TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 2, p.p. 77–84, 1976.

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ В. З. ВЛАСОВА, ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВЯХ

Душан Л. Медич

1. Приложение вариационного метода к расчету прямоугольных пластинок

Будучи одним из более еффективных методов расчета пластинок и оболочек, вариационный метод В. З. Власова дает возможност распространить применение теории упругости к различным проблемам технической механики. При помощи этого метода мы приводим двухмерные задачи к одномерным.

Для прямоугольной пластинки сторону которой параллелную оси x обозначим через „a", а параллелную оси y-через „b", с началом координат в одном из углов прямоугольника введем систему бездимензионных координат (ξ, η) через соотношения

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a} \tag{1.1}$$

Прогиб пластинки представлаем в форме конечного ряда

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} W_i(\eta)\,\varphi_i(\xi) \tag{1.2}$$

где $\varphi_i(\xi)$ заранее удобно выбранные аппроксимирующие функции а $W_i(\eta)$ подлежают определению. Аппроксимирующие функции должны удовлетворят геометрическим граничным условиям, а статические граничные условия удовлетворяются только приблизительно. Для оценки точности полученных решений неопходно делать сравнение результатов полученых другими методами или експериментально.

По упомянутому методу, за разницу от метода Галеркина имеем систему дифференциальных а не алгебраических уравнений. Для функций $W_i(\eta)$ имеем систему дифференциальных уравнений [1]

$$\sum_{i=1}^{n} \left(W_i^{\mathrm{IV}}(\eta)\,a_{ik} + W_i''(\eta)\,b_{ik} + W_i(\eta)\,c_{ik}\right) = q_k\,a^4 \tag{1.3}$$

с коэффициентами

$$a_{ik} = D \int_0^1 \varphi_i \varphi_k \, d\xi$$

$$b_{ik} = \nu D \int_0^1 (\varphi_i \varphi_k'' + \varphi_i'' \varphi_k) \, d\xi - 2(1-\nu) \int_0^1 \varphi_i' \varphi_k' \, d\xi \tag{1.4}$$

$$c_{ik} = D \int_0^1 \varphi_i'' \varphi_k'' \, d\xi, \qquad q_k = \int_0^1 q(\xi, \eta) \varphi_k \, d\xi$$

Аппроксимирующие функции, которые определяют деформацию полоски параллелной оси ξ, выбираются различными способами. Возможно взять эти функции и в форме полинома по бездимензионым величинам определяющего упругую линию полоски. Так на пример для консольной пластинки с жестко заделаным краем $\xi = 0$ под нагрузкой $q = \text{const}$, аппроксимирующая функция есть

$$\varphi(\xi) = \xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2 \tag{1.5}$$

которая удовлетворяет и статические и геометрические условия на краях $\xi = 0$ и $\xi = 1$,

$$\begin{gathered} \varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \\ \varphi''(1) = \varphi'''(1) = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

С выбором только одной аппроксимирующей функции дифференциальное уравнение имеет вид [1]

$$W^{\text{IV}}(\eta) - 2r^2 W''(\eta) + s^4 W(\eta) = Pa^4 \tag{1.7}$$

в котором

$$r^2 = \frac{1}{\int_0^1 \varphi^2 \, d\xi} \left[(1-\nu) \int_0^1 (\varphi')^2 \, d\xi - \nu \int_0^1 \varphi'' \varphi \, d\xi \right]$$

$$s^4 = \frac{\int_0^1 (\varphi'')^2 \, d\xi}{\int_0^1 \varphi^2 \, d\xi}, \qquad P = \frac{\int_0^1 q \varphi \, d\xi}{D \int_0^1 \varphi^2 \, d\xi} \tag{1.8}$$

Если $s > r$ решение гомогенного уравнения будем искать в форме

$$W_H = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + C_3 \Phi_3 + C_4 \Phi_4 \tag{1.9}$$

где

$$\begin{gathered} \Phi_1 = \operatorname{ch} \alpha\eta \sin \beta\eta, \qquad \Phi_2 = \operatorname{ch} \alpha\eta \cos \beta\eta \\ \Phi_3 = \operatorname{sh} \alpha\eta \cos \beta\eta, \qquad \Phi_4 = \operatorname{sh} \alpha\eta \sin \beta\eta \end{gathered} \tag{1.10}$$

и

(1.11) $$\alpha=\sqrt{\frac{s^2+r^2}{2}}, \qquad \beta=\sqrt{\frac{s^2-r^2}{2}}$$

Постоянные C_1-C_4 определяются из условий на $\eta=0$ и $\eta=\pm\frac{b}{a}$.

2. Прямоугольная пластинка с одним жестко заделаним краем и тримя свободно опертыми краями под равномерной нагрузкой.

