TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 4, pp. 33—38 1978.

SENSIBILITÉ DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DES VIBRATIONS LINÉAIRES D'UNE POUTRE REPOSÉS SUR UNE BASE ÉLASTIQUE PAR RAPPORT AUX CHANGEMENTS DES COEFFICIENTS

Roman Gutowski

1. Introduction et généralités

Considérons l'équation des petites vibrations transversales d'une poutre appuiée à bascule aux deux extrémités sur une base élastique, en tenant compte de l'amortissement extérieur proportionel à la première puissance de la vitesse

$$EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial u}{\partial t}+ru=F(x,t) \tag{1}$$

où

EJ — rigidité à la flexion de la poutre

m — masse unitaire sur la longueur de la poutre

μ — coefficient d'amortissement linéaire extérieur des vibrations transversales

r — coefficient de la souplesse linéaire de la base élastique

F — force excitatrice

Introduisons les notations

$$\frac{EJ}{m}=\gamma,\quad \frac{\mu}{m}=2\beta,\quad \frac{r}{m}=\alpha,\quad \frac{1}{m}F=f \tag{2}$$

où γ, β, α sont constantes positives.

L'équation (1) s'écrit alors

$$\gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\beta\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u=f(x,t). \tag{3}$$

Soient les conditions initiales sous la forme

$$u(x,0)=\psi_1(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi_2(x). \tag{4}$$

Les conditions aux limites ont dans le cas considéré la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} u(0,t)=0, & u(l,t)=0 \\ \dfrac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=0, & \dfrac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}=0 \end{cases}$$

On admet que la solution de l'équation (3) avec les conditions (4) et (5) est connue. Le problème qu'on veut étudier, c'est la sensibilité des solutions de l'équation (3), par rapport au changement du paramètre c qui est égal à α, ou β, ou γ. Dans ce but nous introduisons la fonction de la sensibillité sous la forme

$$(6)\qquad \omega(x,t,c)=\lim_{\Delta c\to 0}\frac{u(x,t,c+\Delta c)-u(x,t,c)}{\Delta c}=\frac{\partial u}{\partial c}.$$

D'après (6) nous avons la relation approximative

$$(7)\qquad u(x,t,c+\Delta c)-u(x,t,c)\cong\omega(x,t,c)\,\Delta c.$$

Si nous trouvons, ou évaluons la fonction $\omega(x,t,c)$, nous pouvons ensuite d'après (7) calculer approximativement, ou évaluer le changement de la fonction $u(x,t,c)$, selon le changement Δc du paramètre c.

Nous déduisons l'équation différentielle pour la fonction $\omega(x,t,c)$. En différentiant l'équation différentielle (3) par rapport à $c=\alpha,\beta,\gamma$ on obtient l'équation différentielle de la sensibilité sous la forme

$$(8)\qquad \gamma\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}+\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+2\beta\frac{\partial\omega}{\partial t}+\alpha\omega=\varphi$$

où

$$(9)\qquad \varphi=\begin{cases} -u & \text{pour } c=\alpha \\ -2\dfrac{\partial u}{\partial t} & \text{pour } c=\beta \\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} & \text{pour } c=\gamma. \end{cases}$$

Les conditions initiales et aux limites ont la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} \omega(x,0,c)=\dfrac{\partial}{\partial c}u(x,0,c)= & \dfrac{\partial\omega(x,0,c)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial c}\left[\dfrac{\partial u(x,0,c)}{\partial t}\right]= \\ =\dfrac{\partial}{\partial c}\psi_1(x)=0, & =\dfrac{\partial}{\partial c}\psi_2(x)=0 \\ \omega(0,t,c)=\dfrac{\partial}{\partial c}u(0,t,c)=0, & \omega(l,t,c)=\dfrac{\partial}{\partial c}u(l,t,c)=0 \\ \dfrac{\partial^2\omega(0,t,c)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial c}\left[\dfrac{\partial^2 u(0,t,c)}{\partial x^2}\right]=0, & \dfrac{\partial^2\omega(l,t,c)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial c}\left[\dfrac{\partial^2 u(l,t,c)}{\partial x^2}\right]=0 \end{cases}$$

Il faut étudier le comportement des solutions de l'équation (8), c'est-à--dire trouver les conditions suffisantes de leur limitation et de leur tendence vers zéro pour $t \to \infty$.

