TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 5, pp. 105–114, 1979.

GENERALISATION DE LA METHODE DE PFAFF-BILIMOVIĆ POUR LE FORMALISME CANONIQUE AVEC LES DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR

Đorđe Mušicki

(Reçu le 24 Avril 1979)

Introduction

Cet article se rapporte au cas quand la fonction de Lagrange contient les dérivées d'ordre supérieur et pour ce cas est développé le formalisme canonique correspondant [1—3], dans la mécanique analytique ainsi que dans la théorie de champs. D'autre part, *A. Bilimović* [4—6] a démontré que les équations du mouvement peuvent être obtenues comme les équations de Pfaff, adjointes au élément d'action transformé et sur cette base il a formulé un principe général de mécanique. Cette méthode était étendue aux autres branches de la mécanique théorique par *T. Anđelić* [7—8] et *V. Vujičić* [9] et à la théorie classique des champs par l'auteur lui-même [10—11], au moyen du calcul des fonctionnelles de V. Volterra [12].

Dans cet article on a généralisé la méthode de Pfaff-Bilimović au cas consideré et on a démontré comment on peut obtenir, à partir d'élément d'action transformé à la forme canonique, les équations généralisées de Lagrange et d'Hamilton. Dans le cas du continu on a formulé, à la base du calcul des fonctionnelles de V. Volterra, les formes et les équations de Pfaff, on a appliqué cette méthode ainsi étendue à la théorie classique des champs et de cette façon on a obtenu les équations de Lagrange et d'Hamilton correspondantes pour les champs considérés.

1. Formes et équations de Pfaff

Comme il est connu [4], si l'on considère une forme linéaire différentielle ou forme de Pfaff

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i (x_1, x_2, \ldots , x_n)\, dx_i , \tag{1.1}$$

les équations correspondantes de Pfaff peuvent êntre obtenues d'une manière suivante. D'une part, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} X_j\, dx_j = \sum_{j=1} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\, dx_j$$

et d'autre part

$$dX_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j ,$$

d'où suit

$$\sum_{i=1}^{n}\left(dX_i - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) dx_j\, dx_i \tag{1.2}$$

Après un échange des indices

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} dx_j\, dx_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_i\, dx_j$$

on obtient identiquement

$$\sum_{i=1}^{n}\left(dX_i - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) dx_i \equiv 0. \tag{1.3}$$

Cette égalité sera satisfaite s'il on pose

$$dX_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.4}$$

et ce sont les équations de Pfaff, adjointes à la forme linéaire (1.1).

2. Élément d'action d'un système comme une forme de Pfaff

Considérons maintenant un système à r degrés de liberté et supposons qu'il peut être décrit par une fonction de Lagrange

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, \ldots, q_k^{(s)}, t) \tag{2.1}$$

L'élément d'action correspondant

$$\Phi = L\, dt, \qquad W \equiv \int_{t_0}^{t_1} L\, dt \tag{2.2}$$

peut être traité comme une forme de Pfaff et la transformons en

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{s} \frac{\delta W}{\delta q_k^{(m)}}\, dq_k^{(m-1)} + \sum_{k=1}^{r} 0 \cdot dq_k^{(s)} - \\ - \left(\sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{s} \frac{\delta W}{\delta q_k^{(m)}}\, q_k^{(m)} - L\right) dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Cette expression est de la forme (1.1), où le rôle des variables x_i jouent les coordonnées q_k, leurs dérivées $q_k^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots, s)$ et le temps t.

3. Equations de Lagrange dans la mécanique analytique

Montrons ici que les équations de Pfaff qui correspondent au élément d'action, transformé de telle façon, représentent les équations différentielles du mouvement dans la forme de Lagrange ou d'Hamilton. Les équations de Pfaff adjointes aux variables $q_k^{(m-1)}$ sont

$$d \frac{\delta W}{\delta q_k^{(m)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_k^{(m-1)}} \qquad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots, r \\ m=1, 2, \ldots, s \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Pour $m=1$ l'expression à côté droit sera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_k^{(m-1)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} dt,$$

d'où suit

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta W}{\delta \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{3.2}$$

et s'il on écrit explicitement $\delta W/\delta \dot{q}_k$, on obtient les équations de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k} - \cdots + (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \frac{\partial L}{\partial q_k^{(s)}} = 0. \tag{3.3}$$