Пусть $\xi=0$ жестко заделан край а остальные края свободно опертие (ось ξ поставим по середине пластинки).

Решение дифференциального уравнения изгиба пластинок

(2.1) $$\Delta\Delta\, w=\frac{q}{D}$$

ищем в форме

(2.2) $$w(\xi,\ \eta)=W(\eta)\,\varphi(\xi).$$

Дифференциальное уравнение для функции $W(\eta)$ представлено выражением (1.7) а коеффициенти r^2, s^4 и P выражениями (1.8). За функцию $\varphi(\xi)$ возмем функцию котора определяет упругую линию балки с одним заделаним краем

(2.3) $$\varphi(\xi)=3\,\xi^2-5\,\xi^3+2\,\xi^4$$

которая удовлетворяет статические и геометрические условия на краях $\xi=0$ и $\xi=1$

(2.4) $$\begin{gathered}\varphi(0)=\varphi'(0)=0\\ \varphi(1)=\varphi''(1)=0.\end{gathered}$$

Таким образом получим

(2.5) $$r^2=11{,}3684; \quad s^4=238{,}736; \quad P=4{,}97378\,\frac{q}{D}$$

и дифференциальное уравнение за функции $W(\eta)$

(2.6) $$W^{\mathrm{IV}}-22{,}7368\,W''+238{,}736\,W=4{,}97368\,\frac{qa^4}{D}$$

с партикулярным решением

(2.7) $$W_p=0{,}02083\,\frac{qa^4}{D}.$$

Имея в виду симетрию нагрузки и граничных условий, общее решение уравнений (2.6) находим в форме

(2.8) $$W(\eta)=C_1\,\mathrm{ch}\,\alpha\eta\cos\beta\eta+C_2\,\mathrm{sh}\,\alpha\eta\sin\beta\eta+W_p$$

Величины α и β определенны в (1.11) и имеют значения $\alpha=3{,}662$, $\beta=1{,}428$.

Постоянные C_1 и C_2 определяем из условий на краям $\eta = \pm \frac{b}{2a}$

(2.9) $$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0.$$

Для квадратной пластинки $\frac{b}{a} = 1$, значения постсянных:

$$C_1 = -0{,}00973\ \frac{qa^4}{D}, \quad C_2 = 0{,}00134\ \frac{qa^4}{D}$$

и уравнение упругой поверхности записиваеться в виде

$$w(\xi,\ \eta) = \frac{qa^4}{D}(-0{,}00973\ \mathrm{ch}\ \alpha\eta \cos\beta\eta + 0{,}00134\ \mathrm{sh}\ \alpha\eta \sin\beta\eta +$$

(2.10) $$+ 0{,}02083) \cdot (3\,\xi^2 - 5\,\xi^3 + 2\,\xi^4)$$

Прогиб в середине пластинки $\left(\xi = \frac{1}{2},\ \eta = 0\right)$ имеет значение $0{,}00277\ \frac{qa^4}{D}$.

Изгибающие моменты выражаются следующими соотношениями

(2.11) $$M_\xi = -D(W\varphi'' + \nu W''\varphi); \quad M_\eta = -D(W''\varphi + \nu W\varphi'')$$

и их значения в середине пластинки $M_\xi = 0{,}04054\,qa^2$, $M_\eta = 0{,}03414\,qa^2$ где взято как и в дальнейших примерах $\nu = 0{,}3$.

Для разных соотношений страниц $\frac{b}{a}$, прогиби и изгибающие моменти в середине пластинки представлени таблицой 1. в которой, ради сравнения, внесени результати Тимошенка [2].

Таблица 1.

b/a		10^2 w		%	$10^2\ M_\xi$		%	$10^2\ M_\eta$		%
∞	метод аппрокс. егзактно реш.	0,512 0,520	qa^4/D ,,	1,54	6,08 6,20	qa^2 ,,	1,9	1,84 1,90	qa^2 ,,	3,1
2	,,	0,488 0,490	,, ,,	0,4	5,84 6,00	,, ,,	2,6	2,24 2,30	,, ,,	2,8
3/2	,,	0,408 0,420	,, ,,	2,8	5,32 5,40	,, ,,	1,5	2,74 2,80	,, ,,	2,1
1	,,	0,277 0,280	,, ,,	1,1	4,05 3,90	,, ,,	3,8	3,41 3,40	,, ,,	0,6
2/3	,,	0,629 0,640	$\frac{qb^4}{D}$,,	2,1	4,73 4,80	qb^2 ,,	1,5	6,78 6,90	qb^2 ,,	1,7
1/2	,,	0,926 0,930	,, ,,	0,4	4,66 4,70	,, ,,	0,6	9,31 9,40	,, ,,	0,9
0	,,	1,270 1,300	,, ,,	2,3	3,65 3,70	,, ,,	1,4	12,3 12,5	,, ,,	1,6

3. Прямоугольная пластинка с свободно опертими краями под равномерной нагрузкой.