2. Etude des comportements des solutions de l'équation de la sensibilité.

Si le coefficient c ne change pas nous avons $\omega = 0$. Si au contraire le coefficient c subit un changement Δc, alors la solution de l'équation (8) s'écarte de la solution nulle. Cet écart nous le mesurerons par la distance sous la forme

$$\rho(\omega) = \int_0^l \left[\gamma\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + 2\beta\omega\frac{\partial \omega}{\partial t} + \alpha\omega^2\right] dx =$$

(11)

$$= \int_0^l \left[(\alpha - \beta^2)\omega^2 + \left(\beta\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2\right] dx$$

où nous supposons que

(12) $$\alpha - \beta^2 > 0$$

La distance introduite satisfait les conditions

$$\rho(\omega) > 0, \qquad \rho(0) = 0.$$

On ne demande pas que cette distance satisfait les axiomes des distances dans l'espace métrique.

En différentiant la distance (11) par rapport au temps et en substituant au lieu de $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ les termes correspondants de l'équation (8), on obtient après quelques transformations

(13) $$\dot{\rho} = -2\beta\rho + 2\int_0^l \left(\beta\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right)\varphi\, dx.$$

Il en résulte comme suit

$$\dot{\rho} \leqslant -2\beta\rho + \int_0^l 2\left|\beta\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right| |\varphi|\, dx \leqslant -2\beta\rho + \int_0^l \left[\left(\beta\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + \varphi^2\right] dx$$

(14) $$\dot{\rho} \leqslant -2\beta\rho + \int_0^l \left[(\alpha - \beta^2)\omega^2 + \left(\beta\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2\right] dx + \int_0^l \varphi^2\, dx$$

$$\dot{\rho} \leqslant -2\beta\rho + \rho + \int_0^t \varphi^2\, dx = (1 - 2\beta)\rho + \int_0^t \varphi^2\, dx$$

Désignons

(15) $$\Phi(t, c) = \int_0^l \varphi^2(x, t, c)\, dx$$

D'après (14) on obtient alors l'évaluation

$$\rho \leqslant B \exp[(1-2\beta)t] + \int_0^t \Phi(s, c) \exp[(1-2\beta)(t-s)]\, ds, \qquad t \in [0, \infty) \tag{16}$$

Dans cette inégalité, suivant les conditions initiales et la formule (11) on a

$$B = \rho \,|_{t=0} = 0.$$

L'évaluation (16) prend alors finalement la forme

$$\rho \leqslant \int_0^t \Phi(s, c) \exp[(1-2\beta)(t-s)]\, ds, \qquad t \in [0, \infty). \tag{17}$$

Puisque la solution $u(x, t, c)$ est connue, alors on connait également la fonction $\Phi(t, c)$. Nous pouvons donc obtenir analytiquement, ou numériquement, le domaine des paramètres pour que l'inégalité (17) soit satisfaite.

Ayant évalué la distance ρ, on peut évaluer la fonction de la sensibilité comme suit. Nous avons l'inégalité

$$\int_0^l \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2 dx \geqslant \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{18}$$

Nous pouvons alors écrire l'inégalité

$$\int_0^l \left[(\alpha - \beta^2)\omega^2 + \left(\beta\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + \gamma \frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2\right] dx \leqslant \rho \leqslant \tag{19}$$

$$\leqslant \int_0^t \Phi(s, c) \exp[(1-2\beta)(t-s)]\, ds$$

d'où il découle

$$\int_0^l \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant \frac{l^2}{\gamma\pi^2} \int_0^t \Phi(s, c) \exp[(1-2\beta)(t-s)]\, ds. \tag{20}$$

En outre, nous avons

$$\omega^2 = \left[\int_0^x \frac{\partial \omega}{\partial x} dx\right]^2 \leqslant \int_0^x 1^2\, dx \int_0^x \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant l \int_0^l \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 dx$$

d'où on obtient l'évaluation de la fonction de la sensibilité

$$\omega^2 \leqslant \frac{l^3}{\gamma\pi^2} \int_0^t \Phi(s, c) \exp[(1-2\beta)(t-s)]\, ds, \qquad t \in [0, \infty). \tag{21}$$

Supposons que

$$1-2\beta<0 \tag{22}$$

Si la fonction $\Phi(t, c)$ est bornée pour $t\in[0, \infty)$, la fonction de la sensibilité ω^2 est également bornée et si $\Phi(t, c)\to 0$ pour $t\to\infty$, la fonction de la sensibilité a également la même propriété, c'est-à-dire $\omega^2\to 0$, pour $t\to\infty$.

