TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 4, pp. 131—137, 1978.

О ПРИНЦИПЕ ГАМИЛЬТОНА И ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

*В. В. Румянцев**

Для неголономных систем справедлив, как известно, принцип Гамильтона в форме Гельдера[1]. Известны также еще два интегральных принципа для неголономных систем — принцип, которым пользовался Воронец[2] при выводе уравнений движения неголономных систем, и принцип, установленный Сусловым[3] и названный им „видоизменением начала Даламбера". В докладе проанализированы условия, при которых выводятся эти принципы, и для общего случая неголономных нелинейных связей показано, что все эти три вариационных интегральных принципа равносильны и преобразуются один в другой. Выяснены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы принцип Гамильтона для неголономной системы имел характер принципа стационарного действия. Эти условия аналогичны найденным ранее[4,5] условиям применимости к неголономным системам обобщенного метода Гамильтона-Якоби интегрирования уравнений движения.

Обозначим через $q_i\,(i=1,\ldots,n)$ лагранжевы координаты механической системы, стесненной идеальными неинтегрируемыми связями вида

$$f_l(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)=0 \qquad (l=1,\ldots,r<n) \tag{1}$$

в общем случае нелинейными относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_i$. Связи (1) предполагаются независимыми, их можно разрешить относительно некоторых r зависимых скоростей и представить в виде

$$f_l(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)=\dot{q}_{k+l}-\varphi_l(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t)=0 \qquad (l=1,\ldots,r), \tag{2}$$

принимая за независимые скорости $\dot{q}_s\,(\bar{\bar{s}}=1,\ldots,\ k=n-r)$.

Возможные перемещения точек системы при связях (1) удовлетворяют условиям Четаева[6]

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i=0 \qquad (l=1,\ldots,r). \tag{3}$$

Принцип Гамильтона обычно выводят из принципа Даламбера-Лагранжа. В обобщенных координатах последний имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i=0, \tag{4}$$

---

* Сообщено на 14 югославском съезде рациональной и прикладной механике 8 июня 1978. года, в Порторож.

где $L(q, \dot{q}, t) = T + U$ — функция Лагранжа, $T(q, \dot{q}, t)$ кинетическая энергия, $U(q, t)$ — силовая функция приложенных к системе активниых сил. Предполагая возможные перемещения функциями времени, принадлежащими классу C^2 и удовлетворяющими условиям (3) и условиям

$$\delta q_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при} \quad t = t_0,\, t_1, \tag{5}$$

в результате интегрирования равенства (4) в постоянных пределах t_0 и t_1 получаем соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt = 0. \tag{6}$$

В аналитической механике сложились, как известно[7], две равноправные точки зрения по вопросу о связи производных $\frac{d}{dt} \delta q^i$ с вариациями $\delta \dot{q}_i$ обобщенных скоростей. Согласно одной из них для всех скоростей справедливы перестановочные соотношения

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

вследствие которых изменения функций $f_l(q, \dot{q}, t)$ на возможных перемещениях представляются, с учетом (3), в виде

$$\delta f_l = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \qquad (l = 1, \ldots, r). \tag{8}$$

В случае интегрируемости связей (1) выражения (8) тождественно равны нулю, а для неинтегрируемых связей (1) эти выражения в общем случае не равны нулю, однако могут обращаться в нуль в силу уравнений движения системы[8]. Для связей (2) выражения (8) принимают вид

$$\delta f_l = \delta \dot{q}_{k+l} - \delta \varphi_l = \sum_{S=1}^{K} A_s^{k+l} \delta q_s \qquad (l = 1, \ldots, r), \tag{9}$$

где

$$A_s^{k+l} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_l}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_s} - \sum_{\nu=1}^{r} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_{k+\nu}} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \dot{q}_s} \qquad (l = 1, \ldots, r,\ s = 1, \ldots, k) \tag{10}$$

Согласно другой точке зрения соотношения вида (7) справедливы только для независимых скоростей

$$\delta \dot{q}_s = \frac{d}{dt} \delta q_s \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{11}$$

и выполняются тождества

$$\bar{\delta} f_l = 0 \qquad (l = 1, \ldots, r), \tag{12}$$

где символ $\overline{\delta}$ обозначает вариацию в этом втором смысле функций, содержащих зависимые скорости. Из условий (12) получаем с учетом (10), (11) выражения для вариаций зависимых скоростей

$$\overline{\delta}\dot{q}_{k+l}=\frac{d}{dt}\delta q_{k+l}-\sum_{s=1}^{k}A_s^{k+l}\delta q_s \qquad (l=1,\ldots,r). \tag{13}$$

Таким образом, эти две точки зрения приводят к различным выражениям вариаций зависимых скоростей. Эти различия сказываются и на окончательном виде, к какому приводится соотношение (6).