Аппроксимирующую функцию $\varphi(\xi)$ определяющую упругую линию полсски паралелной оси ξ возмем в виде

$$\varphi(\xi) = \xi - 2\xi^3 + \xi^4 \tag{3.1}$$

которая удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi''(0) = 0 \\ \varphi(1) &= \varphi''(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для r^2, s^4 и p находим:

$$r^2 = 9{,}87096; \quad s^4 = 97{,}5484; \quad p = 4{,}06451 \frac{q}{D} \tag{3.3}$$

а α и β суть: $\alpha = 3{,}142$; $\beta = 0{,}0533$. так что дифференциальное уравнение за функцию W записиваеться в форме

$$W^{\mathrm{IV}} - 19{,}7419\, W'' + 97{,}548\, W = 4{,}06451 \frac{qa^4}{D} \tag{3.4}$$

с партикулярним решением $W_p = 0{,}04166 \dfrac{qa^4}{D}$.

Для соотношения страниц $\dfrac{b}{a} = 1$, значения постоянных:

$$C_1 = -0{,}02856 \frac{qa^4}{D} \qquad C_2 = 0{,}49068 \frac{qa^4}{D}$$

и уравнение упругой поверхности имеет вид:

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = \frac{qa^4}{D} (&-0{,}02856 \operatorname{ch} \alpha\eta \cos \beta\eta + 0{,}49068 \operatorname{sh} \alpha\eta \sin \beta\eta + \\ &+ 0{,}04166) \cdot (\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Прогиб в середине пластинки $\left(\xi = \dfrac{1}{2},\ \eta = 0\right)$, $w = 0{,}00409 \dfrac{qa^4}{D}$. Для прогиба в середине пластинки Тимошенко получает $0{,}00406 \dfrac{qa^4}{D}$, так что отклонение нашего результата есть 0,74% что можно считать весма удовлетворяющей точностю.

Определим максимальные значения изгибающих моментов, перерезивающих сил и концентрированную силу в углах пластинки. Выражения этих величин:

$$\begin{aligned} &M_\xi = -D\,[W\varphi'' + \nu W''\varphi], \qquad M_\eta = -D\,[W''\varphi + \nu W\varphi''] \\ &Q_\xi = -D\,[W\varphi''' + (2-\nu)\,W''\varphi'], \quad Q_\eta = -D\,[W'''\varphi + (2-\nu)\,W'\varphi''] \\ &R = 2\,H = 2\,D\,(1-\nu)\,W'\varphi'. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Максимальные значения являются в середине пластинки для моменте M_ξ и M_η и оне суть $M_\xi = M_\eta = 0{,}0487\,qa^2$ а значения этих величин по Тимошенку $0{,}0479\,qa^2$ что представляет отклонение 1,7%. Максимальное значение Q_η есть на середине стороны $\eta = -\frac{1}{2}$ т. е. в точке $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Это значение $Q_{\eta\,\max} = 0{,}3520\,qa$ а егзактное решение $0{,}3380\,qa$ с отклонением от 4,1%. Концентрированные опоры в углах су $R = 0{,}0628\,qa^2$ с отклонинием от егзактного решения $0{,}0650\,qa^2$ от 3,4%.

Прогиби в середине пластинки, максимальные значения изгибающих моментов и перерезивающих сил и концентрированные сили в углах пластинки для разных соотношений страниц $\frac{b}{a}$ представлени в таблицах 2. и 3.

Таблица 2.

b/a		$10^2 w = \alpha\, qa^4/D$		$10^2 M_\xi = \beta\, qa^2$		$10^2 M_\eta = \gamma\, qa^2$	
		α	%	β	%	γ	%
1	метод апрокс. егзактно реш.	0,409 0,406	0,7	4,87 4,79	1,6	4,87 4,79	1,6
2	,,	1,028 1,013	1,5	10,36 10,17	1,8	4,72 4,64	1,7
3	,,	1,241 1,223	1,4	12,26 11,89	3,1	4,15 4,06	2,2
4	,,	1,294 1,282	0,9	12,58 12,35	1,8	3,92 3,84	2,1
∞	,,	1,321 1,302	1,5	12,82 12,50	2,5	3,83 3,75	2,1

Таблица 3.

b/a		$Q_\xi = \alpha_1\, qa$		$Q_\eta = \beta_1\, qa$		$R = \gamma_1\, qa^2$	
		α_1	%	β_1	%	γ_1	%
1	метод апрокс. егзактно реш.	0,352 0,338	4,1	0,352 0,338	4,1	0,063 0,065	3,4
2	,,	0,482 0,465	3,6	0,382 0,370	3,2	0,095 0,092	3,3
3	,,	0,499 0,493	1,2	0,386 0,372	3,7	0,096 0,093	3,2
4	,,	0,512 0,498	2,8	0,389 0,372	2,4	0,097 0,094	3,2
∞	,	0,516 0,500	3,2	0,389 0,372	2,4	0,098 0,095	3,1

