TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 2 pp. 25—31, 1976.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

Ф. Л. Черноусько

Исследуются оптимальные способы управления некоторыми механическими колебательными системами. Разработан асимптотический метод построения оптимального управления, основанный на процедуре осреднения. Построены законы оптимального по быстродействию перемещения маятника в пространстве из точки в точку с гашением колебаний. Доклад основан на результатах работ [9, 10].

1. Метод осреднения в задачах оптимального управления

Пусть движение описывается системой

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y, u, \varepsilon), \qquad x(t_0) = x^0$$
$$\dot{y} = \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, u, \varepsilon), \qquad y(t_0) = y^0 \tag{1.1}$$

Здесь x есть n-мерный вектор ,,медленных" переменных; y-скалярная ,,быстрая" переменная (фаза); u – m-мерный вектор управляющих функций; ε-малый параметр; точкой обозначены производные по времени t; t_0, x^0, y^0-начальные данные. Скалярная функция $\omega(x)$, называемая частотой, предполагается достаточно гладкой и удовлетворяющей условию $\omega(x) \geqslant \omega_0 > 0$, где ω_0-постоянная. Функции X, Y предполагаются периодическими по y с периодом 2π.

По аналогии с неуправляемыми системами вида (1.1), системы (1.1) естественно назвать управляемыми системами с вращающейся фазой. К виду (1.1) приводится, как известно [1 – 3], широкий класс нелинейных колебательных и вращательных систем, содержащих малый параметр.

Для системы (1.1) поставим следующую задачу оптимального управления. Требуется найти кусочно-непрерывное оптимальное управление $u(t)$, не стесненное ограничениями, и соответствующую оптимальную траекторию $x(t)$, $y(t)$ на интервале $[t_0, T]$, для которых достигается минимум функционала

$$J = g(x(T), \varepsilon) \tag{1.2}$$

Здесь T-заданный момент окончания процесса. Предполагается, что интервал движения $[t_0, T]$ при $\varepsilon \to 0$ может быть асимптотически большим, а именно, $(T - t_0) \sim \varepsilon^{-1}$. Поэтому медленные переменные x согласно (1.1) могут измениться на величины порядка 1 за время движения.

Будем предполагать, что поставленная задача оптимального управления с функционалом (1.2) имеет единственное решение при отсутствии ограничений на управляющие функции (при любом достаточно малом $\varepsilon \neq 0$). Тогда оптимальное управление и траектория удовлетворяют принципу максимума [4], который для рассматриваемой системы (1.1) с функционалом (1.2) можно сформулировать следующим образом.

Обозначим через p n-мерный вектор переменных, сопряженных вектору x, через q скалярную сопряженную переменную, отвечающую координате y. Составим функцию Гамильтона

$$H(x, y, p, q, u, \varepsilon) = \varepsilon (p, X) + \varepsilon q Y + q \omega \tag{1.3}$$

Запишем сопряженную систему

$$\dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial (p, X)}{\partial x} - \varepsilon q \frac{\partial Y}{\partial x} - q \frac{\partial \omega}{\partial x}$$
$$\dot{q} = -\varepsilon \frac{\partial (p, X)}{\partial y} - \varepsilon q \frac{\partial Y}{\partial y} \tag{1.4}$$

и условия трансверсальности

$$p(T) = -\frac{\partial g(x(T), \varepsilon)}{\partial x}, \quad q(T) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь символом $(\,,)$ обозначено скалярное произведение векторсв, через $\partial/\partial x$ обозначены частные производные по компонентам вектора x.

При принятых предположениях искомое оптимальное управление доставляет максимум функции (1.4) по u для всех t из интервала $[t_0, T]$. Поскольку ограничения на u в задаче отсутствуют, то из условия максимума H по u вытекает требование $\partial H/\partial u = 0$. Пусть уравнение $\partial H/\partial u = 0$ однозначно разрешимо относительно вектора u. Тогда получим зависимость

$$u = V(x, y, p, q, \varepsilon) \tag{1.6}$$

где V предполагается достаточно гладкой функцией и периодична по y.

Поставим выражение (1.6) в уравнения (1.1), (1.4); получим краевую задачу (1.1), (1.4), (1.5) для функций $x(t)$, $y(t)$, $p(t)$, $q(t)$.

