TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 3, pp. 113—117, 1977.

DIE METHODE DER PUNKTWEISEN ABBILDUNG UND IHRE ANWENDUNG AUF DYNAMISCHE SYSTEME MIT ZWEI FREIHEITSGRADE

Mirko Stojanović

Die Bewegung des Dynamischen Systems mit zwei Freiheitsgrade hängt von zwei Koordinaten und zwei Schnelligkeiten ab, dann kann man sie in den Raum von vier Dimensionen vorstellen. Aber, wenn wir nur die Bewegungen beobachten, die dem Wert dei konstanten Energie entsprechen, dann liegen die Punkte in gewissen Dreidimensionalmenge. Die Bewegungen haben sodann die Kurven gegeben, die gehen durch alle Punkte der Menge. Wenn sie sich mit der Fläche schneiden durch, dann beim Zuwachs dei Zeit, der Bewegungspunkt beschreibt die Halbkurve, die berührt die Fläche in der Folge des Punktes R, R'. . . , denn ist es die Abbildung der Fläche allein in selbst. Wenn die analytische Transformation in der Nähe des Invariantpunktes $x=y=0$ der Fläche ist, gibt mit

$$x_1 = f(x, y) = ax + by + \cdots \qquad ad - cb = 0 \tag{1}$$
$$y_1 = g(x, y) = cx + dy + \cdots$$

wo x_1, y_1 die Koordinaten des Transformationspunktes R_1 sind. Wenn wir annehmen dass reale Analytischfunktion $H(x, y)$ existiert, die ist nicht die Null füı $x=y=0$, aber solche dass ein zweifaches Integral $\iint H\, x, y\; dxdy$, denselben Wert auf das Gebiet D hat, wie auf Abb. S, die wird mittels der Transformatıon τ, Abb. 1. Diese Transformation heisst Erhaltungstransformation und die Funktion $H(x, y)$ heisst quasiinvariante Funktion. Die Integration verıichtet man auf das Bild S in, da das Gebiet D verwandelt sich. Nachdem das Gebiet D ist willkürlich, das Intergal hat den Wert

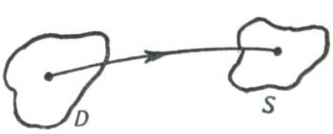

Abb. 1.

$$\iint\limits_D H(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_S H(x_1, y_1)\, J(x, y)\, dx\, dy \tag{2}$$

wo $J(x, y)$ die jakobische Determinante ist

$$J(x, y) = \frac{\partial (x, y)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{x_1} & \dfrac{\partial x}{y_1} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y}{\partial y_1} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

In neuen Veränderlichen

(4) $$H(x_1, y_1) = H(x, y)\ J^*(x_1, y_1),\ J^* = \frac{1}{J},\ J = 1.$$

In der Theorie linearer Transformation die wichtigste sind die lineare Glieder in den Transformationgleichungen (1). Wenn der Eigenwert ist λ, dann muss sein

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad f(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + ad - bc = 0$$

(5) $$J^* = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| = ad - bc = 1.$$

Wie $\lambda + \frac{1}{\lambda} = a+d$, dass sind die Eigenwerte λ und $\frac{1}{\lambda}$, weil $\lambda \neq 1$.

Im Fall linearer Transformation

(6) $$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \rho = \lambda \neq \pm 1, \quad J^* = J = 1$$

dann $H=1$. Wie

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = c, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = d$$

$$J(x_1, y_1) = \left| \frac{\partial (x_1, y_1)}{\partial (x, y)} \right| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{Bmatrix} dx_1 - by_1 \\ -cx_1 + ay_1 \end{Bmatrix}.$$

Umgekehrt

$$\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{\rho} \mathbf{I} \right) = 0$$

$$x = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} x & b \\ y & d \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (dx_1 - by_1), \quad y = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} a & x_1 \\ c & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (ay_1 - cx_1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{d}{|\mathbf{A}|}, \quad \frac{\partial x}{\partial y_1} = \frac{-b}{|\mathbf{A}|}, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{a}{|\mathbf{A}|}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{c}{|\mathbf{A}|}$$

(7) $$J(x, y) = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{d}{|\mathbf{A}|} & \frac{-b}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{-c}{|\mathbf{A}|} & \frac{a}{|\mathbf{A}|} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} d & -b \\ c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{J(x_1, y_1)}.$$

Man bewegt den Punkt nach deı Hyperbel $xy=c=\text{const}$, infolge der sukzessiven Anwendungen der Transformation τ und τ_{-1}. Wenn der Punkt R liegt nicht auf die degenerischen Hyperbel $xy=0$, er wird zur Unendlichkeit der der Transformationen sich zurücktreten, und wenn auf die degenerischen Hyperbel liegt, er wird sich dem Invariantpunkt (0, 0) nähern.