Pour $m > 1$ on aura

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta W}{\delta q_k^{(m)}} = -\left(\frac{\delta W}{\delta q_k^{(m-1)}} - \frac{\partial L}{\partial q_k^{(m-1)}} \right) \tag{3.4}$$

et en développant l'expression dans les parenthèses

$$\frac{\delta W}{\delta q_k^{(m-1)}} - \frac{\partial L}{\partial q_k^{(m-1)}} = -\frac{d}{dt} \frac{\delta W}{\delta q_k^{(m)}}$$

on arrive à

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta W}{\delta q_k^{(m)}} = -\left(-\frac{d}{dt} \frac{\delta W}{\delta q_k^{(m)}} \right), \tag{3.5}$$

donc, l'équation (3.4) se réduit à une identité.

Les autres équations de Pfaff pour les variables $q_k^{(s)}$ et t à la base des équations de Lagrange, donnent seulement les identités.

4. Equations d'Hamilton dans la mécanique analytique

Pour passer au formalisme canonique correspondant,, considérons les dérivées $q_k^{(m)}$ $(m=1, 2, s-1)$ en qualité des fonctions nouvelles et introduisons les moments conjugués généralisés par

$$p_{k/m}=\frac{\delta W}{\delta q_k^{(m)}} \qquad (m=1, 2, \ldots, s) \tag{4.1}$$

ou explicitement

$$p_{k/m}=\sum_{j=0}^{s-m}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_k^{(j+m)}} \tag{4.2}$$

Définissons encore la fonction d'Hamilton correspondante par

$$H(q_k^{(m-1)}, p_{k/m}, t)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{s} p_{k/m}\, q_k^{(m)}-L, \tag{4.3}$$

qu'on doit considérer comme une fonction de $q_k^{(m-1)}$, $p_{k/m}$ et t $(k=1, 2, \ldots r, m=1, 2, \ldots, s)$. L'élément d'action (2.2) dans ce cas peut être écrit sous la forme

$$\Phi=\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{s} p_{k/m}\, dq_k^{(m-1)}+\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{r} 0\cdot dp_{k/m}-H\,dt, \tag{4.4}$$

où le rôle des variables x_i jouent les $q_k^{(m-1)}$, $p_{k/m}$ et t.

Les équations de Pfaff adjointes aux $q_k^{(m-1)}$ sont

$$dp_{k/m}=\frac{\partial \Phi}{\partial q_k^{(m-1)}} \qquad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots, r \\ m=1, 2, \ldots, s \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Parce que l'on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_k^{(m-1)}}=-\frac{\partial H}{\partial q_k^{(m-1)}}\,dt,$$

les équations précédentes obtiennent la forme

$$\frac{dp_{k/m}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k^{(m-1)}}. \tag{4.6}$$

Les équations de Pfaff adjointes aux $p_{k/m}$ seront

$$d\,0\equiv 0=\frac{\partial \Phi}{\partial p_{k/m}} \qquad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots, r \\ m=1, 2, \ldots, s \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Ici on aura

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_{k/m}}=dq_k^{(m-1)}-\frac{\partial H}{\partial p_{k/m}}\,dt$$

et les équations précédentes passent à

$$\frac{dq_k^{(m-1)}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{k/m}}. \tag{4.8}$$

Ce sont les équations d'Hamilton généralisées [2], avec les fonctions inconnues $q_k^{(m-1)}$ et $p_{k/m}$, qui sont du premier ordre. L'équation de Pfaff pour t, à la base de ces équations, donne seulement une identité.

5. Généralisation des formes et équations de Pfaff

Pour étendre cette méthode à la théorie classique des champs, on doit généraliser les formes et les équations de Pfaff. Dans ce but, considérons les fonctions de position $\varphi_k=\varphi_k(x_\alpha)$ et une suite des fonctions de celles-ci de la forme

$$\mathcal{F}_i=\mathcal{F}_i\,(\varphi_k,\varphi_{k\alpha},\varphi_{k\alpha\beta},\ldots,x_\alpha) \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{5.1}$$

où $\varphi_{k\alpha}=\partial\varphi_k/\partial x_\alpha$ etc. Définissons maintenant la forme fonctionnelle de Pfaff comme une généralisation de l'expression (1.1) quand la sommation est étendue à l'indice continu x_α

$$\Phi=\int\limits_V\sum_{i=1}^n\mathcal{F}_i\,d\varphi_i\,dV \tag{5.2}$$

et c'est une foncionnelle de toutes les fonctions $\varphi_i(x^\alpha)$ et leurs dérivées.