При помощи метода осреднения [1—3] исследуем асимптотическое решение полученной краевой задачи в первом приближении по малому параметру ε на большом интервале времени $(T - t_0) \sim \varepsilon^{-1}$. Отметим, что методы теории возмущений для приближенного решения задач оптимального управления развивались в [5, 6]. Слабо управляемые оптимальные системы на ограниченном при $\varepsilon \to 0$ интервале времени исследовались в работе [7]; управляемые системы в стандартной форме [1, 3] исследовались методом осреднения в [2]; системы типа (1.1) с $\omega = \text{const}$ (ω-вектор) рассматривались в работе [8].

Рассмотрим систему (1.1), (1.4), в которой u заменено согласно (1.6). Эта система формально не относится к системам с одной вращающейся фазой [1—3], так как переменная p не является медленной: скорость ее изменения при $\varepsilon = 0$ не обращается в нуль Однако, пользуясь граничным условием $q(T)=0$ из (1.5), можно свести эту систему к стандартному виду системы с одной вращающейся фазой y.

Для этого заметим, что исходная управляемая система (1.1) автономна и поэтому система (1.1), (1.4), (1.6) имеет первый интеграл, выражающий постоянство функции Гамильтона (1.3)

$$H^*(x, y, p, q, \varepsilon) \equiv H|_{u=V} = \varepsilon(p, X^*) + \varepsilon q Y^* + q\omega = C \tag{1.7}$$

Символ* означает, что аргумент u соответствующих функций заменен выражением (1.6), так что эти функции зависят от x, y, p, q, ε. Так как предполагается, что вектор $x(T)$ ограничен, то вектор $p(T)$ (см. (1.5)) также ограничен. Из (1.7), (1.5) следует, что $C=\varepsilon(p, X^*)_T$, т.е. $C=\varepsilon h$, где

$$h=(p, X^*)_T \tag{1.8}$$

причем постоянная h ограничена при $\varepsilon \to 0$. Из (1.7), (1.8) следует

$$q=\frac{\varepsilon}{\omega}[h-(p, X^*)-qY^*], \quad (\omega>0) \tag{1.9}$$

т.е. формально $q \sim \varepsilon$. Уравнение (1.9) при условии ограниченности частной производной правой части по q при $q=0$ можно однозначно разрешить относительно q

$$q=\varepsilon\frac{h-(p, X^*)}{\omega}+O(\varepsilon^2) \tag{1.10}$$

Уменьшим порядок системы (1.1), (1.4), подставив в нее (1.10)

$$\dot{x}=\varepsilon X_0^*(x, y, p)+O(\varepsilon^2), \quad x(t_0)=x^0, \quad p(T)=-g'_x(x(T), \varepsilon)$$

$$\dot{y}=\omega(x)+\varepsilon Y_0^*(x, y, p)+O(\varepsilon^2), \quad y(t_0)=y^0$$

$$\dot{p}=-\varepsilon\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\left[h-\left(p, X_0^*\right)\right]-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(p, X_0^*\right)+O(\varepsilon^2) \tag{1.11}$$

$$X_0^*=X^*(x, y, p, 0, 0) \quad Y_0^*=Y^*(x, y, p, 0, 0)$$

Предполагается, что для любого фиксированного $h \sim 1$ решение краевой задачи (1.11) существует и единственно

$$x=x(t, h, \varepsilon), \quad y=y(t, h, \varepsilon), \quad p=p(t, h, \varepsilon) \tag{1.12}$$

Чтобы найти решение исходной краевой задачи (1.1), (1.4) — (1.6), нужно удовлетворить краевому условию для q, которое будет определяющим уравнением для параметра h. Это уравнение имеет вид (1.8)

$$h=(p(T, h, \varepsilon), \quad X^*(x(T, h, \varepsilon), \quad y(T, h, \varepsilon), \quad p(T, h, \varepsilon), 0, \varepsilon)) \tag{1.13}$$

и, по предположению относительно существования решения оптимальной задачи (1.1), (1.2), имеет решение.

Из вида правой части (1.13) следует [9], что параметр h определяется, вообще говоря, неоднозначно, так как справа стоит быстро осциллирующая функция h с частотой порядка $1/\varepsilon$, а амплитуда осцилляций порядка единицы. Это уравнение допускает, как правило, много корней: порядка $[1/\varepsilon]$

корней при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Таким образом, решение исходной краевой задачи заведомо не единственно для малых значений $\varepsilon > 0$. Из допустимых корней уравнения (1.13) следует выбрать, очевидно, тот, который минимизирует величину функционала (1.2).

