TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 4, pp. 125—130 1978.

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИНОК ИЗ ВЯЗКО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА*

Душан Л. Медич

1. Применение преобразования Лапласа к решению задач изгиба вязко-упругих пластинок

Дифференциальное уравнение изгиба тонких упругих пластинок известно из теории упругости

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \Delta\Delta w_0(x, y) = q(x, y) \tag{1}$$

где w_0-функция изгиба, h-толщина пластинки, E-модул упругости, ν-коэффициент Пуассона, $q(x, y)$-поперечная нагрузка, будет испильзованно для получения решения изгиба пластинки из вязко-упругого материала с предположением что нагрузка не зависит от времени

$$w = w(x, y, t) \tag{2}$$

Механические характеристики вязко-упругого материала содержани в форме функции релаксации и ползучести а связи между напряжениями и деформациями представляетъся в форме [1]

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2G\left[e_{ij}(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)\, e_{ij}(\tau)\, d\tau\right] \\ \sigma(t) &= 3K\left[\varepsilon(t) - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)\, \varepsilon(\tau)\, d\tau\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Для модель материала Ценнера при линейном напряжёном состоянию связъ представляетсъся в форме:

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) - \frac{\psi}{\mu}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\mu}}\, \varepsilon(\tau)\, d\tau\right] \tag{4}$$

где ψ и μ постоянние материала модели Ценнера и где взято ядро в форме

$$\Gamma(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\psi}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}}. \tag{5}$$

* Рад је у оквиру пројекта РЗН-Србије

Дифференцальное уравнение изгиба вязко-упругой пластинки получаеться из уравнения (1) перестановкой модула упругости E соответствующим оператором согласно с (4)

$$\frac{h^3(E+\tilde{E})}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta\, w(x,y,t)=q(x,y) \tag{6}$$

где

$$\tilde{E}\,\Delta\Delta\, w(x,y,t)=-\frac{E\psi}{\mu}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\mu}}\Delta\Delta\, w(x,y,\tau)\,d\tau \tag{7}$$

Решение уравнения (6) ищем в форме:

$$w(x,y,t)=w_0(x,y)\,T(t) \tag{8}$$

которое как возможное претполагаемое решение приводиться в [2]. Здесъ w_0 решение упругой задачи.

Таким образом, утверждаем что задача изгиба вязко-упругой пластинки в нашем случае сводиться к решению следующего интегрального уравнения конволуционного типа второго класса по функции $T(t)$

$$T(t)-\frac{\psi}{\mu}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\mu}}T(\tau)\,d\tau=1 \tag{9}$$

К уравнению (9) применяем преобразование Лапласа и получаем:

$$T^*_{(p)}=\frac{1+\mu p}{p(1+\mu p-\psi)} \tag{10}$$

Обратным преобразованием обнаруживаем для функцию $T(t)$:

$$T(t)=1+\frac{\psi}{1-\psi}\left[1-e^{-\frac{1-\psi}{\mu}t}\right] \tag{11}$$

так что вязко-упругое решение будет

$$w(x,y,t)=w_0(x,y)\left[1+\frac{\psi}{1-\psi}\left(1-e^{-\frac{1-\psi}{\mu}t}\right)\right] \tag{12}$$

В момент $t=0$ прогиби пластинки имеют величини соответствующей упругой пластинки.

Проаналиризуем полученное решение принимая во внимание постоянную ψ модели Ценнера:

а) $\psi<1$ и $t\to\infty$ прогиби остают конечни так как $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=\dfrac{1}{1-\psi}$

и прогиби получают значение

$$w=w_0\frac{1}{1-\psi} \tag{13}$$

б) $\psi = 1$ дасть вязко-упругое решение в форме

$$w(x, y. t) = w_0(x, y)\left(1 + \frac{t}{\mu}\right) \tag{14}$$

так как

$$\lim_{\psi \to 1} \frac{\psi}{1-\psi}\left(1 - e^{-\frac{1-\psi}{\mu}t}\right) = \frac{t}{\mu} \tag{15}$$

здесь прогиби нарастают по линейном законе.

