TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 4, pp. 115—123, 1978.

THÉORIE ET APPLICATIONS DE L'ÉLASTICITÉ EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE*

Gérard A. Maugin

1. Introduction

A l'origine la mécanique des milieux continus relativistes s'est développée selon deux directions essentielles de manière à généraliser des concepts classiques (ceux des petites vitesses et des champs de gravitation faibles): (a) l'étude des fluides parfaits, dont le schéma est bien adapté aux applications de la relativité générale à grande échelle (par exemple, en cosmologie) et, plus récemment, à l'étude de phénomènes plus localisés spatialement, tels l'équilibre des objets stellaires „fluides" et l'écroulement gravitationnel inévitable qui résulte dans certaines conditions de la solution d'Einstein-Schwarzschild; (*b*) l'étude des milieux élastiques en relativité restreinte, attaquée dès les années 1909—1911 par Born, Herglotz, etc, qui implique des questions conceptuelles délicates, telle la définition relativiste du mouvement de corps rigide. Cependant, les années récentes ont été les témoins d'un renouveau et d'une croissance rapide de l'élasticité, et plus généralement, de la mécanique des milieux continus, relativistes. Ceci résulte non seulement de la volonté des mécaniciens théoriciens d'étendre leur domaine d'étude, mais aussi du fait que tant physiciens mathématiciens qu'astrophysiciens impliqués dans les expériences de relativité générale (détecteur „élastiques" d'ondes gravitationnelles du type de Weber [1] ou dans l'étude d'objets stellaires au comportement curieux (étoiles „solides" [2]), ont reconnu l'utilité d'une étude de comportements matériels variés. D'où l'apparition, conséquence première d'un intérêt théorique visant à la généralité, puis motivée par les applications, de théories de l'élasticité relativiste et d'autres généralisations visant à tenir compte de couplages plus complexes (électroélasticité et magnétoélasticité). Les travaux récents dans ce domaine ont été examinés dans les références [3]—[6].

2. Théorie des déformations d'un milieu continu relativiste

Alors que la notion de déplacement infinitésimal est à la base de l'élasticité linéaire classique, il est clair que cette notion est étrangère de prime abord au cadre de la relativité générale (variété courbe). Il convient dès lors, comme en mécanique classique [7], de retourner à des notions plus primitives. De telles notions ont été énoncées en [3] et raffinées en [5] et [8].

Soit $M=(V^4, g_{\alpha\beta})$ — $\alpha, \beta=1, 2, 3, 4$; indice 4 de genre temps; $g_{\alpha\beta}$ de signature $(+, +, +, -)$ — un espace-temps courbe. Il est admis que le

* Conférence donnée le 12 octobre 1977 à l'Institut Mathématique, Belgrade.

mouvement relativiste d'un milieu continu peut être décrit soit à l'aide d'une *projection canonique différentiable* $\mathcal{P}:\mathcal{T}[B]\to\mathcal{M}$, soit à l'aide d'une congruence de lignes d'univers $\mathcal{C}(\underset{\sim}{X}): x=\mathcal{X}(\underset{\sim}{X},\tau)$, $\underset{\sim}{X}\in B\subset\mathcal{M}$, $\tau\in\mathbf{R}\cdot\mathcal{T}[B]$ est le tube ouvert de M qui est engendré par le corps matériel B. Ce dernier est une région ouverte, simplement connexe de $\mathcal{M}=(V^3, G_{KL})$ — $K, L=1, 2, 3$ — la variété tridimensionnelle qui décrit le continuum matériel et est équippée d'une métrique G_{KL} et de cartes locales X^K. Les constituants de $\mathcal{M}$ sont les „particules" materielles $\underset{\sim}{X}$ de temps propre τ. Donc $\mathcal{P}: X^K=X^K(x^\alpha)$, $\tau=\tau(x^\alpha)$ et $\mathcal{C}(\underset{\sim}{X}): x^\alpha=\mathcal{X}^\alpha(X^K,\tau)\cdot G_{KL}$ est une métrique rigide de référence de sorte qu'a priori $DG_{KL}=0$ où $D\equiv u^\alpha\nabla_\alpha\cdot u^\alpha$ est la 4-vitesse d'univers de $\underset{\sim}{X}$ telle que $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta+1=0$. Définissant premièrement le gradient inverse du mouvement de X par $X^K_\alpha\equiv\partial_\alpha X^K$, puis un invariant spatio-temporel (mais champ tensoriel sur $\mathcal{M}$) $\overset{-1}{C}{}^{KL}\equiv g^{\alpha\beta}X^K_\alpha X^L_\beta=P^{\alpha\beta}X^K_\alpha X^L_\beta$ — où $P^{\alpha}_{\cdot\beta}=\delta^\alpha_\beta+u^\alpha u_\beta$ est le projecteur spatial dans M dont l'action est notée par le symbole $\perp$ (ici $c=1$) — puis le réciproque C_{KL} de $\overset{-1}{C}{}^{KL}$ sur $\mathcal{M}$, nous avons finalement le tenseur *spatial* des déformations *finies* $\mathcal{E}_{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{2}(P_{\alpha\beta}-G_{\alpha\beta})=\frac{1}{2}(C_{KL}-G_{KL})X^K_\alpha X^L_\beta$, où $G_{\alpha\beta}$ est l'image de G_{KL} par $\mathcal{P}$. On dit que l'objet géométrique spatio-temporel, défini sur M, $\underset{\sim}{A}$ est *spatial* si et seulement si $\underset{\sim}{A}\equiv\underset{\sim}{A}_\perp$. Alors $\mathcal{P}$ fournit une correspondance *canonique* entre les objets spatiaux sur M et les champs de tenseurs *matériels* sur $\mathcal{M}$, ainsi que la définition canonique suivante d'une dérivée temporelle:

