TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 3, pp. 23—28. 1977.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКО—УПРУГОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ

М. М. Константинов, Д. Д. Байнов

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений нейтрального типа, описывающую вынужденные колебания вязко-упругого тела под действием периодического возбуждения и при учитывании наследственных свойств среды

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=f(t,\, x(t),\, \dot{x}(t),\, \ddot{x}(t),\, x(t-\Delta(t)),\, \bar{x}(t-\Delta(t)),$$
$$\ddot{x}(t-\Delta(t)),\, V_0[t,x],\, V_1[t,\dot{x}],\, V_2[t,\ddot{x}])=f(t,.) \tag{1}$$

Здесь $x=[x_1, \ldots, x_n]'$ — вектор состояния системы (штрих обозначает транспонирование); $\omega^2=\operatorname{diag}[\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2]$ (числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$) — нецелые и положительные); $f=[f_1, \ldots, f_n]'$ — непрерывная и 2π — периодическая по t функция; Δ — непрерывное 2π — периодическое запаздывание; $V_i[t,y]$ — интегральные операторы Вольтерра:

$$V_i(t,y)=\int_{-\infty}^{t}\Gamma_i(t-s)\,y(s)\,ds=\int_0^{\infty}\Gamma_i(s)\,y(t-s)\,ds;\;\; i=0,\,1,\,2$$

Γ_i — релаксационные $(n\times n)$ — матричные ядра, абсолютно интегруемые на интервале $[0,\infty)$. Не ограничавая общности будем считать, что элементы матриц $\Gamma_i(s)$ неотрицательны при $s\geqq 0$. Положим

$$G_i=\int_0^{\infty}\Gamma_i(s)\,ds$$

Система (1) обобщает математическую модель вынужденных геометрически нелинейных колебаний вязко-упругого тела, рассмотренную в [4], [5]. В настоящей работе, при испозьзовании метода, предложенного в [6], [7], находятся условия существования и единственности периодических колебаний системы (I). Получены также покоординатные оценки решения и его производных.

Особый интерес представляет случай, когда правая часть уравнения (1) пропорциональна малому параметру $\varepsilon>0: f(t,.)=\varepsilon f_0(t,.)$. Исследование колебательных режимов с малой возмущающей силой обычно проводится при помощи методов Пуанкаре — Ляпунова [3] и усреднения [8], [I]. При этом возникает важная для приложений задача об оценке величины малого параметра, так как вышеуказанные методы как правило не дают возможность конструктивно оценивать эту величину [3], [2], [I]. Полученные ниже результаты позволяют найти оценку $\varepsilon<\varepsilon_0$, достаточную для существования единственного периодического решения системы (I) (см. также [7]).

Дальше будем пользоваться следующими обозначениями: $R^{n.\,m}$ — пространство вещественных $(n\times m)$ — матриц, полуупорядоченное (с отношением порядка $\geqslant$) при помощи неотрицательного конуса $K^{n.\,m}$ всех $(n\times m)$ — матриц с неотрицательными элементами

$$(K^{n.\,1}=K^n,\ R^{n.\,1}=R^n);\quad |A|=[\,|A_{ij}|\,]\in K^{n.\,m}$$

— матричный модуль матрицы $A=[A_{ij}]\in R^{n.\,m}$; I_n — единичная $(n\times n)$ — матрица; $\rho(A)$ — спектральный радиус квадратной матрицы A; $E=[0,\,2\pi]$ — интервал; $C^k(E,\,R^n)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций x: $x:E\to R^n$; $|||\cdot|||:C^2(E,\,R^n)\to K^{3n}$ — обобщенная норма в $C^2(E,\,R^n)$:

$$|||x|||=\begin{bmatrix}\|x\|\\ \|\dot x\|\\ \|\ddot x\|\end{bmatrix};\quad \|y\|=[\,|y|_1,\ \ldots,\ |y|_n]'\in K^n,$$

$$|y|_i=\max\{|y_i(t)|:t\in E\},\ i\in\overline{1,\,n}.$$

Введем и слеующие специальные обозначения

$$\omega=\operatorname{diag}[\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n]\in K^{n.\,n},$$

$$\sin\omega=\operatorname{diag}[\sin\omega_1,\ \ldots,\ \sin\omega_n]\in R^{n.\,n},$$

$$\cos\omega=\operatorname{diag}[\cos\omega_1,\ \ldots,\ \cos\omega_n]\in R^{n.\,n},$$

$$V_\omega=|\sin\pi\omega|\in K^{n.\,n},$$

$$F_\Omega(t)=\sup\{|f(t,\,x)|:x\in\Omega\subset R^{9n}\}\in K^n,$$

где supremum берется поотдельно по координатам вектора $|f(t,\,x)|$.

