TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 2, pp. 3—6 1976.

UNIVERSALISATION DES ÉQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE LAMINAIRE DANS UN CAS DE CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE VARIABLE

Radomir Ašković

Introduction

Dans le cas d'un missile ou d'un avion se déplaçant à très grande vitesse, l'air dans la couche limite est ionisé par la chaleur de friction et la conductivité de l'air change avec la distance à la paroi. D'autre part, à telles vitesses on riencontre le phénomène d'ablation (transfert convectif du métal de la surface fondue du corps), qui fait aussi augmenter la conductivité de l'air. Il est difficle de prévoir théoriquement ces variations de conductivité. Rossow [1] a démontré expérimentalement que derrière une onde de choc la conductivité électrique σ est linéairement liée avec la vitesse dans la couche limite. C'est pourquoi, pour une étude qualitative de l'écoulement dans la couche limite on admet ordinairement que la conductivité σ est proportionnelle soit à la vitesse [2] soit au gradient de la vitesse au point considéré:

$$\sigma=\sigma_0 \frac{\nu}{U^2} \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1}$$

ce qui est le sujet de ce travail. L'expression (1) montre que σ devient égal à zéro à la frontière de la couche limite, ce qui veut dire que:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}=U \frac{dU}{dx}. \tag{2}$$

Équations de base

Les équations de la couche limite magnétohydrodynamique laminaire dans le cas où le nombre de Reynolds magnétique est petit, si bien que le champ magnétique induit par l'écoulement est négligeable par rapport à l'induction magnétique appliquée B, en l'absence du champ électrique et dans le cas de la conductivité σ variable d'après (1), peuvent s'écrire sous la forme:

$$u \frac{\partial u}{\partial x}+v \frac{\partial u}{\partial y}=U \frac{dU}{dx}+\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\nu}{U^2} N u \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{4}$$

où:

$$N = \frac{\sigma_0 B^2}{\rho}.$$

Les conditions aux limites sont:

(5) $$u = v = 0 \text{ pour } y = 0 \qquad u = U(x) \text{ pour } y = \infty.$$

Introduction des paramètres

Si l'on intègre l'équation (3) par rapport à y entre 0 et ∞, après quelques transformations on aura:

(6) $$\frac{d\ddot{Z}}{dx} = \frac{\dot{F}}{U},$$

où:

(7) $$\ddot{Z} = \frac{\ddot{\delta}^2}{\nu},$$

(8) $$\dot{F} = 2\left[\zeta - f_1(2 + H)\right] + g_1,$$

$$\dot{\delta} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \ddot{\delta} = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad H = \frac{\dot{\delta}}{\ddot{\delta}}, \quad \zeta = \left.\frac{\partial\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\ddot{\delta}}\right)}\right|_{y=0},$$

(9) $$f_1 = U'\ddot{Z}, \quad g_1 = \frac{\ddot{\delta}}{U} N,$$

Introduisons maintenant trois ensembles infinis de paramètres:

(10) $$f_k = U^{k-1} \frac{d^{(k)}U}{dx^{(k)}} \ddot{Z}^k,$$

(11) $$g_k = U^{k-2} N^k \ddot{\delta}^k,$$

(12) $$h_k = U^{-k}.$$

Alors, il est facile à obtenir les formules recurrentes comme suit:

(13) $$\left.\begin{aligned} U\ddot{Z}f_k' &= \left[(k-1)f_1 + k\dot{F}\right]f_k + f_{k+1} \equiv a_k, \\ U\ddot{Z}g_k' &= \left[(k-2)f_1 + \frac{1}{2}k\dot{F}\right]g_k \equiv b_k, \\ U\ddot{Z}h_k' &= -f_1 h_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Par conséquent, il est nécessaire à résoudre l'équation différentielle (6), afin de trouver $\ddot{Z}$ ou bien $\ddot{\delta}$, dont les paramètres sont composés, d'après (10) et (11).