в) $\psi > 1$ и $t \to \infty$ функция $T(t) \to \infty$ так что прогиби растут по експоненциальному закону.

2. Решение задач изгиба вязко-упругой прямоугольной пластинки методом аппроксомации А. А. Ильюшина

Метод аппроксимации А. А. Ильюшина позволяет получение решения вязко-упругой задачи прямим способом с помощю конволуционных интегралов. Этот метод для решения квазистатических задач линейной вязкоупругости обосновливаеться на принципе В. Волтера который формилируеться так: решение квазистатической задачи линейной теории вязко-упругости получаеться из соответствующей задачи линейной теории упругости перестановкой упругих постоянных интегралними операторами.

Особенно прост метод аппроксимации для материалов у которых можно пренебречь объемную вязкость. Представим кратко метод аппроксимации [1]:

Определаем функцию

$$\omega(t) = \frac{R(t)}{3K} \tag{16}$$

где $R(t)$-функция релаксации, K-модуль объемного сжатия и функцию

$$\pi(t) = 3K\Pi(t) \tag{17}$$

где $\Pi(t)$-функция пользучести.

Обозначим

$$\omega_{max} = \omega(0) = \frac{2G}{3K} \equiv \omega_0 \tag{18}$$

Постоянные материала выражаем через ω_0 следующими связами:

$$\nu = \frac{1-\omega_0}{2+\omega_0}, \qquad 2\mu = 2G = 3K\omega_0$$

$$E = 9K\frac{\omega_0}{2+\omega_0}, \qquad \lambda = K(1-\omega_0) \tag{19}$$

$$\frac{1-\nu^2}{E} = \frac{1}{3K}\cdot\frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{1+2\omega_0}{2+\omega_0}, \text{ итд.}$$

Обозначим $w = w(t)$ искаемое обобщенное перемещение вязко-упругого тела. Соответствующее обобщенное перемещение упругого тела обозначим с w^e:

$$w^e = \overset{e}{w}_0 + \omega_0 \overset{e}{w}_1 + \omega_0^{-1} \overset{e}{w}_{-1} + \sum_n \frac{\overset{e}{w}_{\beta n}}{1 + \beta_n \omega_0} \tag{20}$$

с тем что $\overset{e}{w}_0$-часть упругого решения которая не зависит от постоянных материала, $\overset{e}{w}_1$-часть решения к кому ω_0 стоит линейно, $\overset{e}{w}_{-1}$-часть решения к кому стоит ω_0^{-1} итд.

Решение вязко-упругой задачи представляем теперь прямо через следующие интеграли конволуционого типа:

$$w(t) = w_0 + \int_0^t w(t-\tau)\, dN_1(\tau) + \int_0^t \pi(t-\tau)\, dN_{-1}(\tau) + \sum_n \int_0^t g_{n\beta}(t-\tau)\, dw_n(\tau) \tag{21}$$

где $N_1(\tau)$ и $N_{-1}(\tau)$ эти члени в выражениямии $\overset{e}{w}_1$ и $\overset{e}{w}_{-1}$ котори зависят от времени где $g_{n\beta}(t)$ оригинал оператора

$$\overset{*}{g}_{\beta n}(p) = \frac{1}{1 + \beta_n \omega^*(p)} = \frac{3K}{3K + \beta_n R^*(p)} = \frac{3K\Pi(p)}{\beta_n + 3K\Pi^*(p)} \tag{22}$$

Таким образом вопрос возможности инверсии приведен к выражению типа (22) для которое оригинал находим на основе таблиц преобразования Лапласа.

При решению задач теории упругости встречаються различние упругие константи из которых только две независимие. Выражая упругие костанти через ω_0 упругое решение надо представит в форме (20) а затем указаним путем определит вязко-упругое решение.

