TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 4, pp. 165—170, 1978.

О КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Велько А. Вуйичич

Вопросом колебаний точки или системы точек под действием квазилинейных сил, как известно, занимались многие ученые. Но все-таки еще и сейчас ведётся поиск аналитических методов для решения задачи о квазилинейных колебаниях голономной механической системы с многими степенями свободы движения так, как это сделано для системы с одной степеню свободы колебания, например, в работе [1]. Мы предлагаем одно такого рода решение для механической системы с n степенями свободы колебания.

Рассмотрим механическую систему точек с массами m_ν = конст. $(\nu=1,\ldots,N)$ стесненую голономными склерономньми связями и движущуюся относительно инерциальной системы координат под действием приложенных к ней квазилинейных сил, которые зависят от малого параметра ε, вида

$$\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_i(t)+\mathrm{grad}_{\mathbf{r}_i}U+\varepsilon\,\mathbf{R}_i(t,{}_1\,\mathbf{r}_i,\ldots,\mathbf{r}_N;\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_N;\varepsilon),$$

где U функция потенциальных сил.

Дифференциальные уравнения движения той-же квазилинейной голономной склерономной системы в $2n$-мерном фазовом пространстве можно написать в виде [2]

$$\dot{q}^\alpha=a^{\alpha\beta}p_\beta,$$

$$\dot{p}_\alpha+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}p_\lambda\frac{dq_\beta}{dt}=Q_\alpha(t,q^1,\ldots,q^n;p_1,\ldots,p_n;\varepsilon),$$

$$(\alpha,\beta,\lambda=1,2,\ldots,n<3N)$$

где q^α, p_α $(\alpha=1,\ldots,n)$ фазовые канонические переменные Гамильтона,

$$Q_\alpha=\frac{\partial U}{\partial q^\alpha}+f_\alpha(t)+\varepsilon\,\mathcal{R}_\alpha(t,q^1,\ldots,q^n;p_1,\ldots,p_n;\varepsilon)$$

обобщенные силы, и $a^{\alpha\beta}$ контравариантные координаты метрического тензора конфигурационного пространства. Исходя из предположения, что нелинейными являются только неконсервативные силы $\varepsilon\mathcal{R}_\alpha$, мы считаем, что инерционные коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ постоянные. Символы Кристоффеля $\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}$ поэтому равняются нулю. Кроме этого, мы предполагаем, что потенциальная энергия $\Pi(q^1, \ldots, q^n) = -U$ в области разложения G положительно определеная квадратная форма $\Pi = \frac{1}{2} c_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta$ коэффициенты $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ которой тоже постоянные. Еще претположим, что число степеней свободы движения равняется числу степеней свободы колебания. Из-за этого дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы будут [2]

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta, \\ \dot{p}_\alpha + c_{\alpha\beta} q^\beta = f_\alpha(t) + \varepsilon \mathcal{R}_\alpha(t, q^1, \ldots, q^n; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon). \end{cases}$$

Функции $f_\alpha(t)$ периодические и непрерывные по явно входящему аргументу t а функции $\mathcal{R}_\alpha$ кроме непрерывносты по t, аналитически зависят от фазовых переменных $q^1 q^2, \ldots, q^n; p_1, \ldots, p_n$ в области G и от ε при достаточно малых по модулю значениях этого параметра.

При $\varepsilon = 0$ получаем порождающую систему линейных дифференциальных уравнений

$$(2)\qquad \begin{cases} \dot{q} - a^{\alpha\beta} p_\beta = 0, \\ \dot{p}_\alpha + c_{\alpha\beta} q^\beta = f_\alpha(t), \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Решения $q^\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$ этой основной порождающей системы обозначим нулевым индексом и напишем в виде

$$(3)\qquad \begin{cases} q^\alpha = q_0{}^\alpha(t) = \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \Delta_k{}^\alpha (A_{0k} \sin \omega_k t + B_{0k} \cos \omega_k t) + \\ \qquad + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t f^\alpha(\tau) \sin \omega_k (t-\tau)\, d\tau \Big\}, \\ p_\alpha = p_{0\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \omega_k a_{\alpha\beta} \Delta_k{}^\beta (A_{0k} \cos \omega_k t - B_{0k} \sin \omega_k t) + \\ \qquad + \int_0^t f_\alpha(\tau) \cos \omega_k (t-\tau)\, d\tau \Big\}, \end{cases}$$

где ω_k $(k = 1, \ldots, n)$ частоты собственных колебаний, A_{0k} и B_{0k} постоянные, а $f^\alpha(t) = a^{\alpha\beta} f_\beta$ контравариантные координаты вектора силы $f(t)$.