Пусть $M=[M_{ij}]\in C^\circ(E,\,K^{n.\,m})$. Положим

$$T_\omega[M]=[T_{\omega\,ij}[M]]\in K^{n.\,m}$$

$$T_{\omega\,ij}[M]=\Big(\int_0^{2\pi}M_{ij}(s)\,|\cos\omega_i(\pi-s)|\,ds\Big)^2+\Big(\int_0^{2\pi}M_{ij}(s)\,|\sin\omega_i(\pi-s)|\,ds\Big)^2\leqq$$

$$\leqq\Big(\int_0^{2\pi}M_{ij}(s)\,ds\Big)^2$$

$$S_\omega[M]=\int_0^{2\pi}|\sin\omega(\pi-s)|\,M(s)\,ds\in K^{n.\,m},$$

$$C_\omega[M]=\int_0^{2\pi}|\cos\omega(\pi-s)|\,M(s)\,ds\in K^{n.\,m},$$

$$\tilde M=\int_0^{2\pi}M(s)\,ds.$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна и равномерно ограничена по пространственыым переменным x на множестве $E_x R^{9n}$. Тогда уравнение* (1) *имеет хотя бы одно* 2π — *периодическое решение* $x \in C^2(E, R^n)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор Π, действующий в $C^2(E, R^n)$ по формуле

$$\Pi x(t) = [\operatorname{con} \omega t]\, A(x) + [\sin \omega t]\, B(x) + \\ + \omega^{-1} \int_0^t [\sin \omega (t-s)]\, f(s, .)\, ds,$$

где

$$A(x) = \frac{1}{2} (\omega V_\omega)^{-1} \int_0^{2\pi} [\cos \omega (s-\pi)]\, f(s, .)\, ds,$$

$$B(x) = \frac{1}{2} (\omega V_\omega)^{-1} \int_0^{2\pi} [\sin \omega (s-\pi)]\, f(s, .)\, ds.$$

Операторное уравнение $x = \Pi x$ эквивалентно уравнению (1) на множестве 2π — периодических решений. Для производных функции Πx получаем

$$\frac{d\Pi x(t)}{dt} = -[\omega \sin \omega t]\, A(x) + [\omega \cos \omega t]\, B(x) + \int_0^t [\cos \omega (t-s)]\, f(s, .)\, ds;$$

$$\frac{d^2 \Pi x(t)}{dt^2} = -[\omega^2 \cos \omega t]\, A(x) - [\omega^2 \sin \omega t]\, B(x) - \\ - \omega \int_0^t [\sin \omega (t-s)]\, f(s, .)\, ds + f(t, .)$$

Из ограниченности функции f следует

$$\| \Pi x \| \leqslant \omega^{-1} \left(\frac{1}{2} V_\omega^{-1}\, T_\omega [F_\Omega] + S_\omega [F_\Omega] \right) = \Pi_0,$$

$$\left\| \frac{d\Pi x}{dt} \right\| \leqslant \frac{1}{2} V_\omega^{-1}\, T_\omega [F_\Omega] + C_\omega [F_\Omega] = \Pi_1 \tag{2}$$

$$\left\| \frac{d^2 \Pi x}{dt} \right\| \leqslant \| F_\Omega \| + \omega \left(\frac{1}{2} V_\omega^{-1}\, T_\omega [F_\Omega] + S_\omega [F_\Omega] \right) = \Pi_2;$$

$$\Omega = R^{9n}$$

Рассмотрим множество $\tilde{C}$ 2π — периодических функпий $x \in C^2(E, R^n)$, таких, что

$$||| x ||| \leqslant \begin{bmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Тогда $\Pi\tilde{C}\subset\tilde{C}$ и справедливость теоремы I следует из принципа Шаудера о неподвижной точке.