Dans ce cas on a, d'après définition de la dérivée fonctionnelle

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi_i}=\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big(\sum_j\mathcal{F}_j\,d\varphi_i\Big)-\sum_\alpha\frac{d}{dx_\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\varphi_{i\alpha}}\Big(\sum_j\mathcal{F}_j\,d\varphi_j\Big)+$$

$$+\sum_\alpha\sum_\beta\frac{d^2}{dx_\alpha\,dx_\beta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi_{i\alpha\beta}}\Big(\sum_j\mathcal{F}_j\,d\varphi_j\Big)-\cdots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi_i}=\sum_{j=1}^n\frac{\delta F_j}{\delta\varphi_i}\,d\varphi_j, \qquad F_j\equiv\int\limits_V\mathcal{F}_j\,dV. \tag{5.3}$$

D'autre part, on aura d'après définition de la différentielle fonctionnelle

$$dF_i=\int\limits_V d\mathcal{F}_i\,dV=\int\limits_V\sum_{j=1}^n\frac{\delta F_i}{\delta\varphi_j}\,d\varphi_j\,dV. \tag{5.4}$$

De là suit que

$$\int_V \sum_{i=1}^{n} \left(d\mathcal{F}_i - \frac{\delta\Phi}{\delta\varphi_i} \right) d\varphi_i \, dV = \int_V \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\delta F_i}{\delta\varphi_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta F_j}{\delta\varphi_i} \right) d\varphi_i \, d\varphi_j \, dV$$

et en échangeant les indices, on obtient identiquement

$$\int_V \sum_{i=1}^{n} \left(d\mathcal{F}_i - \frac{\delta\Phi}{\delta\varphi_i} \right) d\varphi_i \, dV \equiv 0. \tag{5.5}$$

Pour satisfaire cette égalité, il suffit que

$$d\mathcal{F}_i = \frac{\delta\Phi}{\delta\varphi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.6}$$

Ces équations représentent les équations fonctionelles de Pfaff, adjointes à la forme (5.2). Elle conservent la même forme que dans le cas habituel, quand figurent seulement les dérivées du premier ordre [11], mais dans ce cas les dérivées d'ordre supérieur sont contenues implicitement dans les expression de $d\mathcal{F}_i$ et $\delta\Phi/\delta\varphi_i$

6. Élément d'action d'un champ comme une forme de Pfaff

Considérons maintenant un champ physique déterminé par les fonction $\psi_k = \psi_k(x_\alpha, t)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ et supposons que ce champ peut être décrit par une fonctionnelle de Langrange

$$L = L[\psi_k, \dot{\psi}_k, \ddot{\psi}_k, \ldots, \psi_k^{(s)}; t] \tag{6.1}$$

Prenons dans ce cas aussi l'élément d'action correspondant

$$\Phi = L dt, \qquad W \equiv \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \mathcal{L} \, dV \, dt \tag{6.2}$$

comme une forme fonctionnelle de Pfaff et la transformons en

$$\begin{aligned} \Phi = \int_V \mathcal{L} \, dt \, dV = \int_V \Bigg\{ & \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{j} \frac{\delta W}{\delta\psi_k^{(m)}} \delta\psi_k^{(m-1)} + \\ & + \sum_{k=1}^{r} 0 \cdot d\psi_k^{(s)} - \left(\sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{s} \frac{\delta W}{\delta\psi_k^{(m)}} \psi_k^{(m)} - \mathcal{L} \right) dt \Bigg\} dV. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Cette expression est de la forme (5.2), où le rôle des variables φ_i ici jouent les $\psi_k^{(m-1)}$, $\psi_k^{(s)}$ et t.