Переходим к построению приближенного решения системы (1.11), которая при заданном h является стандартной системой с одной вращающейся фазой y. Краевая задача первого приближения получается отбрасыванием членов $\sim \varepsilon^2$ в (1.11) и осреднением правой части по быстрой переменной y при фиксированных других аргументах

$$\frac{d\xi}{d\tau} = f(\xi, \psi), \quad \xi(\tau_0) = x^0, \quad \psi(\theta) = -g_0'(\xi(\theta))$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}[h - (f, \psi)] - \frac{\partial}{\partial \xi}(f, \psi) \tag{1.14}$$

$$\tau = \varepsilon t, \quad \tau_0 = \varepsilon t_0, \quad \theta = \varepsilon T$$

Здесь

$$f(\xi, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_0^*(\xi, y, \psi)\, dy, \quad g_0(\xi) = g(\xi, 0)$$

а переменные x, p заменяются на соответствующие осредненные ξ, ψ.

На основании метода осреднения [1—3] и сделанных выше замечаний о выборе h приходим [9] к следующей процедуре приближенного решения задачи (1.1), (1.2). Сначала строим однопараметрическое семейство решений $\xi(\tau, h)$, $\psi(\tau, h)$ краевой задачи (1.14) с параметром h. Далее выбираем h из условия минимума по h функционала

$$J_0(h) = g(\xi(\theta, h), 0) = g_0(\xi(\theta, h))$$

Определив таким образом значение $h = h_*$, получаем приближенное решение исходной задачи в виде

$$x(t) = \xi(\tau, h_*) + O(\varepsilon), \quad p(t) = \psi(\tau, h_*) + O(\varepsilon)$$

$$g(t) = O(\varepsilon), \quad y = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_0}^{\tau} \omega(\xi(\tau_1, h_*))\, d\tau_1 + y^0 + O(1)$$

$$\tau = \varepsilon t, \quad J = J_0(h_*) + O(\varepsilon)$$

Оптимальное управление определяется с погрешностью порядка ε, если в выражение (1.6) подставить $x = \xi(\tau, h_*)$, $p = \psi(\tau, h_*)$, $q = 0$, $\varepsilon = 0$. Отметим, что осредненная краевая задача (1.14) существенно проще исходной. Система (1.14) содержит $2n$ уравнений вместо $2n+2$ уравнений (1.1), (1.4). В ней отсутствуют быстрые переменные, и ее можно решать на ограниченном интервале медленного времени τ. Кроме того, система (1.14), как нетрудно проверить, имеет первый интеграл

$$\frac{1}{\omega(\xi)}[h - (f(\xi, \psi), \psi)] = \Phi = \text{const}, \tag{1.15}$$

который позволяет понизить ее порядок. Используя соотношение (1.15) для исключения h, можно показать [9], что систему (1.14) можно привести к каноническому виду с гамильтонианом

$$H_*(\xi, \psi) = (f(\xi, \psi), \psi) + \omega(\xi)\Phi = h = \mathrm{const}.$$

Изложенная методика позволяет строить приближенные решения задач оптимального управления конкретными колебательными системами (примеры см. в [9]).

2. Оптимальное перемещение маятника

Рассмотрим управляемую механическую систему в виде висящего груза (маятника), точка подвеса которого может двигаться по горизонтальной прямой со скоростью, ограниченной по величине. Считая колебания маятника малыми, запишем линейное уравнение колебаний под действием сил тяжести и сил инерции

$$I\ddot{\varphi} = -mgL\varphi + mLw \tag{2.1}$$

Здесь φ -угол отклонения маятника от вертикали, m-его масса, I-его момент инерции относительно точки подвеса, L-расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника, w-ускорение точки подвеса. Горизонтальное перемещение x и скорость v точки подвеса удовлетворяют соотношениям

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = w, \quad |v| \leqslant v_0 \tag{2.2}$$

где v_0-заданная постоянная. Движение системы начинается из покоя в момент $t=0$ и заканчивается в некоторый момент $t=T$, причем система снова должна покоиться. Обозначая через a полное перемещение маятника за время T, имеем

$$\begin{gathered}\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = x(0) = v(0) = 0 \\ \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = v(T) = 0, \quad x(T) = a\end{gathered} \tag{2.3}$$

Требуется найти такой закон изменения скорости $v(t)$, чтобы удовлетворялись все соотношения (2.1) — (2.3) и чтобы время движения T было минимальным. Поставленная задача представляет интерес в связи с исследованием оптимальных режимов работы подъемных кранов и других машин. Приведем ее точное решение, полученное в работе [10].