$$(\underset{u}{\mathcal{L}}\underset{\sim}{A})_\perp(\underset{\sim}{x}\in\mathcal{C}(\underset{\sim}{X}))=\mathcal{P}^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}(\underset{\sim}{A})\right](\underset{\sim}{x})\qquad\text{pour } \underset{\sim}{A}\equiv\underset{\sim}{A}_\perp,$$

où $\underset{u}{\mathcal{L}}$ indique la dérivée de Lie suivant le champ de 4-vitesse. Par exemple, $\underset{u}{\mathcal{L}}G_{\alpha\beta}=0$ et $\underset{u}{\mathcal{L}}\mathcal{E}_{\alpha\beta}=d_{\alpha\beta}\equiv[\nabla_{(\alpha}u_{\beta)}]_\perp$, le tenseur relativiste des taux de déformation. La définition *locale* de Born et Herglotz du mouvement de corps rigide est alors donnée soit sur $\mathcal{M}$ par $\frac{\partial}{\partial\tau}C_{KL}(\underset{\sim}{X},\tau)=0$, $\forall\tau$ pour $\underset{\sim}{X}$ fixé, ou bien sur M par $d_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{x})=0$, $\forall\,\underset{\sim}{x}\in\mathcal{C}(\underset{\sim}{X})$. $\overset{-1}{C}{}^{KL}$ est le tenseur relativiste de Piola: il est l'image de la métrique $g^{\alpha\beta}$ par la projection de l'espace-temps sur sa congruence. $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ est le tenseur relativiste des déformations d'Euler. On remarque, que $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ peut varier conséquemment à des variations indépendantes de la ligne d'univers $\mathcal{C}(\underset{\sim}{X})$ et de la métrique d'espace-temps. Il s'ensuit la relation importante [9]

$$(\delta\mathcal{E}_{\alpha\beta})_\perp=\frac{1}{2}\{h_{\alpha\beta}+P^{;\mu}_{\lambda}(0)\,[(P_{\mu\beta}(0)-2\,\mathcal{E}_{\mu\beta}(0))\,(\nabla_\alpha\xi^\lambda)_\perp+ \tag{2.1}$$
$$+(P_{\alpha\mu}(0)-2\,\mathcal{E}_{\alpha\mu}(0)\,(\nabla_\beta\xi^\lambda)_\perp]\},$$

où $h_{\alpha\beta}=(\delta P_{\alpha\beta})_\perp$, $\xi^\lambda=\delta\mathcal{X}^\lambda$, et (0) indique les valeurs initiales déduites de $g_{\alpha\beta}(0)$ et $u^\alpha(0)$. Si la déformation initiale est nulle (2,1) se réduit à

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\equiv(\delta\mathcal{E}_{\alpha\beta})_\perp=\frac{1}{2}[h_{\alpha\beta}+\nabla_\alpha\xi_\beta+\nabla_\beta\xi_\alpha]_\perp, \tag{2.2}$$

où la projection est effectuée à l'aide de $P_{\alpha\beta}(0)$. Ces résultats mettent en évidence deux caractéristiques essentielles de la mécanique relativiste des milieux continus: (*i*) la considération initiale de déformations *finies* et (*ii*) l'étude de perturbations superposées à un état initial de déformation finie (et par suite de contraintes initiales en général non nulles) qui correspond à une solution (si elle existe et est unique) des équations du champ (Einstein et équations de conservation). Clairement, le résultat (2.2) peut être employé pour l'étude de la réponse de détecteurs „élastiques" d'ondes gravitationnelles [4], [10] qui peuvent être considérés comme des corps d'épreuve placés dans un champ initial pratiquement minkowskien et dépourvu de contraintes, et où seulement des effets infimes peuvent être espérés.

