TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA, 3 pp. 119—124, 1977.

DIFFERENZENGLEICHUNGEN DER PUNKTWEISEN ABBILDUNG

Mirko Stojanović

Die Methode der punktweisen Abbildung aufgebaut auf den Ideen von Poincaré, Birkhoff und Lewis, gewinnt immer mehr an seiner Bedeutung und Anwendung sowohl in der Theorie wie auch in der Praxis, so zum Beispiel bei der Schwingung des mathematischen Pendels mit parametrischer Erregung nichtlinearer Type, bei der Schwingung der Satelliten mit Variation des Trägheitsmomentes, bei der Bewegung der Teilchen in magnetischen Feldern u.s.w.

Wenn wir in der Gleichung[1]

$$
(1)\qquad [\sum_{m,n}\varphi_{mn}^{(k+1)}-\rho\sum_{m,n}\varphi_{mn}^{(k)}]\,x^m y^n=\sum_{m,n}\varphi_{mn}\,[\rho^k x+\sum_{r,s}\varphi_{rs}^{(k)}x^r y^s]^m\times
$$

$$
\times\left[\frac{1}{\rho^k}\,y+\sum_{r,s}\psi_{rs}^{(k)}x^r y^s\right]^n
$$

sukzessive Werte für m, n, r, s setzen und betrachten die Ausdrücke neben gleiche Glieder, dann es gibt

$$
\text{a)}\quad \varphi_{20}^{(k+1)}-\rho\varphi_{20}^{(k)}=\rho^{2k}\varphi_{20}
$$

$$
\text{b)}\quad \varphi_{11}^{k+1}-\rho\varphi_{11}^{(k)}=\varphi_{11}
$$

$$
\text{c)}\quad \varphi_{02}^{(k+1)}-\rho\varphi_{02}^{(k)}=\frac{1}{\rho^{2k}}\varphi_{02}
$$

$$
\text{d)}\quad \varphi_{21}^{(k+1)}-\rho\varphi_{21}^{(k)}=2\,\rho^k\varphi_{20}\varphi_{11}^{(k)}+\rho^k\varphi_{11}\psi_{11}^{(k)}+
$$

$$
(2)\qquad +\frac{1}{\rho^k}\varphi_{11}\varphi_{20}^{(k)}+\frac{2}{\rho^k}\varphi_{02}\psi_{02}{}_{02}^{(k)}+\rho^k\varphi_{21}
$$

$$
\text{e)}\quad \varphi_{12}^{(k+1)}-\rho\varphi_{12}^{(k)}=2\,\rho^k\varphi_{20}\varphi_{02}^{(k)}+\frac{1}{\rho^k}\varphi_{12}+\frac{1}{\rho^k}\cdot\varphi_{11}^{(k)}+
$$

$$
+\rho^k\varphi_{11}\psi_{02}^{(k)}+\frac{2}{\rho^k}\varphi_{02}\psi_{11}^{(k)}
$$

---

[1] Siehe [6]

$$\text{f)}\quad \varphi_{30}^{(k+1)} - \rho\varphi_{30}^{(k)} = 2\,\rho^k\,\varphi_{20}\,\varphi_{20}^{(k)} + \rho^k\,\varphi_{11}\,\psi_{20}^{(k)} + \rho^{3k}\,\varphi_{30}$$

$$\text{g)}\quad \varphi_{03}^{(k+1)} - \rho\varphi_{03}^{(k)} = \frac{1}{\rho^k}\,\varphi_{11}\,\varphi_{02}^{(k)} + \frac{2}{\rho^k}\,\varphi_{02}\,\psi_{02}^{(k)} + \frac{1}{\rho^{3k}}\,\varphi_{03}$$

mit den Anfangsbedingungen $\varphi_{mn}^{(1)} = \varphi_{mn}$, $\varphi_{mn}^{(0)} = 0$. Die Gleichungen (2) sind die Differenzengleichungen der punktweisen Abbildung.

