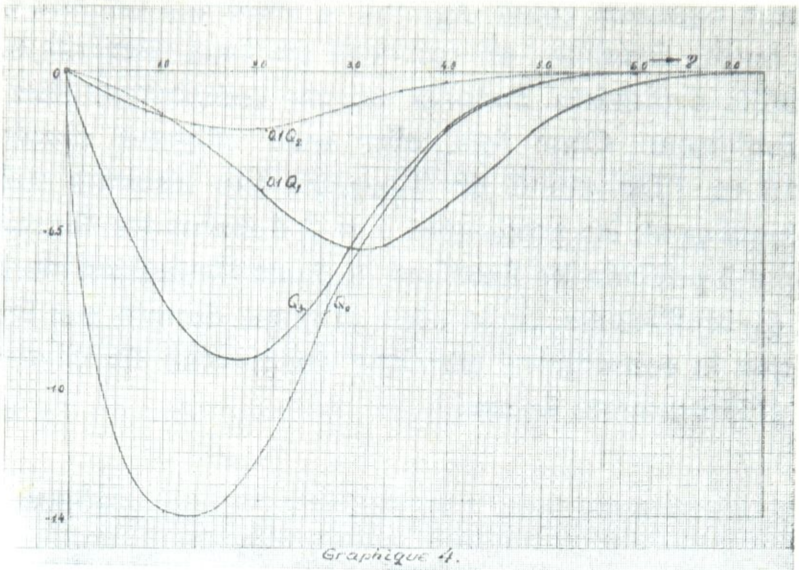
La première équation (pour f_{00}) est la seule qui est non-linéare, tandis que toutes les autres équations de ces deux systèmes récursifs sont les équations différentielles ordinaires *linéaires* et, par conséquent, elles peuvent être traitées assez facilement. Cette fois, elles sont intégrées numériquement au Centre de calcul de l'Université de Titograd. Ces résultats numériques sont présentés graphiquement: les graphiques 1 et 2 donnent les fonctions f_{ij}, tandis que le graphique 3 présente les fonctions h_{kl}; une illustration du comportement des fonctions Q_i-coefficients de la série (13) est donnée par le graphique 4. On voit bien que la convergence physique du procédé de développements en séries (12) et (13) est assez bonne.



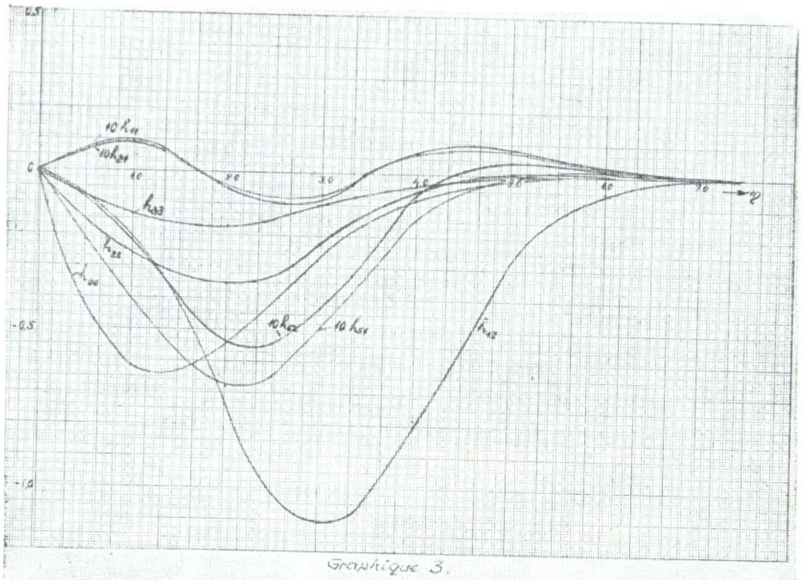
Graphique 1.



Graphique 2.



Graphique 4.



Graphique 3.

Cependant, pour chaque cas d'écoulement particulier il faut résoudre encore l'équation différentielle (10) afin de trouver la fonction $\overset{**}{z}$. A cette fin, il est nécessaire à calculer, d'abord, les coéfficients de la série (11) à l'aide des fonctions universelles f_{ij}, déjà trouvées.

La première équation différentielle des fonctions f_{ij} est celle de Blasius pour une plaque plane sous la condition que:

(14) $$\frac{E_{00}}{K^2} = 1.$$

Si l'on introduit l'expression (11) en (10), on en tire la relation suivante:

(15) $$E_{00} = 2\,K \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} = 2\,K\,\mathcal{F}''_{00}(0).$$

Alors la formule (10) nous offre:

(16) $$K = 2\,\mathcal{F}''_{00}(0).$$

Puisque d'après Blasius $\mathcal{F}''_{00}(0) = 0.33206$, on obtient de (16) et (14) que:

(17) $$K = 0.664, \qquad E_{00} = 0.441.$$

Si l'on calcule la composante de la vitesse u à l'aide de (5):

$$\frac{u}{U_e} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}$$

et introduit cela dans la formule pour δ_s tenant compte de (3), on aura:

$$\delta_s = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\right) \frac{\delta_{ss}}{K}\, d\eta = \frac{\delta_{ss}}{K} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\right) d\eta,$$

d'où

$$\frac{\delta_s}{\delta_{ss}} = H = \frac{1}{K} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\right) d\eta,$$

ou bien:

(18) $$H = \frac{1}{K} \int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{\partial \mathcal{F}_{00}}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{00}}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}\right)\right] d\eta = H_{00} + \\ + \frac{1}{K} (\mathcal{F}_{00} - \mathcal{F})_{\eta=\infty}.$$