3. Systèmes thermoélastiques en relativité générale

Considérons un milieu décrit, en l'absence de conduction thermique, spin et champs électromagnétiques, par le tenseur d'impulsion-énergie de décomposition canonique $T^{\alpha\beta}=\rho(1+\varepsilon)u^\alpha u^\beta - t^{\alpha\beta}$, où ρ est la densité propre de matière en $(\underset{\sim}{X}, \tau)$, ε est l'énergie interne propre spécifique, et $t^{\alpha\beta}=t^{\beta\alpha}=(t^{\alpha\beta})_\perp$ est le tenseur *spatial* des contraintes. Soient θ, η et $\psi=\varepsilon-\eta\theta$ respectivement la température thermodynamique propre en $(\underset{\sim}{X}, \tau)$ $(\theta>0,\ \inf\theta=0)$, l'entropie propre spécifique et l'énergie libre spécifique. Alors une définition naturelle pour des milieux thermoélastiques relativistes est donnée par une dépendance fonctionnelle de la forme[1)]

$$(3.1)\qquad (\psi,\ \eta,\ t^{\alpha\beta}) = \text{fonctions au sens usuel de } \left(X^K_\alpha,\ \theta\right).$$

Les variables dépendantes et indépendantes sont définies au même point $x\in M$ ou, d'une manière équivalente, pour le même quadruplet (X^K, τ) [pas d'effets héréditaires et non locaux]. (3.1) représente un cas particulier de milieux dits *simples* [13] pour lequel le domaine d'influence spatio-temporel a été réduit au point x lui-même. Toutefois, si l'on utilise un argument thermodynamique — l'équation $u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta}=0$ — et de plus requiert que la réponse du matériau soit indépendante de l'observateur (une invariance de forme appelée *objetivité relativiste* ou *indifférence matérielle* [14] qui, en relativité générale, est une invariance *spinorielle* ou, en d'autres mots, une invariance locale par la composante rotationnelle de $L^\uparrow_+$, soit $SO(3)$ dans l'hyperplan spatial tangent en $x\in\mathscr{C}(\underset{\sim}{X})$), alors on peut montrer que:

(i) pour des corps thermoélastiques *anisotropes*:

$$(3.2)\qquad t_{\alpha\beta} = -2\rho\frac{\partial\psi}{\partial \overset{-1}{C}{}^{KL}}X^K_\alpha X^L_\beta,\qquad \eta=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad \psi=\psi(\overset{-1}{C}{}^{KL},\ \theta),$$

(ii) pour des corps thermoélastiques *isotropes* (après transformation partielle de Legendre [9]):

$$(3.3)\qquad t^{\alpha\beta}=\rho\left(g_0 P^{\alpha\beta}+g_1\mathfrak{S}^{\alpha\beta}+g_2\mathfrak{S}^{\alpha}_{\cdot\gamma}\mathfrak{S}^{\gamma\beta}\right),\qquad \theta=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta},\qquad \varepsilon=\varepsilon(I_k,\ \eta),$$

---

1) Les milieux relativistes *hypoélastiques* sont (une classe de) des milieux pour lesquels des taux temporels appropriés des arguments remplacent les arguments eux-mêmes dans les deux membres de (3.1). Le modèle original de Synge [11] participe de ce type de formulation, bien que des dérivées temporelles convectives et les projecteurs P doivent y remplacer D et g de manière à le rendre *objectif* au sens précisé plus haut; voir [5], [12].