Из таблици 2 можно сделать вывод что с увеличением соотношения $\frac{b}{a}$, прогиби и изгибающие моменти весьма быстро приближаються соответствующими значениями для полоски под равномерной нагрузкой т.е, для $\frac{b}{a} \to \infty$. При соотношению $\frac{b}{a} > 3$, расчет пластинки можно без большой ошибки заменить расчетом полоски.

4. Прямоугольная пластинка с двумя параллельными краями свободно опертими и двумя краями жестко заделанными под равномерной нагрузкой

В этом случае аппроксимирующую функцию $\varphi(\xi)$ тоже берём в форме (3.1). Постоянные общего решения, определяем из условия на $\eta = \pm \frac{b}{2a}$

$$(4.1) \qquad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0.$$

Для $\frac{b}{a} = 1$ получается: $C_1 = -0{,}03556 \frac{qa^4}{D}$: $C_2 = 0{,}77353 \frac{qa^4}{D}$ так что решение для упругой поверхности

$$(4.2) \qquad w(\xi, \eta) = \frac{qa^4}{D}(-0{,}03556 \operatorname{ch} \alpha\eta \cos \beta\eta + 0{,}77353 \operatorname{sh} \alpha\eta \sin \beta\eta + \\ + 0{,}04166) \cdot (\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$$

Прогиб в середине пластинки есть $0{,}001909 \frac{qa^4}{D}$ что представляет отклонение от егзактного решения величиной 0,57%. Определим значения моментов прогиба M_ξ, M_η в середине пластинки $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и момент M_η в середине заделанного края $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Для этих значений имеем

$$M_\xi = 0{,}0253\, qa^2; \quad M_\eta = 0{,}0343\, qa^2; \quad M_\eta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -0{,}0716\, qa^2$$

что в сравнении с егзактными значениями

$$M_\xi = 0{,}0244\, qa^2; \quad M_\eta = 0{,}0332\, qa^2; \quad M_\eta\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) = -0{,}0697\, qa^2$$

представляет отклонение 3,6%, 3,3%, 2,7% респективно. Упомянутие значения для разных соотношений страниц $\frac{b}{a}$ представленны таблицой 4.

Таблица 4.

b/a		$10^4\, w = \alpha \dfrac{qa^4}{D}$		$10^3\, M_\xi = \beta\, qa^2$		$10^3\, M_\eta = \gamma\, qa^2$		$10^3\, M_\eta = \delta\, qa^2$	
		α		β		γ		δ	
1	метод аппрокс.	19,1	0,6	25,3	3,7	34,3	3,3	71,6	2,7
	егзактно реш.	19,2		24,4		33,2		69,7	
3/2	,,	54,5	2,6	60,2	2,9	47,2	2,6	106,3	1,3
		53,1		58,5		46		104,9	
2	,,	87,2	3,3	89,1	2,5	48,5	2,3	123	3,2
		84,4		86,9		47,4		119,1	
3	,,	120,2	2,9	117,6	2,8	42,8	2,1	128,1	2,8
		116,8		114,4		41,9		124,6	
∞	,,	132,1	1,4	128,2	2,5	38,3	2,1	128,8	3
		130,2		125		37,5		125	

Из представленных решенний полученных только с одной аппроксимирующей функцией видна весьма удовлетворяющая точность расчета пластинок вариационным методом В. З. Власова, что позволяет решать и задачи которых егзактное решение неизвестно и не имеется приблизительное решение каким то другим способом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Власов В. З., *Избранные труды*, том 3, Изд. ,,Наука", М. 1964

[2] Тимошенко С., Войновски-Кригер, *Теория пластинок и оболочек* Бгд. 1962

[3] Медич Д., *Расчет консольных пластинок различных форм методом аппроксимирующих функций* (Сборник работ X Югославского Конгреса для рациональнную и прикладную механику, на серб.)

THE COMPUTING OF RECTANGULAR PLATES BY THE VARIATIONAL METHOD OF V. Z. VLASOV FOR DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS

D. Medić

Summary

Several problems concerning the solutions of rectangular plates for different boundary values are solved using the method of V. Z. Vlasov. It is established that the departures of the values obtained by that method from exact solutions are very small, for the choice of only one approximating function. Functions which define the elastic line of the transverse band, are taken as approximating ones.

Поступило 6 априля 1976.

Адресс

Институт механики, Университет в Белграде, Студентски трг 16, П.О.В. 550. 11000 Белград Югославия.