Wenn wir in der Gleichung:

$$(3)\qquad \left[\sum_{mn}\psi_{mn}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho}\sum_{mn}\psi_{mn}^{(k)}\right] x^m\,y^n = \sum_{mn}\psi_{mn}\left[\rho^k\,x + \sum_{rs}\varphi_{rs}^{(k)}\,x^r\,y^s\right]^m \cdot \left[\frac{1}{\rho^k}\,y + \sum_{rs}\psi_{rs}^{(k)}\,x^r\,y^s\right]^n$$

die sukzessive Werte für m, n, r, s setzen und betrachten die Ausdrücke neben gleichen Glieder, man gibt es

$$\text{h)}\quad \psi_{11}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho}\,\psi_{11}^{(k)} = \psi_{11}$$

$$\text{i)}\quad \psi_{20}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho}\,\psi_{20}^{(k)} = \rho^{2k}\,\psi_{20}$$

$$(4)\quad \text{j)}\quad \psi_{02}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho}\,\psi_{02}^{(k)} = \frac{1}{\rho^{2k}}\,\psi_{02}$$

$$\text{k)}\quad \psi_{21}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho}\,\psi_{21}^{(k)} = 2\,\rho^k\,\psi_{20}\,\varphi_{11}^{(k)} + \rho^k\,\psi_{11}\,\psi_{11}^{(k)} + \frac{1}{\rho^k}\,\psi_{11}\,\varphi_{20}^{(k)} + \frac{2}{\rho^k}\,\psi_{02}\,\psi_{20}^{(k)} + \rho^k\,\psi_{21}$$

$$\text{l)}\quad \psi_{12}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho}\,\psi_{12}^{(k)} = 2\,\rho^k\,\psi_{20}\,\varphi_{02}^{(k)} + \rho^k\,\psi_{11}\,\psi_{02}^{(k)} + \frac{1}{\rho^k}\,\psi_{11}\,\varphi_{11}^{(k)} + \frac{2}{\rho^k}\,\psi_{02}\,\psi_{11}^{(k)} + \frac{1}{\rho^k}\,\psi_{12}$$

$$\text{m)}\quad \psi_{30}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho}\,\psi_{30}^{(k)} = 2\,\rho^k\,\psi_{20}\,\varphi_{20}^{(k)} + \rho^k\,\psi_{11}\,\psi_{20}^{(k)} + \rho^k\,\psi_{30}$$

$$\text{n)}\quad \psi_{03}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho}\,\psi_{03}^{(k)} = \frac{1}{\rho^k}\,\psi_{11}\,\varphi_{02}^{(k)} + \frac{2}{\rho^k}\,\psi_{02}\,\psi_{02}^{(k)} + \frac{1}{\rho^{3k}}\,\psi_{03},$$

mit den Anfangsbedingungen $\psi_{mn}^{(1)} = \psi_{mn}$, $\psi_{mn}^{(0)} = 0$.

2. Das Auflösen der Differenzengleichungen

Wenn wir bezeichnen $U_k = \varphi_{mn}^{(k)}$, dann sind die Differenzengleichungen (2) der Form

$$U_{k+1} - U_k = 0, \tag{2.1}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$U_k = C\rho^k, \quad C(\rho^{k+1} - \rho^{k+1}) = 0, \qquad (C \neq 0). \tag{2.2}$$

Man bestimmt die Partikularintegralen für alle Gleichungen einzeln. So wird

$$U_{k+1} = \rho U_k + \rho^{2k} U, \qquad U_1 = U,$$

$$k=1 \qquad U_2 = \rho U_1 + \rho^2 U = (\rho + \rho^2) U = \rho(\rho+1) U,$$

$$k=2 \qquad U_3 = \rho U_2 + \rho^4 U = \rho^2 (1 + \rho + \rho^2) U$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k-1 \qquad U_k = \rho U_{k-1} + \rho^{2(k-1)} U = \rho^{(k-1)} (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k) U$$

$$U_k = \rho^{k-1} \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} = \frac{\rho^{2k} - \rho^k}{\rho^2 - \rho} U, \tag{2.3}$$

dann ist Allgemeinintegral mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_{20}^{(k)} = C\rho^k + \rho^{k-1} \frac{\rho^{k-1}}{\rho - 1}, \quad \varphi_{20}^{(0)} = 0$$

und die Lösung ist

$$\varphi_{20}^{(k)} = \frac{\rho^{2k} - \rho^k}{\rho^2 - \rho} \varphi_{20}. \tag{2.4}$$