Если принять условия (7), то равенство (6) принимает вид формы Гельдера принципа Гамильтона для неголономных систем [1,8]

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=0 \tag{14}$$

Функции $q_i=q_i(t)$, удовлетворяющие этому принципу, дают действительную траекторию системы, стесненной связями (1). Последовательность смещенных положений $q_i(t)+\delta q_i$ можно рассматривать как варьированную траекторию, которая в общем случае не удовлетворяет, однако, уравнениям (1), так как согласно (8) $\delta f_l\neq 0$, вообще говоря. В связи с этим принцип (14) для неголономных систем не представляет собою принципа стационарного действия

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L dt=0 \tag{15}$$

в классе кривых, удовлетворяющих уравнениям связей (1)[9].

Преобразуем принцип (14) к несколько иному виду. С помощью уравнений (2) представим кинетическую энергию системы T в виде функции $\theta(q_i, \dot{q}_s, t)$. Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\delta T=\delta\theta+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}(\delta\dot{q}_{k+l}-\delta\varphi_l). \tag{16}$$

Заменяя выражение δT, входящее в (14) посредством δL, правой частью равенства (16), преобразуем (14) к виду формы Воронца[2] принципа Гамильтона для неголономных систем

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(\theta+U)+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}(\delta\dot{q}_{k+l}-\delta\varphi_l)\right]dt=0. \tag{17}$$

Воронец[2] рассматривал принцип (17) для линейных связей при условиях (7).

Если же принять соотношения (11) и (13), то равенство (6) принимает вид формы Суслова[3] принципа Гамильтона для неголономных систем

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\overline{\delta}L+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}\sum_{s=1}^{k}A_s^{k+l}\delta q_s\right)dt=0. \tag{18}$$

Соотношение (18) было названо Сусловым видоизменением начала Даламбера. При этом он подчеркнул, что оно ,,отнюдь не представляет собою начала Гамильтона''[3], имея, вероятно, в виду принцип стационарного действия (15).

Сравнивая выражения (14) и (18), следует помнить, что фигурирующие в них вариации функции Лагранжа вычисляются по-разному; в (14) — с учетом равенств (7), и (18) — с учетом (11) и (13). Так как различия в вариациях функции Лагранжа обусловлены различиями лишъ в вариациях зависимых скоростей, то можно ожидать, что при исключении зависимых скоростей различия исчезнут. Действительно, если принять соотношения (11) и (12), то равенство (16) примет вид

$$\bar{\delta}\, T = \delta\theta$$

вследствие чего принцип (18) приводится к виду

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\delta(\theta + U) + \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} A_s^{k+l}\, \delta q_s\right] dt = 0. \tag{19}$$

Обращая внимание на равенства (9), видим, что принцип (19) совпадает с формой (17) Воронца.

Следовательно, формы (14), (17)—(19) принципа Гамильтона для неголономных систем равносильны и переходят одна в другую при преобразованиях (16), (13) с учетом уравнений связей и способа варьирования[10].

В интегральном вариационном принципе (18) варьированные пути $q_i(t) + \delta q_i$ удовлетворяют в первом приближении уравнениям связей (1), так как для них выполняются условия (12). Следовательно принцип (18) имеет характер принципа стационарного действия (15) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{l,\, s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} A_s^{k+l}\, \delta q_s\, dt = 0.$$

Так как здесь δq_s — независимы и произвольны, то оно выполняется лишь при условиях[11]

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} A_s^{k+l} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{20}$$

Сопоставим принцип (15) с задачей Лагранжа о стационарном значении интеграла действия в классе кривых, удовлетворяющих уравнениям связей (1), которая введением неопределенных множителей $\varkappa_l(t)$ приводится к безусловной вариационной задаче

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(L + \sum_{l} \varkappa_l f_l\right) dt = 0. \tag{21}$$

Если в задаче (21) под символом δ понимать вариации лишь в классе возможных перемещений (3) неголономной системы, то очевидно, что (15) совпадает с (21) при условии

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_l \varkappa_l \delta f_l \, dt = 0,$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sum_{l,i} \varkappa_l \left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0, \tag{22}$$

записанное с учетом (8).

Для связей (2) равенство (22) приводится к условиям

$$\sum_l \varkappa_l A_s^{k+l} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k). \tag{23}$$

Можно также показать[10], что условия (22) или (23) необходимы и достаточны для того, чтобы некоторое решение уравнений движения неголономной системы находилось среди решений уравнений Эйлера вариационной задачи(21).

Таким образом, условия (20), или (22), или (23) необходимы и достаточны для того, чтобы принцип Гамильтона для неголономной системы имел характер принципа стационарного действия (15).

С вопросом о стационарности действия по Гамильтону для действительного движения тесно связана задача обобщения[12, 4, 5] на неголономные системы метода Гамильтона-Якоби интегрирования уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_l \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{24}$$

где μ_l — неопределенные множители,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \; (i = 1, \ldots, n), \quad H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L.$$

Обобщенное уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_1 \left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t \right) = 0, \tag{25}$$

где функция[10]

$$H_1(q_i, \pi_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \sum_{l=1}^{r} (p_{k+l} - \pi_{k+l}) \left(\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s - \varphi_l \right),$$

причем переменные

$$\pi_i = p_i + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{26}$$

λ_l — неопределенные множители[12].