В работе [3] представлено упругое решение в форме

$$w^e(\xi, \eta) = \frac{q_0 a^4}{D} W(\eta)\varphi(\xi) \tag{23}$$

и дано решение для прямоугольную пластинку при равномерной нагрузке вариационим методом В. З. Власова.

Представим решение (23) в форме (20). Как $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ будет

$$w^e(\xi, \eta) = \frac{12 a^4 q_0 (1-\nu^2)}{h^3 E} W(\eta)\varphi(\xi) \tag{24}$$

или

$$w^e(\xi, \eta) = \alpha q_0 \frac{1}{3K} \frac{1}{\omega_0} \frac{1 + 2\omega_0}{2 + \omega_0} W(\eta)\varphi(\xi) \tag{25}$$

где $\alpha = \dfrac{12 a^4}{h^3}$. Выражение (25) преобразуем к форме (20) и получаем

$$w^e(\xi, \eta) = \frac{\alpha}{3K} q_0 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0} + \frac{3}{4} \frac{1}{1 + \dfrac{\omega_0}{2}} \right) W(\eta)\varphi(\xi). \tag{26}$$

Ведём теперь перестановки

$$q_0 \frac{1}{\omega_0} \quad \text{с} \quad 3K \int_0^t \Pi(t-\tau)\, dq_0(\tau)$$

(27)

$$q_0 \frac{1}{1+\frac{\omega_0}{2}} \quad \text{с} \quad \int_0^t g_{1/2}(t-\tau)\, dq_0(\tau)$$

в (26) есть

$$w_{-1}^e = \frac{\alpha q_0}{3K} \frac{1}{2} W(\eta)\varphi(\xi)$$

$$w_{1/2}^e \frac{\alpha q_0}{3K} \frac{3}{4} W(\eta)\varphi(\xi), \quad N_{-1} = q_0(t)$$

$q_{1/2}(t)$ определяеться инверссиом оператора $g_{1/2}^* = \dfrac{6K}{6K+R^*}$.

На основе (20) и (21) получаем вязко-упругое решение в форме

$$w(\xi, \eta, t) = \left\{ \frac{\alpha}{2} \int_0^t \Pi(t-\tau)\, dq_0(\tau) + \frac{\alpha}{4K} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau)\, dq_0(\tau) \right\} W(\eta)\varphi(\xi) \tag{28}$$

в котором функция $\Pi(t)$ для выбраного материала известна а функцию $g^1/_2(t)$ надо определит как оригинал оператора

$$g_{1/2}^*(p) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\omega^*(p)} = \frac{3K}{3K+\frac{1}{2}R^*(p)}. \tag{29}$$

Здесь функция $R(t)$ тоже заранее задана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, *Основы математической теории термо-вязко-упругости*, Москва 1970.

[2] П. М. Огибалов, В. А. Ломакин, Б. П. Кишкин, *Механика полимеров*, Москва. 1970.

[3] Д. Л. Медич, *Расчет прямоугольнных пластинок вариационным методом В. З. Власова, при различных граничных условях*, Теориjска и примењена механика 2 Београд 1976.

THE SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS FOR BENDING OF VISCOELASTIC PLATES

Dušan L. Medić

Summary

In this paper solutions are given for the bending of viscoelastic plates, by use of Laplace transformations and of Ilyushin's method of approximation. In a first case a Cenner's model of material is taken, and in a second one use is made of the elastic solution obtained by the Vlassov variational method for a viscoelastic medium.

РЕШЕЊА НЕКИХ ЗАДАТАКА САВИЈАЊА ТАНКИХ ПЛОЧА ОД ВИСОКОЕЛАСТИЧНОГ МАТЕРИЈАЛА

Душан Л. Медић

Резиме

У раду се дају решења савијања високоеластичних плоча применом Лапласове трансформације и метода апроксимације Иљушина. У првом случају узет је Ценер-ов модел материјала, а у другом се користи еластично решење добијемо варијационим методом Власова за добијање вискоеластичног решења.

Адреса аутора: Душан Медич, Рудо 1/214
11050 Београд