Auflösend die Gleichung (2.a), wir haben

$$U_{k+1} = \rho U_k + U$$

$$k=1 \qquad U_2 = (\rho + 1) U$$

$$k=2 \qquad U_3 = (\rho^2 + \rho + 1) U$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k-1 \qquad U_k = (\rho^{k-1} + \cdots + \rho + 1) U$$

dann ist die Lösung

$$\varphi_{11}^{(k)} = \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} \varphi_{11} \tag{2.5}$$

Benützend ein und dasselbe Verfahren auf die Gleichungen (2) und (3), wir haben

$$\varphi_{02}^{(k)} = \frac{\rho^k - \rho^{-2k}}{\rho - \rho^{-2}} \varphi_{02} \tag{2.6}$$

$$\varphi_{21}^{(k)} = (\varphi_{21} - B_2 - B_0 - B_{-2})\, k\, \rho^{k-1} + \tag{2.7}$$

$$+ B_2 \frac{\rho^{2k} - \rho^k}{\rho^2 - \rho} + B_0 \frac{1 - \rho^k}{1 - \rho} + B_{-2} \frac{\rho^{-2k} - \rho^k}{\rho^{-2} - \rho}$$

wo

$$B_2 = \frac{2}{\rho - 1} \varphi_{20} \varphi_{11}, \qquad B_0 = \frac{\varphi_{11} \psi_{11}}{\rho^{-1} - 1} + \frac{\varphi_{11} \varphi_{20}}{\rho - \rho^2}$$

$$B_{-2} = \frac{2}{\dfrac{1}{\rho} - \rho^2} \varphi_{02} \psi_{20}$$

$$\varphi_{12}^{(k)} = (\varphi_{12} - C_2 - C_0 - C_{-2}) \frac{\rho^{-k} - \rho^k}{\rho^{-1} - \rho} +$$

$$+ C_2 \frac{\rho^{2k} - \rho^k}{\rho^2 - \rho} + C_0 \frac{1 - \rho^k}{1 - \rho} + C_{-2} \frac{\rho^{-2k} - \rho^k}{\rho^{-2} - \rho}$$

$$\varphi_{30}^{(k)} = (\varphi_{30} - A_2 - A_0) \frac{\rho^{3k} - \rho^k}{\rho^3 - \rho} + A_2 \frac{\rho^{2k} - \rho^k}{\rho^2 - \rho} + A_0 \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}$$

$$A_2 = \frac{2}{\rho - \rho^2} (\varphi_{20})^2, \qquad A_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{\rho} - \rho^2} \varphi_{11} \psi_{20}$$

$$\varphi_{03}^{(k)} = (\varphi_{03} - D_0 - D_{-2}) \frac{\rho^{-3k} - \rho^k}{\rho^{-3} - \rho} + D_0 \frac{1 - \rho^k}{1 - \rho} + D_{-2} \frac{\rho^{-2k} - \rho^k}{\rho^{-2} - \rho} \tag{2.8}$$

$$D_0 = \frac{\varphi_{11} \varphi_{02}}{\rho - \dfrac{1}{\rho^2}}, \qquad D_{-2} = \frac{2 \varphi_{02} \psi_{02}}{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{\rho^2}}$$

$$\psi_{11}^{(k)} = \frac{1 - \rho^{-k}}{1 - \rho^{-1}} \psi_{11}, \qquad \psi_{20}^{(k)} = \frac{\rho^{2k} - \rho^{-k}}{\rho^2 - \rho^{-1}} \psi_{20}$$

$$\psi_{02}^{(k)} = \frac{\rho^{-k} - \rho^{-2k}}{\rho^{-1} - \rho^{-2}} \psi_{02},$$

$$\psi_{21}^{(k)} = (U - F_2 - F_0 - F_{-2}) \frac{\rho^k - \rho^{-k}}{\rho - \rho^{-1}} + F_2 \frac{\rho^{2k} - \rho^{-k}}{\rho^2 - \rho^{-1}} +$$

$$+ F_0 \frac{1 - \rho^{-k}}{1 - \rho^{-1}} + F_{-2} \frac{\rho^{-k} - \rho^{-2}}{\rho^{-1} - \rho^{-2}}$$