Procédé de l'universalisation

Après l'introduction d'encore une variable:

$$\eta = A \frac{y}{\ddot{\delta}} \tag{14}$$

il est possible à calculer la formule de transformation dans le sens de convertir les paramètres, définis précédemment, en nouvelles variables au lieu de x:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{U\ddot{Z}}\left(-\frac{1}{2}\eta \dot{F}\frac{\partial}{\partial \eta} - f_1 \sum_{k=1}^{\infty} h_k \frac{\partial}{\partial h_k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial}{\partial f_k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\partial}{\partial g_k}\right). \tag{15}$$

Supposons, finalement, la fonction de courant sous la forme:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{A} U(x)\, \ddot{\delta}(x)\, Q(\eta, \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}), \tag{16}$$

où Q est une fonction réelle, continue et infiniment dérivable par rapport à toutes ses variables.

Si l'on introduit l'expression (16) dans les équations de la couche limite (3) et (4) — par l'intermédiaire des formules:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

tenant compte de (15), on obtient l'équation aux dérivées partielles sous la forme:

$$\begin{aligned} A^2 \frac{\partial^3 Q}{\partial \eta^3} - A g_1 \frac{\partial Q}{\partial \eta}\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + f_1\left[1 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\dot{F} Q \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} &= \\ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta \partial f_k}\frac{\partial Q}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial f_k}\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta \partial g_k}\frac{\partial Q}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial g_k}\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}\right) &+ \\ + f_1 \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\frac{\partial Q}{\partial h_k}\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta \partial h_k}\frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)&, \end{aligned} \tag{17}$$

avec les conditions:

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0 \text{ pour } \eta = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 1 \text{ pour } \eta = \infty. \tag{18}$$

Vu les variables choisies, l'équation (17) est universelle, car ni elle-même, ni les conditions aux limites (18), ne contiennent explicitement de données particulières du problème considéré. Elle peut donc être intégrée une fois pour toutes.

Il reste cependant à résoudre séparément, pour $U(x)$ donné, l'équation différentielle ordinaire (6), afin de déterminer les paramètres d'après (10) et (11), pris ensuite comme nouvelles variables. Cette tâche, plus ou moins difficile, est de toute façon faisable, pareillement à (2) en stationnaire ou bien à (3) en instationnaire.

NOTATIONS

x coordonnée longitudinale

y coordonnée normale,

u composante longitudinale de vitesse dans la couche limite,

v composante normale de vitesse dans la couche limite,

$U(x)$ vitesse extérieure de l'écoulement à potentiel,

B induction magnétique transversale,

N paramètre magnétique.

Lettres grecques:

η nouvelle variable normale,

ρ masse volumique,

ν viscosité cinématique,

σ conductivité électrique,

$\ddot{\delta}$ épaisseur de déplacement de la couche limite,

$\ddot{\delta}$ épaisseur de perte de quantité de mouvement dans la couche limite,

ζ contrainte tangentielle nondimensionnelle.

RÉFÉRENCES

[1] Rossow, V. J., *On Flow of Electrically Conducting Fluids over a Flat Plate in the Presence of a Traverse Magnetic Field*, NASA Rept. 1358, 1958.

[2] Boričić, Z., *Analiza jednog modela MHD graničnog sloja*, Zbornik radova II Jug. aerokosmonautičkog Kongresa, str. 149, I tom; Zagreb, 1975.

[3] Ašković, T. et Ašković, R., *Une contribution à l'étude de la couche limite magnétohydrodynamique d'un écoulement de révolution en régime non stationnaire.* Publications de l'Inst. Math., Nouvelle série, t. 17 (31), 1974.

UNIVERSALISATION OF THE HYDROMAGNETIC LAMINAR BOUNDARY LAYER EQUATIONS WITH VARIABLE ELECTRIC CONDUCTIVITY

Radomir Ašković

Abstract

In this article the universalisation of the magnetohydrodynamic laminar boundary layer equations on a body in the presence of some given magnetic field, with variable conductivity — linearly linked with the velocity gradient, is carried out.

Reçu le 27 novembre 1975

Mašinski fakultet, ul. 27 marta br. 80