Оптимальный режим изменения скорости является кусочнопостоянным и состоит из n участков движения с максимальной скоростью

$$v(t) = v_0(-1)^{i+1}, \quad \sum_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum_{j=1}^{i} t_j, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

Для определения числа участков n и их длин t_j требуется сделать следующие вычисления. Положим

$$T_0 = \sqrt{I/mgL}, \quad k = \left[\frac{a}{2\pi v_0 T_0}\right] \tag{2.5}$$
$$b = \frac{a}{v_0 T_0} - 2\pi k, \quad (0 \leqslant b < 2\pi)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Затем найдем единственный в $[0, 2\pi]$ корень τ трансцендентного уравнения

$$\tau - 4(k+1)\arcsin\left[\frac{\sin(\tau/2)}{2(k+1)}\right] = b \tag{2.6}$$

После этого число n, время T оптимаьного быстродействия и интервалы t_j определяются формулами

$$n = 2k+3, \quad T = T_0(2\pi k + \tau)$$
$$t_1 = t_n = (\tau/2 - \alpha) T_0$$
$$t_2 = t_4 = \cdots = t_{n-1} = 2\alpha T_0 \tag{2.7}$$
$$t_3 = t_5 = \cdots = t_{n-2} = 2(\pi - \alpha) T_0$$
$$\alpha = \arcsin\left[\frac{\sin(\tau/2}{2(k+1)}\right]$$

Интересно отметить, что наряду с точным оптимальным решением (2.4) — (2.7) построено квазиоптимальное решение [10], состоящее всего из трех ($n = 3$) участков постоянства скорости $v(t)$ и отличающееся от оптимального по времени перемещения T менее, чем на 1,2%. Найденные законы управления реализованы практически на подъемных кранах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М., Физматгиз, 1963.

[2] Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, М., „Наука", 1969.

[3] В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем*, Изд-во Моск. ун-та, 1971.

[4] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, М., „Наука", 1969,

[5] Н. Н. Красовский, *Теория оптимального управления движением*, М., „Наука", 1967.

[6] Н. Н. Моисеев, *Численные методы в теории оптимальных систем*, М., „Наука", 1971.

[7] Ф. Л. Черноусько, *Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром*, Прикладная математика и механика, 1968, т. 32, вып. 1, 15—26.

[8] Ю. Г. Евтушенко, *Приближенні расчет задач оптимального управления*, Прикладная математика и механика, 1970, т. 34, вып. 1, 95—104.

[9] Л. Д. Акуленко, Ф. Л. Черноусько, *Метод осреднения в задачах оптимального управления*, Журнал вычислительной математики и математической физ., т. 15, № 4, 1975, 869—882.

[10] Ф. Л. Черноусько, *Оптимальное перемещение маятника*, Прикладная математика и механика, т. 39, вып. 5, 1975, 806—816.

OPTIMAL CONTROL OF SOME OSCILLATING SYSTEMS

F. L. Chernousko

Optimal motions of dynamical oscillating systems are considered. In the first part of the paper a general approach is developed for optimal control of nonlinear systems with a small parameter. The system is assumed to have the standard form of systems with a rotating phase. Problem of optimal control is reduced to two-point boundary problem which is analysed by means of Krylov-Bogoljubov asymptotic method of averaging. In the second part of the paper the explicit solution of one problem of optimal control is given. The system consists of a pendulum attached to a body moving with restricted velocity. Minimal time optimal solution which extinguish oscillations of the pendulum in the final state has several intervals of constant velocity. The results were applied for optimal control of cranes carrying swinging loads.

Поступило 6 апреля 1976

F. L. Chernousko, Institute for Problems of Mechanics, USSR Academy of Sciences, Leningradsky prospekt 7, Moscow A-40, 125040, USSR.