où les fonctions de réponse $g_i(I_k, \eta)$ sont des fonctions bien définies des invariants spatio-temporels $I_k \equiv \text{trace } \mathcal{E}^k$, $k=1, 2, 3$, exprimées au moyen des dérivées $\partial\varepsilon/\partial I_k$. Les équations (3.3) sont *exactes* en ceci qu'elles ne supposent rien quant à l'amplitude des déformations et des contraintes et la fonction ε peut être très générale, toutefois restreinte par des conditions de régularité, des conditions de stabilité élastique et la causalité relativiste (qu'une étude de propagation d'ondes doit mettre en évidence). Dans le cas de $(3.2)_1$, l'anisotropie est représentée par l'invariance de forme de ψ par un sous groupe de 0 (3), l'étude étant faite dans l'espace local tangent en $\underset{\sim}{X} \in \mathcal{M}$, ceci résulte du fait que la *symétrie matérielle* est originellement une notion cristallographique, donc tridimensionnelle et euclidienne. Comme c'est le cas en élasticité non linéaire classique, le matériau décrit par (3.3) est *idéallement isotrope* (c'est-à-dire, isotrope par rapport à une configuration de référence idéallement non déformée, celle décrite par G_{KL}). Cependant, si une linéarisation est faite autour d'un état initiallement déformé, $\mathfrak{M}_0$, alors les équations constitutives „aux perturbations" seront équivalentes à celles d'un matériau qui aurait pour symétrie matérielle celle induite par la déformation initiale. Ceci se produit lorsque l'on évalue la variation spatiale de $t^{\alpha\beta}$ à partir de (3.3) en toute généralité [9]:

$$(3.4) \qquad (\delta t^{\alpha\beta})_\perp = C_\theta^{\alpha\beta\mu\nu}(\mathfrak{M}_0)(\delta\mathcal{E}_{\mu\nu})_\perp + A_\theta^{\alpha\beta\mu\nu}(\mathfrak{M}_0)\,h_{\mu\nu} - \theta^{\alpha\beta}(\mathfrak{M}_0)\,\delta\theta,$$

si l'on utilise ψ et θ comme variables thermodynamiques. Les effets gravitationnels et thermiques sont ainsi mis en évidence. Les coefficients tensoriels spatiaux présents dans (3.4) ont des expressions compliquées sauf dans le cas où $\mathfrak{M}_0$ est un état non déformé, auquel cas leur connaissance se réduit à celle de $P^{\alpha\beta}(0)$ et de trois scalaires caractéristiques du matériau:

$$\tilde{\lambda} = (\partial^2\psi/\partial I_1^2)(\mathfrak{M}_0), \qquad \tilde{\mu} = (\partial\psi/\partial I_2)(\mathfrak{M}_0) \text{ et } (K = \partial^2\psi/\partial\theta\,\partial I_1)(\mathfrak{M}_0).$$

Dans ce dernier cas $A_\theta^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv 0$; $(\delta\mathcal{E}_{\mu\nu})_\perp$ est alors donné par (2.2). Dans le cas général $C_\theta^{\alpha\beta\mu\nu}$ est le tenseur spatial des *élasticités apparentes* (à température et métrique d'espace-temps constantes) et les expressions (3.4) et (2.1) permettent la considération de perturbations isothermes et isentropiques et justifient: (a) les équations du type de Hooke utilisées dans l'examen des détecteurs „élastiques" d'ondes gravitationnelles et (b) les équations utilisées à l'approximation post-newtonienne dans l'examen de l'équilibre d'une sphère élastique dans son propre champ de gravitation [15]. Les équations „*universelles*" (3.3) présentent cependant un grand intérêt car elles permettent l'établissement de résultats remarquables (§ 4) au cas où l'équation d'état $\varepsilon(I_k, \eta)$ n'est pas précisement connue (ce qui est le cas pour la croûte des étoiles solides).

4. Propagation des discontinuités faibles

La raison pour laquelle nous devons considérer des équations générales de la forme (3.3) peut se justifier comme suit. Si nous étudions la propagation de discontinuités faibles (ou infinitésimales au sens de Lichnerowicz [16]) pour un modèle simple de corps hypoélastique précontraint et d'équations constitutives différentielles, par exemple du type [12] — [13]

$$(\underset{u}{\mathcal{L}}\, t_{\alpha\beta})_\perp + t_{\alpha\beta}\, d^{\mu}_{\cdot\mu} = \rho\,(\tilde{\lambda}\, d^{\mu}_{\cdot\mu} P_{\alpha\beta} + 2\tilde{\mu}\, d_{\alpha\beta}),$$

où $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont deux scalaires invariants, ou pour un matériau élastique sous l'hypothèse des petites déformations (soit $|\underset{\sim}{\mathcal{E}}| \ll 1$), alors le résultat suivant s'ensuit. Soit $W(x^\alpha)=0$ un front d'onde de genre temps dans M. Posons $l_\alpha = \partial_\alpha W$, $\lambda_\alpha = (P^{\mu\sigma} l_\mu l_\sigma)^{-1/2} P_{\alpha}^{\cdot\beta} l_\beta$, et $\delta u = \lambda_\alpha \delta u^\alpha$ la composante longitudinale de la discontinuité infinitésimale δu^α de u^α. Alors on montre que pour des fronts d'onde longitudinaux *principaux*[2] d'équation d'onde $P(\underset{\sim}{l}) = H^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0$, δu satisfait, le long des rayons (bi-caractéristiques) associés, à l'équation d'évolution [12]