Ici H_{00} correspond à la solution de la couche limite sur une plaque plane (4), c'est-à-dire:

(19) $$H_{00} = \frac{1}{K} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \mathcal{F}_{00}}{\partial \eta}\right) d\eta = 2.5911.$$

En plus, on a déjà constaté en (10) que la fonction H ne dépend que de paramètres f_k et α_k. Or, on peut la présenter sous la forme de série par rapport à ces paramètres:

(20) $$H = H_{00} + H_{10} f_1 + H_{20} f_1^2 + H_{01} \alpha_1 + H_{02} \alpha_1^2 + \\ + H_{11} f_1 \alpha_1 + H_{12} f_1 \alpha_1^2 + \dots .$$

Par conséquent, après l'introduction de (20) en (18), compte-tenu de (12), on a:

$$
(21)\qquad \left\| \begin{aligned} &H_{00} = 2.5911, \\ &H_{10} = -\frac{1}{K}\mathscr{F}_{10}(\infty), \\ &H_{01} = -\frac{1}{K}\mathscr{F}_{01}(\infty), \\ &H_{11} = -\frac{1}{K}\mathscr{F}_{11}(\infty), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right.
$$

de sorte que la formule (10) nous offre maintenant les coéfficients de la série (11):

$$
\begin{aligned} &E_{00} = 2K\mathscr{F}''_{00}(0) = 0.441, \\ &E_{01} = 2K\mathscr{F}''_{01}(0) - 2, \\ &E_{02} = 2K\mathscr{F}''_{02}(0), \\ &E_{10} = 2K\mathscr{F}''_{10}(0) - 2H_{00} - 4, \\ &E_{20} = 2K\mathscr{F}''_{20}(0) - 2H_{10}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}
$$

ou finalement en y remplaçant les fonctions universelles f_{ij}, introduites à la place des fonctions $\mathscr{F}_{ij}$, on aura:

$$
(22)\qquad \left. \begin{aligned} &E_{00} = 0.441, \\ &E_{01} = \frac{6.023 f''_{01}(0) - 2}{1 - 3.0115 f''_{01}(0)}, \\ &E_{02} = \frac{2}{K^3/1 - 3.0115 f''_{02\cdot 1}(0)}\left(E_{01}^2 f''_{02\cdot 2}(0) + E_{01} f''_{02\cdot 3}(0) + f''_{02\cdot 4}(0)\right), \\ &E_{10} = \frac{9.1822 - 3.011 f''_{10\cdot 1}(0)}{3.0115 f''_{10\cdot 2}(0) - 1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right\}
$$

A l'aide des valeurs numériques des fonctions universelles f_{ij}, présentées aux graphiques 1 et 2, on calcule de (22):

$$
E_{00} = 0.441, \qquad E_{01} = -2.000, \qquad E_{02} = 0.029, \qquad E_{10} = -5.479, \dots,
$$

de sorte que l'équation (10), évidemment non-linéaire, devient résoluble numériquement. Une fois la fonction $\overset{**}{z}$ trouvée, toutes les variables (3) et (4) deviennent déterminées et les fonctions (5) et (6) peuvent, ensuite, servir à calculer la couche limite laminaire tridimensionnelle autour des corps particuliers.

RÉFÉRENCES

[1] E. A. Eichelbrenner et A. Oudart, *Méthode de calcul de la couche limite tridimensionnelle*, ONERA, Publication No 76, 1955.

[2] W. D. Hayes, *The three-dimensional boundary layer*, NAVORD Rep. 1313, Washington, 1951.

[3] L. G. Loïtsianski, *Universal equations and parameter approximations in the boundary layer theory*, Prikl. Mech. Math. 29 (1), 1965 (in Russian).

[4] H. Schlichting, *Boundary layer theory*, Sixth edition, 1968, p. 129.

Adresses des auteurs:

Petar Vukoslavčević,
Tehnički fakultet. Univerzitet Titograd.

Radomir Ašković,
Mašinski fakultet. Univerzitet Beograd.

THE METHOD OF PARAMETRIC APPROXIMATIONS OF THREEDIMENSIONAL BOUNDARY LAYER

P. Vukoslavčević, R. Ašković

Summary

The method of parametric approximations due to Loïtsianski in laminar two-dimensional boundary layer theory has been extended to the threedimensional laminar boundary layer equations. First, the universalisation of these equations is carried out, and then a series of solutions in terms of independent parameters, which are related to the external velocity distribution and the metric coefficients of the system of coordinates. is obtained.

METODA PRORAČUNA TRIDIMENZIONOG GRANIČNOG SLOJA

Petar Vukoslavčević, Radomir Ašković

Rezime

Autori predlažu jednu metodu za proračun laminarnog graničnog sloja kod konačnih blago-konveksnih tela koja se vrlo često javljaju u tehničkoj praksi. Za razliku od poznatih metoda Karman-Polhauzenovog tipa, u ovom radu se jednačine tridimenzionog graničnog sloja najpre napisane u Hejsovim koordinatama pa, zatim, prevedene na univerzalni oblik tipa Lojcjanskog, korišćenjem pogodno uvedena četiri beskonačna skupa for-parametara i nove promenljive formirane na bazi debljine pada impulsa. Tako formirane univerzalne jednačine su numeriči rešene razvijanjem u redove. Numerička rešenja su u radu grafički prikazana i ona pokazuju dobru konvergenciju postupka razvijanja u redove u ovom slučaju.