Силы $\varepsilon \mathcal{R}_\alpha$ при достаточно малом по модулю ε только возмущают движения (3) и решения $q^\alpha(t)$ и $p_\alpha(t)$ квазилинейных дифференциальных уравнений (1) находятся недалеко от решений (3), т. е.,

$$(4)\qquad \begin{cases} q^\alpha(t) = q_0{}^\alpha(t) + \sum_{s=1} \varepsilon^s q^{\alpha}_{(s)}(t), \\ p_\alpha(t) = p_{0\alpha}(t) + \sum_{s=1} \varepsilon^s p_{(s)\alpha}(t), \end{cases}$$

где $q^{\alpha}{}_{(s)}(t)$ и $p_{(s)\alpha}(t)$ периодические пока еще неопределенные функции времени t.

Разложим функции $\mathcal{R}_\alpha$ по степеням $(q^\alpha - q_0{}^\alpha)$, $(p_\alpha - p_{0\alpha})$ и ε до той степени, до которой разложены потенциальные силы и инерционные коэффициенты, т. е.

$$\mathcal{R}_\alpha = R_{0\alpha} + (q^\beta - q_0{}^\beta)\,\mathcal{R}_{\alpha\beta} + (p_\beta - p_{0\beta})\,\mathcal{R}_\alpha{}^\beta + S_\alpha + \cdots,$$

где

$$\mathcal{R}_{0\alpha} = \mathcal{R}_\alpha(t,\, q_0{}^1(t), \ldots,\, q_0{}^n(t){:}\ p_{01}(t), \ldots,\, p_{0n}(t);\ 0)$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta}(t,\, q_0{}^1(t), \ldots,\, q_0{}^n(t);\ p_{01}(t), \ldots,\, p_{0n}(t)) = \left.\frac{\partial R_\alpha}{\partial q^\beta}\right|_{\substack{q^\alpha = q_0{}^\alpha(t)\\ p^\alpha = p_0{}^\alpha(t)\\ \varepsilon = 0}}$$

$$\mathcal{R}^\beta{}_\alpha = \mathcal{R}_\alpha{}^\beta(t,\, q_0{}^1(t), \ldots,\, q_0{}^n(t);\ p_{01}(t), \ldots,\, p_{0n}(t)) = \left.\frac{\partial \mathcal{R}_\alpha}{\partial p_\beta}\right|_{\substack{q^\alpha = q_0{}^\alpha(t)\\ p_\alpha = p_{0\alpha}(t)\\ \varepsilon = 0}}$$

$$S_\alpha = S_\alpha(t,\, q_0{}^1(t), \ldots,\, q_0{}^n(t);\ p_{01}(t), \ldots,\, p_{0n}(t)) = \left.\frac{\partial \mathcal{R}_\alpha}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{q^\alpha = q_0{}^\alpha(t)\\ p_\alpha = p_{0\alpha}(t)\\ \varepsilon = 0.}}$$

Подставляя разложенные функции $\mathcal{R}_\alpha$ в уравнения (1) получим:

$$\text{(5)}\qquad \begin{cases} \dot q^\alpha - a^{\alpha\beta}\, p_\beta = 0 \\ \dot p_\alpha + c_{\alpha\beta}\, q^\beta = f_\alpha(t) + \varepsilon\,[\mathcal{R}_{0\alpha} + (q^\beta - q_0{}^\beta)\,\mathcal{R}_{\alpha\beta} + (p_\beta - p_{0\beta})\,\mathcal{R}_\alpha{}^\beta + S_\alpha\, s]. \end{cases}$$

Чтобы предположенные степенные ряды (4) удовлетваряли решениям квазилинейных дифференциальных уравнений (5) должно бить:

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} \dot q_0{}^\alpha - a^{\alpha\beta}\, p_{0\beta} = 0 \\ \dot p_{0\alpha} + c_{\alpha\beta}\, q_0{}^\beta = f_{0\alpha}(t) \end{cases}$$