Отметим, что требование равномерной ограниченности функции f во всем расширенном фазовом пространстве можно заменить условием локальной ограниченности на выпуклых компактах $E\times\Omega$, $\Omega\subset R^{9n}$. При этом формулировка теоремы 1 несколько усложняется (см. напр. [6] для уравнений нейтрального типа).

Утверждение теоремы 1 не исключает тривиальные периодические решения ξ:

$$\omega^2\xi\equiv f(t,\ \xi,\ 0,\ 0,\ \xi,\ 0,\ 0,\ G_0\,\xi,\ 0,\ 0);\quad \xi=\mathrm{const}.$$

Неравенства (2), (3) служат для покоординатной оценке периодических решений и их производных. Возможно, конечно, и существование 2π — периодических решений, не удовлетворяющих (3), особено в резонансных случаях ($\omega_k\approx m_k$ — целое число для некоторых $k\in\overline{1,\ n}$).

Отметим наконец, что уравнение (1) может иметь нетривиальные почти периодические или периодические с периодим, несоизмеримым с 2π, решения.

Частотный базис этих решений состоится из чисел $\omega_1,\ldots,\omega_n$ и вдоль их траектории правая часть уравнения (1) не зависит от t непосредственно.

Для более грубых оценок в (2), (3) можно использовать и матрицы $T_\omega[I_n]$, $C_\omega[I_n]$, $S_\omega[I_n]$, для которых существуют явные выражения.

Предположим теперь, что в области $E\times R^{9n}$ функция $f(t,\ X)$,

$$X=[u_0',\ u_1',\ u_2',\ v_0',\ v_1',\ v_2',\ w_0',\ w_1',\ w_2']',$$

удовлетворяет обобщенным условием Липшица

$$(4)\qquad |f(t,\ X)-f(t,\ \overline{X})|\leqslant\sum_{i=0}^{2}(L_i(t)\,|u_i-\bar{u}_i|+M_i(t)\,|v_i-\bar{v}_i|+N_i(t)\,|w_i-\overline{w}_i|),$$

где $L_i,\ M_i,\ N_i\in C^0(E,\ K^{n.\,n})$, $i\in\overline{0,\ 2}$.

Положим

$$\psi_i=L_i+M_i+N_i\,G_i\in C^0(E,\ K^{n.\,n}),\ i\in\overline{0,\ 2}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4). *Пусть кроме того* $\rho(\Phi_\omega)<1$, *где*

$$\Phi_\omega=\begin{bmatrix}\Phi_{00} & \Phi_{01} & \Phi_{02}\\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{20} & \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\in K^{3n.\,3n},$$

$$\Phi_{0i}=\omega^{-1}\left(\frac{1}{2}V_\omega^{-1}\,T_\omega[\psi_i]+S_\omega[\psi_i]\right)\in K^{n.\,n},$$

$$\Phi_{1i}=\frac{1}{2}V_\omega^{-1}\,T_\omega[\psi_i]+C_\omega[\psi_i]\in K^{n.\,n},$$

$$\Phi_{2i}=(\psi_i)_\Omega+\omega\left(\frac{1}{2}V_\omega^{-1}\,T_\omega[\psi_i]+S_\omega[\psi_i]\right)\in K^{n.\,n};\quad \Omega=R^{9n}$$

Тогда уравнение (1) *имеет единственное* 2π — *периодическое решение* $x \in C^2(E, R^n)$, *удовлетворяющее оценкам* (2), (3).

Доказательство. Для каждых $2m\,(m \geqq 1)$ вещественных чисел $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{m} \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}\right)^2 \tag{5}$$

Из (5) следует, что если φ и ψ — интегруемые на интервале $(a.\ b)$ скалярные функции, то

$$\left(\int_a^b \varphi\, dt\right)^2 + \left(\int_a^b \psi\, dt\right)^2 \leqq \left(\int_a^b \sqrt{\varphi^2 + \psi^2\, dt}\right)^2 \tag{6}$$

Используя (5) и (6) аналогично как в теореме 1 получаем

$$|||\, \Pi x - \Pi \bar{x}\, ||| \leqq \Phi_\omega\, |||\, x - \bar{x}\, |||, \; x, \bar{x} \in \tilde{C}$$

т.е. Π является оператором обобщенного сжатия на множестве $\tilde{C}$.