2. Das Bestimmen der Transformation

Poincaré und Birkhoff haben bewiesen, dass dem System der Hamiltongleichungen

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt}=\dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad y=\dot{x}, \tag{8}$$

kann man die Punktstransformation zugesellen. Wir werden die nächste Punktstransformation betrachten

$$\begin{aligned} x_1&=\rho x+\sum_{m,n}^{\infty}\varphi_{mn}x^m y^n, &\quad \rho=\lambda\neq\pm 1,\\ y_1&=\frac{1}{\rho}y+\sum_{m,n}^{\infty}\psi_{mn}x^m y^n, &\quad m+n\geqslant 2, \end{aligned} \tag{9}$$

wo die Koeffizienten ρ, φ_{mn}, ψ_{mn} real oder komplex sind. In diesem Fall sind $\psi_{mn}=\bar{\varphi}_{mn}$. Mittels der Iteration man kann die Reihe für x_k und y_k in der Funktion von x und y bekommen. Wenn x und y reale Reihe der Form (9) sind, und wenn $\rho>0$, dann x_k und y_k können für alle Werte k vorstellen, in der Form

$$\left.\begin{aligned} x_k&=\rho^k x+\sum_{m,n}^{\infty}\varphi_{mn}^{(k)}x^m y^n\\ y_k&=\frac{1}{\rho^k}y+\sum_{m,n}^{\infty}\psi_{mn}^{(k)}x^m y^n \end{aligned}\right\}, \quad m+n\geqslant 2 \tag{10}$$

wo $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ sind reale Polynome nach ρ^k, ρ^{-k}, k ist des mindeste Grades $m+n$.

Birkhoff [1] hat bewiesen, dass diese Reihe die τ^k bestimmen, die nächste Differentialgleichungen befriedigen

$$\begin{aligned} &\frac{dx_k}{dk}=U(x_k, y_k), \quad \frac{dy_k}{dk}=V(x_k, y_k)\\ &U(x, y)=\left[\frac{\partial x}{\partial k}\right]_{k=0}, \quad V(x, y)=\left[\frac{\partial y}{\partial k}\right]_{k=0}, \end{aligned} \tag{11}$$

mit Anfangsbedingungen $x=x_0$, $y=y_0$ für $k=0$.

Wenn wir die Gleichungen (10) in der rechten Seiten der Relationen (11) stellen und kürzen die beiden Seiten mit $\rho^{(k+1)} x$, bezüglich $\rho^{-(k+1)} x$ man bekommt die Relationen für das Rechnen der Koeffizienten φ_{mn}

$$\left[\sum_{m,n} \varphi_{mn}^{(k+1)} - \rho \sum_{m,n} \varphi_{mn}^{(k)}\right] x^m y^n = \sum_{m,n} \varphi_{mn} \left[\rho^k x + \sum_{r,s} \varphi_s^{(k)} x^r y^s\right]^m \times \tag{12}$$
$$\times \left[\frac{1}{\rho^k} y + \sum_{r,s} \psi_{rs}^{(k)} x^r y^s\right]^n,$$

bezüglich, für das Rechnen der Koeffizienten ψ_{mn}

$$\left[\sum_{m,n} \psi_{mn}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho} \sum_{mn} \psi_{mn}^{(k)}\right] x^m y^n = \sum_{m,n} \psi_{mn} \left[\rho^{(k)} x + \sum_{r,s} \varphi_{rs}^{(k)} x^r y^s\right]^m \times \tag{13}$$
$$\times \left[\frac{1}{\rho} k^y + \sum_{r,s} \psi_{rs}^{(k)} x^r y^s\right]^n.$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Birkhoff G. D.: Surface tranformations and their dynamical applications, Acta Math. 111—130, 1920

[2] Birkhoff G. D. u. Smith P. A.: Structure analysis of surface transformations, Coll. Math. Papers, Dover, 360—394, 1968

[3] Gumovski I.: Some properties of large amplitude solutions of conservative dynamic systems, CERN/SI/Int. BR/72—1, Genève 1972

[4] Pun L.: Initial conditioned solutions of a second order nonlinear conservative differential equation with a periodically varying coefficient, J. Franklin Inst. 295, 193—216, 1973

[5] Mira C. u. Babary J. P.: Sur un cas critique pour une recurrence altonome du deuxième ordre, C. R. A. S. Paris 268, 129—132, 1969

[6] Rašković D.: Osnovi matr. račun., Nauč. knjiga, Beograd 1972.

МЕТОДА ОТОБРАЖЕНИЯ ТОЧКИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Мирко Стоянович

Содержание

Основна идея этого метода заключается в том, что какой-то динамический систем присаединить трансформацию которая к тому сохраняет поверхностное отображение. Тяжелые вопросы интегрируемости и стабильности динамической системы редуцируются на исследование сохранения поверхностного отображения. Присоединенная трансформация позволяет наблюдение системы вне прежних апроксимативных анализов решений динамических систем.

МЕТОДА ПРЕСЛИКАВАЊА ТАЧКЕ И ЊЕНА ПРИМЕНА НА ДИНАМИЧКЕ СИСТЕМЕ СА ДВА СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

Мирко Стојановић

Резиме

Основна идеја ове методе је да неком динамичком систему придружимо трансформацију која уз то одржава и површинско пресликавање. Тешка питања интеграбилности и стабилности динамичког система редукују се на испитивање одржавања површинског пресликавања. Придружена трансформапија омогућава посматрање система изван досадашњих апроксимативних анализа.

Мирко Стојановић
Цара Лазара 29,
18400 Прокупље