$$D_R(\delta u) - A(G_2^W, \mathfrak{M}_0)\,\delta u - B(U_{II}, \mathfrak{M}_0)(\delta u)^2 = 0, \tag{4.1}$$

où $D_R \equiv \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial P(\underset{\sim}{l})}{\partial l_\beta} \nabla_\beta$, et A et B sont deux fonctions scalaires qui dépendent pour l'une de la géométrie locale de W au second ordre, G_2^W, et pour l'autre de la vitesse $U_\parallel$ (exprimée en termes d'élasticités apparentes) et de l'état initial $\mathfrak{M}_0$. Si ce dernier et W sont tels que $A<0$ et $B<0$, alors (4.1) montre qu'un front d'onde de compression ($\delta u<0$) se termine en un choc $|\delta u| \mapsto \infty$) en un temps propre caractéristique $\overset{*}{\tau}_R = |A|^{-1} \log[\delta u^0/(\delta u^0 - (A/B))]$ où $\delta u^0 \equiv \equiv |\delta u(0)|$. Ceci résulte de la nature hyqerbolique quasilinéaire du système d'équations étudié. Un résultat similaire est valable pour les ondes transversales. La possibilité de formation de chocs indique que nous avons besoin d'une théorie *thermodynamique exacte*, donc (3.3), sans hypothèses concernant l'amplitude des déformations. Si nous utilisons (3.3) pour étudier la phénomène de propagation nous arrivons à une série de résultats qui sont indépendants de l'expression exacte de $\varepsilon(I_k, \eta)$ et qui peuvent donc intéresser la „sismologie" des étoiles solides. Par exemple, si le matériau n'est pas incompressible, soit si dét $|P^{\alpha}_{\cdot\beta} - 2\,\mathcal{E}^{\alpha}_{\cdot\beta}| \neq$cte, alors deux ondes principales transversales, de vitesses en général distinctes, et une onde principale longitudinale peuvent se propager indépendamment. La valeur des vitesses ($U \in]\,0, 1[$; ondes d'entropie ou matérielles et ondes gravitationnelles sont ici exclues) peut être exprimée exactement en fonction des trois fonctions de réponse g_i et des élongations principales correspondant à $\mathfrak{M}_0$. L'onde transversale d'amplitude parallèle à l'axe de plus grande contrainte transversale initiale se propage plus vite que les autres. De plus, au cas où la propagation prend place dans un état de haute pression hydrostatique p_0 les résultats suivants sont obtenus: il existe une relation *universelle* entre la vitesse (simple) $U_\parallel$ et la vitesse (double) $U_\perp$, des ondes isentropiques longitudinales et transversales et la vitesse du son d'un fluide relativiste parfait qui *aurait* une loi de compression correspondant à l'état initial; plus exactement [9]

$$U_\parallel^2 = \frac{4}{3} U_\perp^2 + a^2(\mathfrak{M}_0), \qquad a^2(\mathfrak{M}_0) \equiv f_0^{-1}(\partial p_0/\partial \rho)(\mathfrak{M}_0) \tag{4.2}$$

où f_0 est *l'indice* (au sens de Lichnerowicz) de ce fluide parfait, soit $f_0 = 1 + \varepsilon(\mathfrak{M}_0) + (p_0/\rho(\mathfrak{M}_0))$. Si, maintenant, nous considérons une expression

---

[2] On appelle ondes *principales* celles qui se propagent selon l'une des directions principales du tenseur spatial des contraintes initiales.

plausible pour ε, soit (en l'absence de couplages thermoélastiques) $\varepsilon = \frac{1}{2} \tilde{\lambda} I_1^2 + \tilde{\mu} I_2$, alors des expressions définies peuvent être trouvées pour $U_{\parallel}$, $U_{\perp}$ et $a^2(\mathfrak{M}_0)$. Par exemple, si ν est l'élongation isotrope entre l'état idéallement non déformé et l'état $\mathfrak{M}_0$ de compression hydrostatique p_0, (4.2) nous permet de montrer que [9]

$$a^2(\mathfrak{M}_0) = B(5 - 4\nu^2)/\rho_0 f_0 \nu^4, \tag{4.3}$$

où $B \equiv \rho_0 (3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})/3$ est le module d'élasticité à la compression en $\mathfrak{M}_0$, f_0 pouvant s'exprimer entièrement en fonction de p_0, ρ_0, ν, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$.