Если правая часть уравнения (I) не зависит от $\dot{x}$, $\ddot{x}$ (респективно от x, $\ddot{x}$ или x, $\dot{x}$), то условия теоремы 2 сводятся к $\rho(\Phi_{00}) < 1$ (респективно к $\rho(\Phi_{11}) < 1$ или $\rho(\Phi_{22}) < 1$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(,.)$$

сохраняя прежные обозначения, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Как следствие теоремы 2 получаем, что при

$$\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{\rho(\Phi_\omega)}$$

уравнение (8) имеет единственное 2π — периодическое решение.

С целю упрощения выкладок для проверки условий теоремы 2 заметим, что из (6) следует

$$T_\omega[M] \leqq \tilde{M}$$

Следовательно в теореме 2 можно заменить $T_\omega[\psi_i]$ на $\tilde{\psi}_i$.

Покажем, что нарушение условий теоремы 2 вообще говоря ведет к неединственностью решения.

Рассмотрим два примера для скалярных уравнений.

Пример 1. Пусть задано уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\varepsilon \frac{x^2 + \dot{x}^2}{1 + x^2 + \dot{x}^2} \sin t; \quad \varepsilon > 0,\ \omega \neq 1 \tag{9}$$

Уравнение (9) удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет тривиальное решение $\xi = 0$. Если $\varepsilon \geqq |\,\omega^2 - 1\,|$, то уравнение (9) допускает и решения

$$x_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - (\omega^2 - 1)^2}}{\omega^2 - 1} \sin t$$

При $\omega\frac{1}{2}$ услови теоремы 2 для уравнения (9) сводятся к

$$\varepsilon<\varepsilon_0=\frac{\sqrt{3}}{9}(2-\sqrt{2})$$

и тогда имеем единственное решение $\xi=0$, так как при $\varepsilon<3/4$ решения $x_{1,2}$ уже не существуют.

Пример 2. Пусть задано уравнение

$$\ddot{x}+\frac{1}{4}x=-\frac{3}{2}\varepsilon\frac{x}{1+x^2+\cos^2 t},\quad \varepsilon>0 \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет решение $\xi=0$, а при $\varepsilon=1$ допускает также решение $x=\sin t$. Для уравнения (10) условия теоремы (2) сводятся к

$$\varepsilon<\varepsilon_0=\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$$

При выполнении этого неравенства решение $\sin t$ не существует.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Байнов, Д. Д., Константинов, М. М., *Методът на усредняването и неговото приложение в техниката*, „Наука и изкуство", София, 1973.

[2] Байнов, Д. Д., Константинов, М. М., *Методът на малкия параметър*, физ. мат. списание, т. 17 (50), (1974), кн. 4,273—280.

[3] Блехман, И. Г., *Синхронизация динамических систем*, „Наука‘,, Москва, 1971.

[4] Ильюшин, А. А., Победря Б. Е., *Основы математической теории термо — вязко — упругости*, „Наука". Москва, 1970.

[5] Колтунов. М. А., Моргунов, Б. И., Трояновский, И. Е., *Вынужденные геометрически нелинейные колебания вязко — упругого тела*, Механика полимеров, № 3, (1975), 464—469.

[6] Константинов, М. М., Байнов, Д. Д., *Существование и единственность периодических решений одного класса дифференциально — функциональных уравнений сверхнейтрального типа*, Math. Balkanica, т. 3 (1973), 220—228.

[7] Константинов, М. М., Байнов, Д. Д., *Периодични решения на един клас от нелинейни диференциални уравнения, нерешени спрямо старшата производна*, Математика и математическо образование, изд. БАН, София, 1974, 135—141.

[8] Филатов, А. Н., *Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро — дифференциальных уравнений*, „ФАН", Ташкент, 1975.

Высший машинно — электотехнический
Институт имени В. И. Ленина — София

Медицинская академия