и также:

$$\text{(7)}\qquad \begin{cases} \dot q^\alpha_{(s)} - a^{\alpha\beta}\, p_{(s)\beta} = 0 \\ \dot p_{(s)\alpha} + c_{\alpha\beta}\, q^\beta_{(s)} = f_{(s)\alpha}(t,\, q^1_{(s-1)}, \ldots,\, q^n_{(s-1)};\ p_{(s-1)}\ \ 1, \ldots,\, p_{(s-1)n}), \end{cases}$$

где:

$$\text{(8)}\qquad \begin{cases} f_{0\alpha} = f_\alpha(t) \\ f_{1\alpha} = \mathcal{R}_{0\alpha}, \\ f_{2\alpha} = \mathcal{R}_{\alpha\beta}\, q_1{}^\beta + \mathcal{R}_\alpha{}^\beta\, p_{1\beta} + S_\alpha, \\ f_{(j)\alpha} = \mathcal{R}_{\alpha\beta}\, q^\beta_{(j-1)} + \mathcal{R}_\alpha{}^\beta\, p_{(j-1)\beta}, \quad (j = 3,\ 4, \ldots). \end{cases}$$

Система (6) — это порождающие дифференциальные уравнения (2), решения которых (3), т.е. $q_0^{\alpha} = q_0^{\alpha}(t)$, $p_{0\alpha} = p_{0\alpha}(t)$. Подставляя теперь эти функции от t в правые части дифференциальных уравнений (7) за $k = 1$, мы получим снова систему од $2n$ уравнений вида (6), т.е.

$$
(9) \qquad \begin{cases} \dot{q}^{\alpha}_{(1)} - a^{\alpha\beta} p_{(1)p} = 0 \\ \dot{p}_{(1)\alpha} + c_{\alpha\beta} q^{\beta}_{(1)} = f_{(1)\alpha}(t, A_{01}, \ldots, A_{0n}; B_{01}, \ldots, B_{0n}) = f_{(1)\alpha}(t). \end{cases}
$$

Постоянные A_{0k} и B_{0k} $(k = 1, \ldots, n)$ определяем из $2n$ условий существования периодических решений $q_1^{\alpha} = q_1^{\alpha}(t + T)$ и $p_{1\alpha}(t) = p_{1\alpha}(t + T)$, т.е. при отсуствии резонирующих членов в правой части, а это значит при выполнении $2n$ условий:

$$
(10) \qquad \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \Delta^{\alpha}_{(k)} f_{1\alpha}(t) \cos \omega_{(k)} t \, dt = 0 \\ \int\limits_0^{2\pi} \Delta^{\alpha}_{(k)} f_{1\alpha}(t) \sin \omega_{(k)} t \, dt = 0. \end{cases}
$$

Периодические решения системы дифференциальных уравнений (9) теперь находим в виде (3), т.е.

$$
(11) \qquad \begin{cases} q_1^{\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} \Big\{ \Delta_k^{\alpha} (A_{1k} \sin \omega_k t + B_{1k} \cos \omega_k t) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\omega_k} \int\limits_0^t f_1^{\alpha}(\tau) \sin \omega_k (t - \tau) \, d\tau \Big\} \\ p_{1\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} \Big\{ \omega_k a_{\alpha\beta} \Delta_k^{\beta} (A_{1k} \cos \omega_k t + B_{1k} \sin \omega_k t) + \\ \qquad + \int\limits_0^t f_{1\alpha}(\tau) \cos \omega_k (t - \tau) \, d\tau \Big\}. \end{cases}
$$

Подстановкой решений (3) и (11) во вторую систему дифферениальных уравниний (7) и исключением резонирующих членов

$$
\int\limits_0^{2\pi} \Delta_k^{\alpha} f_{2\alpha}(t) \cos \omega_k t \, dt = 0,
$$

$$
\int\limits_0^{2\pi} \Delta_k^{\alpha} f_{2\alpha}(t) \sin \omega_k t \, dt = 0,
$$

мы получаем решения $q_2^{\alpha}(t)$, $p_{2\alpha}(t)$ вида (3).