5. Equations gouvernant les détecteurs „élastiques" d'ondes gravitationnelles

Ce sont les équations qui généralisent, pour un bloc élastique considéré comme un corps d'épreuve répondant à l'influence d'une perturbation gravitationnelle incidente, les équations de déviation géodésique pour un système de deux particules d'épreuve ponctuelles. D'une manière covariante ces équations s'écrivent [4]: $\{\nabla_{(\alpha}(P_{\beta)\mu} \nabla_\varphi T^{\mu\varphi})\}_\perp = 0$. La double dérivation covariante permet l'introduction des composantes les plus intéressantes du tenseur riemannien de courbure de l'espace-temps, soit $(R_{\mu\lambda\sigma\varphi} u^\mu u^\varphi)_\perp$. Pour un état initial pratiquement dépourvu de contraintes, (2.2) s'applique et il ne reste que la première contribution de membre de droite dans (3.4). Dans un repère cartésien local ($i, j = 1, 2, 3$), les équations rappelées ci-dessus, pour une direction de propagation λ_k, z étant une coordonnée scalaire, conduisent aux six équations

$$\rho\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{kp}}{\partial t^2} - R_{4\,kp\,4}\right) = \lambda_{(k} C_{p)\,mij} \lambda_m \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial \mathfrak{z}^2}. \tag{5.1}$$

Les composantes $R_{4\,kp\,4}$ sont calculées à partir de la perturbation $h_{\alpha\beta}$. Au cas où une étude thermodynamique est faite de sorte que les effets visqueux dans le corps isotrope sont pris en compte, nous avons montré [18] pour un modèle simple unidimensionnel que (5.1) doit être remplacée par

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - R_{4\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}\,4} = c_E^2\left(1 + T\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathfrak{z}^2}, \tag{5.2}$$

où $\varepsilon = \frac{1}{2} h_{zz} + \xi_{z,z} \cdot c_E$ est une vitesse élastique (adimensionnelle) et T est un temps de relaxation. Cette équation a été exploitée par Gambini [20] et d'autres auteurs pour des détecteurs de formes variées. Jointes aux conditions aux limites, (5.1) et (5.2) conduisent à un problème aux valeurs propres de vibrations forcées qui peut être résolu par des techniques classiques. L'utilisation de l'effet piézoélectrique pour enregistrer le signal infime qui est esperé requiert une justification plus complexe que celle présentée par Weber [1] (Voir § 6 ci-dessous).

6. Electrodynamique des systèmes élastiques en relativité générale

L'utilisation de l'effet piézoélectrique (électroélasticité) dans les détecteurs d'ondes gravitationnelles et le fait que des champs magnétiques extrêmement intenses sont présents dans les corps astrophysiques solides d'intérêt (magnétoélasticité) conduisent à considérer une véritable électrodynamique des milieux continus en relativité générale. Les équations correspondantes peuvent être déduites d'un principe variationnel (en l'absence de processus dissipatifs [3]) ou, d'une manière plus logico-déductive, en partant des lois de conservation covariantes premières dans lesquelles les termes de source (par exemple, ceux obtenus par de Groot et Suttorp [22], mais reformulés en relativité générale) dûs au champ électromagnétique dans la matière polarisée et magnétisée sont pris en compte et en utilisant un argument de thermodynamique pour déduire un ensemble adéquat de lois de comportement pour la matière élastique polarisée et magnétisée. Ceci a été fait en toute généralité (y compris dans le cas des très hautes pressions) dans les références [23]. Dans ce cas, des entités électromagnétiques adéquates doivent être ajoutées dans les *deux* membres de l'équation générique (3.1). Par exemple, dans le cas *électrostatique* des corps *diélectriques anisotropes*, il est possible sous des hypothèses simplificatrices[3)] de montrer que (5.1) garde la même forme mais que le tenseur C_{pmij} est remplacé par le tenseur $\overline{C}_{pmij}$ des élasticités durcies par effet piézoélectrique, dont les composantes spatio-temporelles spatiales sont données par

$$\overline{C}^{\beta\alpha\gamma\delta} = C_{\theta}^{\beta\alpha\gamma\delta}(0) + [\lambda_{\mu}\, \tilde{\varepsilon}^{\mu\varphi}(0)\, \lambda_{\varphi}]^{-1}\, \lambda_{\pi}\, e^{\pi\beta\alpha}(0)\, \lambda_{\sigma}\, e^{\sigma\gamma\delta}(0), \tag{6.1}$$