$$\psi_{12}^{(k)}=(U-G_2-G_0-G_{-2})\frac{k}{\rho^{k-1}}+G_2\frac{\rho^2-\rho^{-k}}{\rho^2-\rho^{-1}}+$$

$$+G_0\frac{1-\rho^{-k}}{1-\rho^{-1}}+G_{-2}\frac{\rho^{-k}-\rho^{-2k}}{\rho^{-1}-\rho^{-2}}$$

$$G_2=\frac{2}{\rho-\rho^{-2}}\psi_{10}\varphi_{02},\quad G_0=\frac{1}{\rho-1}\psi_{11}\varphi_{11}$$

$$G_{-2}=\psi_{11}\psi_{02}\left(\frac{1}{\rho^{-2}-\rho^{-1}}+\frac{2}{-1+\rho^{-1}}\right)$$

(2.9) $$\psi_{30}^{(k)}\frac{\rho^k-\rho^{-k}}{\rho-\rho^{-1}}\psi_{30}+(E_2+E_0)\frac{\rho^{3k}-\rho^{-k}}{\rho^3-\rho^{-1}}-$$

$$-E_2\frac{\rho^{2k}-\rho^{-k}}{\rho^2-\rho^{-1}}-E_0\frac{1-\rho^{-k}}{1-\rho^{-1}}$$

$$E^2=\frac{2\psi_{20}\varphi_{20}}{\rho^2-\rho},\quad E_0=\frac{\psi_{11}\psi_{20}}{\rho^2-\rho^{-1}}$$

$$\psi_{03}^{(k)}=(U-H_0-H_{-2})\frac{\rho^{-k}-\rho^{-3k}}{\rho^{-1}-\rho^{-3}}+H_0\frac{1-\rho^{-k}}{1-\rho^{-1}}+H_{-2}\frac{\rho^{-k}-\rho^{-2k}}{\rho^{-1}-\rho^{-2}}$$

$$H_{-2}=\frac{2}{\rho^{-1}-\rho^{-2}}(\psi_{02})^2,\quad H_0=\frac{1}{\rho^{-1}-\rho^{-2}}\psi_{11}\varphi_{02}.$$

LITERATURVFRZEICHNIS

[1] Birkhoff G. D.: *Surface transformations and dynamical applications*, Acta Mat 1920.

[2[Birkhoff G. D., *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Trans. Amer. Math. Soc.1917.

[3] Chirikov B. V., *When does the dynamical system turn into the statistical one*, Comm. at the Int. Cong. of Math., Moscow 1966.

[4] Lewis D. C.: *Formal power series transformations*, Duke Math. J. 2. 794, 1939.

[5] Mira C.: *Sur les cas d'exception d'une recurrence ou transformation ponctuelle autonome du deuxième ordre*, C. R. A. S. Paris, 1970.

[6] Stojanović M.: *Die Methode der Punktweisen Abbildung und ihre Anwendung auf dynamische Systeme mit zwei Freiheitsgrade*, Ibidem.

[7] Rašković D: — Mehanika III (Dinamika), Jug. zav. za izd. udžb. Beograd, 1966.

УРАВНЕНИА В КОНЕЧНЫХ РАЗНОТСЯХ ТОЧЕЧНИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Мирко Стоянович

Резюме

Этот метод базируется на идеях Poincaré-a, Birkhoff-a и Lewis-a имеет огромное значение в современной практике, особенно в колебаниях маятника, с параметрическим побужденем нелинейного типа, в коилебаниях спутника с вариациями моментов инерции, при движении частиц в магнитном поле, итд.

Вычислено четырнадцать (14) коэффициентов и одновременно даны и их решения.

ДИФЕРЕНЦНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ТАЧКАСТОГ ПРЕСЛИКАВАЊА

Мирко Сӣојановић

Резиме

Ова метода базирана на идејама Poincare-a, Birkhoff-a и Lewis-a игра све већу улогу у савременој пракси, нарочито код осцилација клатна са параметричком екситацијама нелинеарног типа код осцилација сателита са варијацијама момената инерције, код кретања честица у магнетном пољу итд. Срачунато је 14 коефицијената и уједно су дата и њихова решења.

Mirko Stojanović
Cara Lazara 29, 18400 Prokuplje