7. Equations de Lagrange dans la théorie des champs.

Montrons que, comme en mécanique analytique, les équations de Pfaff correspondantes représentent les équations différentielles du développement du champs au cours du temps dans la forme de Lagrange ou d'Hamilton. Les équations de Pfaff adjoints aux variables $\psi_k^{(m-1)}$ sont

$$d\frac{\delta W}{\psi_k^{(m)}}=\frac{\delta\Phi}{\delta\psi_k^{(m-1)}}\qquad\begin{pmatrix}k=1,\ 2,\ \dots,\ r\\ m=1,\ 2,\ \dots,\ s\end{pmatrix}\tag{7.1}$$

Pour $m=1$ nous aurons, en vertu de (6.2)

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi_k^{(m-1)}}=\frac{\delta\Phi}{\delta\psi_k}=\frac{\delta L}{\delta\psi_k}dt,$$

d'où suit

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta W}{\delta\dot{\psi}_k}=\frac{\delta L}{\delta\psi_k}.\tag{7.2}$$

En écrivant explicitemet $\delta W/\delta\dot{\psi}_k$ et en groupant les termes par rapport aux dérivées temporelles, on obtient les équations de Lagrange sous la forme

$$\frac{\delta L}{\delta\psi_k}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_k}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\delta L}{\delta\ddot{\psi}_k}-\dots+(-1)^s\frac{d^s}{dt^s}\frac{\delta L}{\delta\psi_k^{(s)}}=0.\tag{7.3}$$

Pour $m>1$ on a, en développant l'expression à côté droite de (7.1)

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi_k^{(m-1)}}=-\left(\frac{\delta W}{\delta\psi_k^{(m-1)}}-\frac{\delta L}{\delta\psi_k^{(m-1)}}\right)=-\frac{d}{dt}\frac{\delta W}{\delta\psi_k^{(m)}}$$

et les équations de Pfaff correspondantes se réduisent aux identités

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta W}{\delta\psi_k^{(m)}}=-\left(-\frac{d}{dt}\frac{\delta W}{\delta\psi_k^{(m)}}\right)\tag{7.4}$$

et c'est une identité.

8. Equations d'Hamilton dans la théorie des champs.

Pour passer au formalisme canonique correspondant, considérons les dérivées $\psi_k^{(m)}$ $(m=1,\ 2, \dots,\ s-1)$ comme les fonctions nouvelles et introduisons les densités des moments conjugués par

$$\pi_{k/m}=\frac{\delta W}{\delta\psi_k^{(m)}}\qquad(m=1,\ 2,\ \dots,\ s)\tag{8.1}$$

ou explicitement sous la forme

$$\pi_{k/m}=\sum_{j=0}^{s-m}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\delta L}{\delta\psi_k^{(j+m)}} \tag{8.2}$$

Définissons encore la fonctionnelle d'Hamilton correspondante

$$H[\psi_k^{(m-1)},\ \pi_{k/m};\ t]=\int\limits_V\left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{s}\pi_{k/m}\psi_k^{(m)}-\mathscr{L}\right)dV, \tag{8.3}$$

considérée comme une fonctionnelle de $\psi_k^{(m-1)}$, $\pi_{k/m}$ et t $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ r,$ $m=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$. L'élément d'action alors peut être écrit sous la forme fonctionnelle

$$\Phi=\int\limits_V\left\{\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{s}\pi_{k/m}\,d\psi_k^{(m-1)}+\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{s}0\cdot d\pi_{k/m}-\mathscr{H}\,dt\right\}dV, \tag{8.4}$$

où $\mathscr{H}$ est définit par $H=\int\mathscr{H}\,dV$ et le rôle des variables φ_i jouent les $\psi_k^{(m-1)}$, $\pi_{k/m}$ et t.

Les équations de Pfaff adjointes aux variables $\psi_k^{(m-1)}$ et $\pi_{k/m}$ ici ont la forme

$$d\pi_{k/m}=\frac{\delta\Phi}{\delta\psi_k^{(m-1)}},\quad d\,0\equiv 0=\frac{\delta\Phi}{\delta\pi_{k/m}}\qquad\begin{pmatrix}k=1,\ 2,\ \ldots,\ r\\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ s\end{pmatrix} \tag{8.5}$$

Parce que

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi_k^{(m-1)}}=-\frac{\delta H}{\delta\psi_k^{(m-1)}}dt,\qquad\frac{\delta\Phi}{\delta\pi_{k/m}}=d\psi_k^{(m-1)}-\frac{\delta H}{\delta\pi_{k/m}}dt,$$

les équations précédentes passent à

$$\frac{d\pi_{k/m}}{dt}=-\frac{\delta H}{\delta\psi_k^{(m-1)}},\qquad\frac{d\psi_k^{(m-1)}}{dt}=\frac{\delta H}{\delta\pi_{k/m}}. \tag{8.6}$$

Ce sont les équations d'Hamilton généralisées pour les champs [3], qui sont du premier ordre, et qui déterminent les fonctions inconnues $\psi_k^{(m-1)}$ et $\pi_{k/m}$. L'équation de Pfaff pour t donne seulement une identité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Th. de Donder, *Théorie invariantive du calcul des variations*, Paris, Gauthier Villars, 1935, p. 95—108.