où $C_{\theta}^{\beta\alpha\gamma\delta}$ est le tenseur introduit en (3.4), $\tilde{\varepsilon}^{\mu\varphi}$ est le tenseur de diélectricité, $e^{\pi\beta\alpha}$ est le tenseur de piézoélectricité, tous exprimés en l'état initial (0) dépourvu de déformation et de polarisation électrique, et λ_{μ} est le 4-vecteur *spatial* de propagation. Alors nous devons résoudre un nouveau (et complexe) problème aux valeurs propres pour le détecteur piézoélectrique. Une possibillité intéressante apparaît si le diélectrique considéré est *ferroélectrique* ou *pyroélectrique* car, alors, la linéarisation doit être effectuée autour d'un état initial non déformé mais déjà polarisé électriquement (il existe une polarisation électrique spontanée $\underset{\sim}{P}^{s}$). Nous avons montré dans ce dernier cas [24] que la forme linéarisée de l'équation covariante de Gauss prend la forme $\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{D}+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{P}^{s}\cdot\underset{\sim}{\nabla})(\mathrm{tr}\, h)=0$, dans un repère cartésien local, h étant la perturbation introduite plus haut. On voit que si $\underset{\sim}{P}^{s}$ n'est pas orthogonal à la direction de propagation, $h_{\alpha\beta}$ contribuera comme source, non seulement dans l'équation du mouvement du type (5.1), mais aussi dans la loi de Gauss. L'analyse du problème devient alors complexe car l'équation qui généralise (5.1) contient dès lors la force pondéromotrice (qui n'est plus du second ordre en raison de $\underset{\sim}{P}^{s}$) et les équations constitutives diélectriques se compliquent fortement.

---

3) L'obtention d'une équation du type (5.1) requiert une hypothèse de phénomènes quasi-électrostatiques, mais en formalisme covariant! Ceci peut être justifié en considérant un schéma de perturbation des équations *covariantes* de Maxwell dans la matière, ce qui permet 'introduction [24] d'un potential scalaire „é lectrostatique", d'où la réduction du problème à la solution d'une équation du type (5.5) avec (6.1) sans autre référence à l'équation de Gauss (une technique classique dans l'ultrasonique des piézoélectriques).

En ce qui concerne la *magnétoélasticité* des objets stellaires denses, une étude de propagation d'ondes similaire à celle faite en mécanique classique [25] peut être effectuée, qui généralise les résultats du § 4, mais qui apparaît être beaucoup plus compliquée que son équivalent magnétohydrodynamique [16] en raison de l'expression générale du nouveau tenseur des contraintes. Des résultats sensibles peuvent néammoins être obtenus, tels que la classification des vitesses magnétoélastiques des ondes infinitésimales et une discussion thermodynamique des chocs magnétoélastiques basée sur une fonction d'Hugoniot adéquate. Ceci est un domaine de recherche difficile. Son intérêt pour l'astrophysique des étoiles „solides" dans leur intense champ électromagnétique devrait récompenser les efforts nécessités.

REFERENCES

[1] J. Weber, *General Relativity and Gravitational Waves*, Interscience, New York (1961), Chap. 8.

[2] M. Ruderman, „Solid Stars", *Scientific American*, pp. 24—31, Febr. 1971; „Pulsars: Structure and Dynamics", *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 10. pp. 427—476, Ann. Res. Inc., Palo Alto, Ca., (1972).

[3] G. A. Maugin, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, *A15*, pp. 275—302 (1971).

[4] G. A. Maugin, *Gen. Relat. Gravitat. J.*, *4*, pp. 241—272 (1973).

[5] G. A. Maugin, Formulation des lois de comportement en mécanique relativiste des milieux continus" (miméographié, 164 p.) Univ Paris VI (1975).

[6] J. Ehlers, in: *General Relativity and Gravitation* (GR7), Ed. G. Shaviv, and J. Rosen, pp. 213—232, Halsted-Wiley, Jerusalem, New York (1975).

[7] C. Truesdell and W. Noll, *Handbuch der Physik*, Bd. III/3, Ed. S. flugge, Springer-Verlag, Berlin (1965).

[8] B. Carter and H. Quintana, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, *A 331*, pp. 57—83 (1972).

[9] G. A. Maugin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, *284 A*, pp. 719—722 (1977); „Exact Relativistic Theory of Wave Propagation in Prestressed Nonlinear Elastic Solids" *Ann. Inst. H. Poincaré*, *A28*, 155—175 (1978); *Proc. 8th Intern. Conf. on General Relativity* (Waterloo, Canada, Aug. 1977), pp. 246—247; *Proc. Symp. Nonlinear Deformation Waves* (Tallinn, USSR, Jan. 1978), Est. Acad. Sciences, Tallinn (1978); *Gen. Relat. Gravitat. J.*,

[10] A. Papapetrou, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, *A16*, pp. 63—78 (1972).