Таким способом после определения решений $q^{\alpha}_{(m-1)}(t)$ и $p_{(m-1)}(t)$ приводим систему дифференциальных уравнений к виду (6), решения которой вида (11) с $2n$ постоянными $A_{(m)k}$ и $B_{(m)k}$. Мы теперь получаем искомые решения (4) в виде:

$$
(12)\qquad \begin{cases} q^{\alpha} = \sum\limits_{s=0}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon^s \left\{ \Delta_k{}^{\alpha} (A_{sk} \sin \omega_k t + B_{sk} \cos \omega_k t) + \right. \\ \left. \qquad + \dfrac{1}{\omega_k} \int\limits_0^t f_s{}^{\alpha}(\tau) \sin \omega_k (t-\tau)\, d\tau \right\}, \\ p_{\alpha} = \sum\limits_{s=0}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon^s \left\{ \omega_k a_{\alpha\beta} \Delta_k{}^{\beta} (A_{sk} \cos \omega_k t - B_{sk} \sin \omega_k t) + \right. \\ \left. \qquad + \int\limits_0^t f_{s\alpha}(\tau) \cos \omega_k (t-\tau)\, d\tau \right\}. \end{cases}
$$

где $2n$ постоянные $A_{(m)k}$ и $B_{(m)k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ надо определить из $2n$ начальных данных $q^{\alpha} = q^{\alpha}(t_0)$, $p_{\alpha} = p_{\alpha}(t_0)$.

Это решение (12) удовлетворяет теореме Пуанкаре о существовани единcтвенного периодического решения диференциальных уравнений (1), стремящегося к решению (3) пораждающейся системы уравнений (2) или (6) при $\varepsilon \to 0$. Иначе, подстановкой (12) в (5) легко увериться, что полученное решение (12) удовлетворяет дифференциалыным уравнениям (5) или (7), если числа ω_k-корни частотного уравнения $|c_{\alpha\beta} - \omega^2 a_{\alpha\beta}| = 0$ собственных колебаний рассматриваемой механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Эльсгольц, Л. Э., *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, Москва, изд. ,,Наука", 1965.

[2] Vujičić, V., *Teorija oscilacija*, ,,Naučna knjiga" Beograd, 1977.

ON QUASI-LINEAR OSCILLATION OF THE MECHANICAL SYSTEM

Veljko A. Vujičić

Summary

The question of quasi-linear oscillation with small parameters has been the subject of many papers and monographies. But as still does not exist an acceptable analytical working method for solution of quasi-linear oscillation system with more degrees of freedom, therefore, in this paper is given a generalization of procedure of small parameters [1] for the system of one degree of free oscillation to the mechanical system of more degrees of free oscillation.

It is considered the system of N points under action of conservative, constraint and nonconservative forces dependent on small parametar, whose differe ntial equation of motion in $2n$-dimensional phase space have the form (1), where the functions $f_{\alpha}(t)$ are periodical and B_{α} continuous on t, analytically dependent on canonical variables q^{α} and p^{α} and of small by module parameter ε. By developing these functions R_{α} in power series by $q^{\alpha}-q_0^{\alpha}$, $p_{\alpha}-p_{0\alpha}$ and by supposing the solutions in the form (4), the solutions are found in the form (12) for the nonresonant case of oscillation.

О КВАЗИЛИНЕАРНИМ ОСЦИЛАЦИЈАМА МЕХАНИЧКОГ СИСТЕМА

Вељко А. Вујичић

Резиме

Питање квазилинеарних осцилација са малим параметром предмет је многих радова и монографија. Међутим, како још увек не постоји једна прихватљива аналитичка радна метода за решавање квазилинеарних осцилација система са више степена слободе, у овом раду се уопштава поступак метода малог параметра [1] за систем од једног степена слободе осциловања на механички систем од више степена слободе кретања. Посматра се систем од N тачака под дејством конзервативних, принудних и неконзервативних сила зависних од малог параметра, чије диференцијалне једначине кретања у $2n$-димензионом фазном простору имају облик (1), где су функције $f_{\alpha}(t)$ периодне, а R_{α} непрекидне по t, аналитички зависне од канонских промењивих q^{α} и p_{α} и од малог по модулу параметра ε. Развијањем ових функција R_{α} у степени ред по $q^{\alpha}-q_0^{\alpha}$ и $p_{\alpha}-p_{0\alpha}$ и претпостављајући решења у облику (4) нађена су решења у облику (12) за нерезонантни случај осцилација.