[2] J. Koestler and J. Smith, *Some developments in generalized classical mechanics*, Amer. Journ. of Phys., t. **33** (1965), p. 140—144.

[3] L. Koelho de Souza and P. Rodrigues, *Field theory with higher derivatives-Hamiltonian structure*, Journ. of Phys. A, Ser. 2, t. **2** (1969), p. 304—310.

[4] A. Bilimović, *Pfafov opšti princip mehanike*, Glas SAN, t. **95** (1946), p. 119—152.

[5] A. Bilimović, *O jednom opštem fenomenološkom diferencijalnom principu*, pos. izd. SAN, knj. CCCXIV (1958).

[6] A. Bilimović, *Racionalna mehanika*, t. II, Beograd, Naučna knjiga, 1951.

[7] T. Anđelić, *Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides*, Publ. Inst. Math. SAN, t. **2** (1948), p. 221—222.

[8] T. Anđelić, *Equations fondamentales d'élasticité par la méthode de Pfaff*, Publ Inst. Math. SAN, t. **3** (1950), p. 191—195.

[9] V. Vujičić, *Kretanje dinamički promenljivih objekata i njegova stabilnost*, Disertacija, Beogr. Univerzitet, 1962.

[10] Đ. Mušicki, *Primena Pfaff-ove metode u teoriskoj fizici*, Zb. Rad. Mat. Inst. SAN. t. **5** (1956), p. 179—218.

[11] Đ Mušicki, *Generalization of the Pfaff-Bilimović method in the field theory*, Publ. Inst. Math., t. **2** (16) (1962), p. 5—20.

[12] V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Dover Publ., New York, 1959.

GENERALIZATION OF THE PRAFF-BILIMOVIĆ METHOD FOR THE CANONICAL FORMALISM WITH THE DERIVATIVES OF HIGHER ORDER

Đorđe Mušicki

Summary

In this paper the Pfaff-Bilimović method is generalized for the case when the Langrangian of the system contains time derivatives of arbitrary order and it is shown how it is possible to obtain the corresponding Lagrange and Hamilton equations. For the case of the theory of fields, the generalized Pfaff forms and equations are formulated on the basis of the calculus of functionals of V. Volterra, and in this manner the corresponding Lagrange and Hamilton equations for the fields are derived.

ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА ПФАФ-БИЛИМОВИЋЕВЕ МЕТОДЕ ЗА КАНОНСКИ ФОРМАЛИЗАМ СА ИЗВОДИМА ВИШЕГ РЕДА

Ђорђе Мушицки

Резиме

У овом раду је Пфаф-Билимовићева метода, коју су у механици формулисали и развили А. Билимовић, Т. Анђелић и В. Вујичић [4—9], а у теоријској физици сам аутор [10—11], генералисана на случај кад Лагранжева функција неког физичког система зависи од временских извода произвољног реда. У првом делу је показано како се из елемента дејства

као Пфафове форме трансформисаног у канонски облик (2.3) или (4.4), као одговарајуће Пфафове једначине добијају Лагранжеве једначине (3.3) односно Хамилтонове једначине (4.6) и (4.8) за овакве системе. У другом, главном делу су генералисане Пфафове форме и придружене Пфафове једначине у случају континуума, на бази рачуна функционела од В. Волтера, у облику (5.1-2) и (5.6), при чему оне задржавају исти облик као и у уобичајеном случају, с тим да су парцијални изводи замењени функционалним, у којима су овде имплицитно садржани и изводи по просторним координатама. Потом је овако генералисана Пфаф-Билимовићева метода примењена на класичну теорију поља и показано је да и у овом случају из елемента дејства као генералисане Пфафове форме трансформисаног у канонски облик (6.3) и (8.4) одговарајуће Пфафове једначине представљају генералисане Лагранжеве једначине (7.3) односно Хамилтон--ове једначине (8.6) у облику функционалних извода.

Đorđe Mušicki
Prir.-mat. fak.
Studentski trg 16
11000 Beograd