[11] J. L. Synge, *Math. Zeit.*, *72*, pp. 82—87 (1959).

[12] G. A. Maugin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, *284 A*, pp. 393—396 (1977); *Commun. Math. Phus.*, *53*, pp. 233—256 (1977).

[13] G. A. Maugin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, *275A*, pp. 405—408 (1972).

[14] G. A. Maugin, in: *Ondes et Radiations gravitationnnelles* (Proc. Coll. Intern. C. N. R. S, Paris, 1973), pp. 331—338, Ed. CNRS, Paris (1974).

[15] C. Cattaneo et A. Gerardi, *Rend. Mat* (6)., *8*, pp. 187—200 (1975).

[16] A. Lichnerowicz, in: *Relativistic Fluid Dynamics*, Ed. C. Cattaneo, pp. 87—204, Cremonese, Roma (1971).

[17[B. Carter, *Phys. Rev.*, *D7*, pp. 1590—1593 (1973).

[18] F. J. Dyson, *Astrophys. Jl.*, *156*, p. 529 (1969).

[19] G. A. Maugin, *Gen. Relat. Gravitat. J.*, *5*, pp. 13—23 (1974).

[20] R. Gambini, *Ann. Inst. H. Poincaré*, *A23*, pp. 389—406 (1975).

[21] G. Pizella, *Riv. Nuovo Cimento*' *5*, p. 369 (1975; C. Mache *et al.*, *Int. Jl. Theoret. Phys.*, *13*, p. 401 (1975).

[22] S. R. de Groot and L. G. Suttorp, *Physica*, *37*, pp. 284, 297; *39*, pp. 28, 41, 61, 77, 84 (1968).

[23] G. A. M a u g i n, „On the Covariant Equations of the Relativistic Electrodynamics of Continua, Parts I, II, III, IV", *Jl. Math. Phys.* (USA), *19*, 1198, 1206, 1212, 1220 1978).

[24] G. A. M a u g i n, „On Maxwell's Covariant Equations in Matter", *Jl. Franklin Institute* (USA), *305*, pp. 11—26 (1978).

[25] J. B a z e r, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, *25*, pp. 207—237 (1971); J. B a z e r and W. B. E r i c k s o n, *Arch. Rat. Mech. Anal.* *55*, pp. 124—192 (1974).

[26] G. A. M a u g i n, „Infinitesimal Waves, Rays and Shock Waves in Relativistic Magnetoelasticity" (in preparation) et *C. R. Acad. Sci. Paris*, *287A*, 97, 171, (1978).

Université de Paris-VI (Pierre et Marie Curie),
Laboratoire de Mécanique Théorique associé au C. N. R. S,
Tour 66, 4 Place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05, FRANCE.

THEORY AND APPLICATION OF ELASTICITY IN GENERAL RELATIVITY

Gérard A. Maugin

S u m m a r y

After a brief exposition of considerations which push (induce) to construction of relativistic elasticity, a pattern of the theory of deformation of a continuous medium in the framework of the general relativity is given.

In the case of elastic medium, the properties of the formation of shocks starting from the infinitesimal discontinuity are established and also remarkable results concerning the propagation discontinuities in a state of strong hydrostatical compression typical of the physics of dense stars. It is discussed the utilization of an elastic pattern identical and its generalization in the frame of electrodynamic relativistic of continuous medium for interpretation of phenomena fit for being registered by the aid of elastic detectors of gravitational waves.

TEORIJA I PRIMENA ELASTICITETA U OPŠTOJ RELATIVNOSTI

Gérard A. Maugin

R e z i m e

Posle kratke diskusije motivacie koji su doveli do konstrukcije relativističkog elektriciteta, data je skica teorije deformacija neprekidne sredine u okviru opšte relativnosti.

U slučaju elastičnih sredina date su osobine formiranja udara počevši od infinitezimalnog diskontinuiteta kao i zapaženih rezultata proširenje takvih diskontinuiteta u jednom stanju jake hidrostatičke kompresije tipične za fiziku gustih zvezda.

Diskutovana je upotreba identične elastične sheme i njene generalizacije u okviru relativističke dinamike neprekidne sredine za tumačenje fenomena pogodnih da budu registrovani pomoću gravitacionih talasa „elastičnih detektora"