Soit la condition (22) satisfaite et considérons par exemple le cas, où la solution $u(x, t, c)$ de l'équation (1), avec ses dérivées partielles de l'équation (1) sont bornées. Dans ce cas la fonction est également bornée, c'est-à-dire

$$\Phi(t, c)\leqslant\lambda=\text{const}<\infty, \qquad t\in[0, \infty). \tag{23}$$

L'évaluation (21) prend alors la forme

$$\omega^2\leqslant\frac{\lambda l^3}{\gamma\pi^2(2\beta-1)}(1-\exp[(2\beta-1)t]). \tag{24}$$

Si la solution $u(x, t, c)$ est inconnue, alors dans le cas $c=\alpha$, c'est-à-dire $\varphi=-u$ nous pouvons obtenir l'évaluation pour la fonction de la sensibilité comme suit.

On peut pour la fonction u construire analogiquement comme ci-dessus l'évaluation suivante

$$\begin{aligned} J=\int_0^l\left[(\alpha-\beta^2)u^2+\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\gamma\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx\leqslant \\ \leqslant A\exp[(1-2\beta)t]+\int_0^t Q(s)\exp[(1-2\beta)(t-s)]\,ds \end{aligned} \tag{25}$$

où

$$Q(t)=\int_0^l f^2\,dx, \qquad A=J|_{t=0}.$$

Nous avons alors

$$\Phi=\int_0^l u^2\,dx\leqslant\frac{A}{\alpha-\beta^2}\exp[(1-2\beta)t]+\frac{1}{\alpha-\beta^2}\int_0^t Q(s)\exp[(1-2\beta)(t-s)]\,ds. \tag{26}$$

D'après (21) l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} \omega^2\leqslant\frac{l^3}{\gamma\pi^2(\alpha-\beta^2)}\int_0^t\Big(A\exp[(1-2\beta)s]+ \\ +\int_0^s Q(\tau)\exp[(1-2\beta)(s-\tau)]\,d\tau\Big)\exp[(1-2\beta)(t-s)]\,ds \end{aligned} \tag{27}$$

Sur la base de l'inégalité (27), l'étude du comportement de la fonction de la sensibilité, selon les propriétés de la fonction Q, ne présente pas de difficultés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Tomović, R., *Sensitivity analysis of dynamic systems*, NY 1963, Mac Graw Hill.

[2] Томович, Р., Вукобратович, М., *Общая теория чувствительности*, Москва Изд. Советское Радио 1972.

[3] Gutowski, R., *Некоторые вопросы устойчивости дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение механических систем в теории колебаний*, VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen Band I, Abhandlungen der AdW, Akademie Verlag s. 289—305.

[4] Gutowski, R., *Устойчивость колебаний гибкого шланга с учетом протекающей внутри жидкости*, Czechoslovak Academy of Sciences, Institute of Thermomechanics, Proceedings of the XI-th Conference DYNAMICS OF MACHINES, Prague, Liblice Czechoslovakia, 1977 pp. 123—128

L'Institut de Technique Aéronautique
et de Mécanique Appliquée
de l'Ecole Polytechnique à Varsovie, Pologne

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Р Гутовски

Резюме

В работе рассматривается чувствительность относительно изменений коэффициентов, решений уравнения линейных колебаний балки на шарнирных опорах, лежащей на упругом основании, с учетом внешного сопротивления пропорционального к первей степени скорости. После введения функции чувствительности, выводится дифференциальное уравнение в частных производных для этой функции. Получена эффективная оценка функции чувствительности с помощью некоторого удобно выбранного расстояния между решениями дифференциального уравнения чувствительности.

ОСЕТЉИВОСТ РЕШЕЊА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ПАРЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ГРЕДЕ

Р. Гутовски

Резиме

У раду се посматра осетљивост на промену коефицијената решења диференцијалне парцијалне једначине линеарних попречних осцилација греде зглобно везане за ослонце који леже на еластичној основи. Отпор спољне средине пропорционалан је првом степену брзине осциловања греде. После увођења функције осетљивости, изводи се диференцијална парцијална једначина за ту функцију. Добивена је ефективна оцена функције осетљивости помоћу неког погодно изабраног растојања решењима диференцијалне једначине осетљивости.