Для уравнения (25) уравнения характеристик имеют вид канонических уравнений Гамильтона

$$(27) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \pi_i}, \quad \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i} \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Согласно теореме Якоби соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \pi_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

являются $2n$ интегралами уравнений (27), если $S(q_i\, \alpha_i, t)$ есть полный интеграл уравнения (25); α_i и β_i — произвольные постоянные.

Дифференцируя по t соотношения (26) в силу уравнений (27), получим уравнения

$$(28) \qquad \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_l \lambda_l \left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_l \dot{\lambda}_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1, \ldots, n),$$

совпадающие с уравнениями Эйлера вариационной задачи (21) при $\lambda_l = \varkappa_l$, $(l=1, \ldots, r)$. С помощью уравнений (28) при учете (3) можно показать[4,5], что условие

$$(29) \qquad \sum_{l,\, i} \lambda_l \left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0,$$

совпадающеее при $\lambda_l = \varkappa_l$ с условием (22), необходимо и достаточно для того, чтобы, решение уравнений (27) являлось также решением уравнений движения (24). Следовательно, условие (29) необходимо и достаточно для применения к неголономным системам рассматриваемого обобщенного метода Гамильтона-Якоби. Этот метод применим тогда и только тогда, когда принцип Гамильтона (14) носит характер принципа стационарного действия.

При выполнении условия (29) движения неголономной системы описываются каноническими уравнениями (27), из которых как следствие вытекает принцип стационарного действия

$$(30) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \dot{q}_i - H_i \right) dt = 0$$

равносильный принципу (15)[10].

ЛИТЕРАТУРА

]1] Гёльдер О., *О принципах Гамильтона и Мопертюи*, В сб. „Вариационные принципы механики". Физматгиз, М., 1959.

[2] Воронец П. В., *Об уравнениях движения для неголономных систем*, Матем. сб., т. 22, вып. 4, 1901 г.

[3] Суслов Г. К., *Об одном видоизменении начала Даламбера*, Матем. сб., т. 22, вып. 4, 1901 г.

[4] Rumyantsev V. V., Sumbatov A. S., *On the problem of a generalisation of the Hamilton-Jacobi method for nonholonomic systems*, (в печати в ZAMM)

[5] Румянцев В. В., *О некоторых задачах аналитической динамики*, Теориска и примењена механика, № I, 1978.

[6] Четаев Н. Г., *О принципе Гаусса*, Изв. Физ. — матем. об-ва при Казан. ун-те, т. 6, серия 3. 1932—33.

[7] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., *Динамика неголономных систем*, „Наука", М., 1967.

[8] Новоселов В. С., *Вариационные методы в механике*, Изд-во Ленингр. ун-та, 1966.

[9] Парс Л., *Анлитическая динамика*, „Наука", М., 1971.

[10] Румянцев В. В., *О принципе Гамильтона для неголономных систем*, ПММ, т. 42, вып. 3, 1978.

[11] Сумбатов А. С., *О принципе Гамильтона для неголономнхх систем*, Вестник МГУ, № I, 1970.

[12] R. van Dooren, *Generalised methods for nonholonomic systems with applications in various fields of classical mechanics*, Theor. and appl. mech. 14-th IUTAM Congress, Delft, 1976.

ON HAMILTONIAN PRINCIPLE AND ON HAMILTON-JACOBI METHOD FOR NONHOLONOMIC SYSTEMS

V. V. Rumjancev

Summary

For nonholonomic systems with nonlinear constraints the conditions of the validity of the Hamiltonian principle in Gölder, Voronets and Suslov forms are investigated. It is shown that all these forms may be transformed one to another. The necessary and sufficient conditions are obtained for which the Hamiltonian principle has the character of rhe conditional variational principle. These conditions are analogous to them which have been earlier established for the applicability of the generalized Hamilton-Jacobi method.

О ХАМИЛТОНОВОМ ПРИНЦИПУ И УОПШТЕНОМ ХАМИЛТОН--ЈАКОБИЈЕВОМ МЕТОДУ ЗА НЕХОЛОНОМНЕ СИСТЕМЕ

В. В. Румјанцев

Резиме

У раду се анализирају услови за које се изводи Хамилтонов принцип у формама које користе Гелдер, Вороњц и Суслов. За општи случај нехолономних нелинеарних веза показује се мућусобна веза између ових интегралних варијационих принципа. Разјашњени су потребни и довољни услови за које Хамилтонов принцип за нехолономни системе има стационарно дејство.

Вычислительный Центр АН СССР
Москва, СССР
ул. Вавилова