Teorijska i primenjena MEHANIKA 1, 1975.

ДЕКОМПОЗИЦИИ И АГРЕГИРИВАНИЕ В АНАЛИЗЕ СИСТЕМ

А. Мартынюк

1. **Постановка задачи**

Движение реальной материальной системы всегда можно свести к рассмотрению движения некоторой точки P от n переменных x_i, которое определялось бы дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.1}$$

Положим, что в области $\Omega(\mathscr{H}, \tau)$

$$\|x\| < \mathscr{H}, \ t \geqslant \tau \quad (0 < \mathscr{H} < \infty \ \tau \geqslant 0) \tag{1.2}$$

решение $x_i(t)$ системы (1.1) существует и единственно при $(t_0, x_i^0) \in \Omega_0 \subset \Omega$. Качественное изучение решения $x_i(t)$ системы (1.1) с ростом порядка системы (1.1) значительно усложняется и, начиная с некоторого n' становится практически невыполнимым. В этой связи возникает необходимость разработки методов, упрощающих проведение качественного анализа решений системы (1.1). Известны два общих подхода [1]. Первый — декомпозиция системы с последующим агрегированием переменных x^s к вспомогательной системе меньшей размерности, описывающей поведение некоторого семейства интегральных поверхностей, дестягивающих решения исходной системи. Второй — применение к декомпозированной системе векторных функций Ляпунова и интегральных неравенств.

В настоящей работе исследуются следующие задачи.

Задача 1. Установить условия устойчивости взаимодействующей обособленной подсистемы, описываемой переменными $x^s \in E_{r_s}$, $\sum_{s=1}^{m} r_s = n$ на бесконечном и заданном интервале времени.

Задача 2. Разработать алгоритм агрегирования переменных в системах большой размерности и на этой основе сформулировать условия устойчивости движения исходной системы высокого порядка.

Обе эти задачи имеют смысл и очень актуальны в связи с анализом и синтезом реальных систем, встречающихся в физике и технике.

2. Оценки устойчивости обособленной взаимодействующей подсистемы сложной системы

Пусть в результате декомпозиции система (1.1) представлена в виде m взаимосвязанных подсистем:

$$\frac{dx^s}{dt} = X_s(t, x^s) + \sum_{j=1\,(j \ne s)}^{m} C_{sj}(t, x)\, x^j, \quad 1 \leqslant s \leqslant m \tag{2.1}$$

с фазовыми векторами $x^s \in E_{r_s}$, матрицы $C_{sj}(t, x)$ характеризуют перекрестные связи между подсистемами и таковы, что

$$\bar{c}_{s_j} = \sup_{(x,\, t) \in \Omega_0} \frac{\|C_{sj}(t, x)\|}{\|x\|} \leqslant k < \infty.$$

Для k -ой взаимодействующей подсистемы

$$\frac{dx^k}{dt} = X_k(t, x^k) + \sum_{j=1\,(j \neq K)}^{m} C_{kj}(t, x)\, x^j \tag{2.2}$$

сформулируем условие устойчивости на основе скалярной локально большой [2] функции $\upsilon_k(t, x^k)$ построенной для свободной подсистемы (2.2) $\Sigma\, C_{kj}(t, x)\, x^j \equiv 0$; $x \in E_n$.

Теорема 2.1. Пусть:

1° существует функция $\upsilon_k(t, x^k)$ определенно положительная, допускающая бесконечно малый высший предел и непрерывно дифференцируемая по переменным $(x^k\, t)$;

2° в области $(\Gamma_A \setminus \Gamma_\lambda)\, x\, I_0 \subset \Omega(\mathscr{H}, \tau)$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial \upsilon_k}{\partial t} + [\operatorname{grad} \upsilon_k, X_k(t, x^k)] \leqslant C(t, \upsilon_k), \tag{2.3}$$

где $C(t, \upsilon_k)$ — монотонно возрастающая функция υ_k и непрерывная по t;

3° на любом конечном интервале $I_1 \subset I_0$ существует интеграл

$$T_k\ (t, x_0) = \int\limits_{t_0}^{t} (\mathrm{grad}\, \upsilon_k, \sum_{j-1\ (j \neq k)}^{m} C_{kj}\, x^j)\, dt, \tag{2.4}$$

который вычисляется вдоль решений $\bar{x}^s(t)$ подсистем

$$\frac{dx^s}{dt} = X_s\,(t, x^s) \quad x^s \in E_{r_s}$$

при $x^s\,(t_0) = x_0^s$, $1 \leqslant s \leqslant m$;

4° при условии $y \geqslant 0$ решение уравнения сравнения

$$\frac{dy}{dt} = C\,\bigl(t, y + T_k\,(t, x_0)\bigr) \tag{2.5}$$

а) устойчиво;
б) устойчиво равномерно по t_0;
в) асимптотически устойчиво;
г) асимптотически устойчиво равномерно по t_0;

5° при $y_1 = \upsilon_{K\,\sup}^{\|x^k\|}\,(t_1) - T_K\,(t_1, x_0)$ существует продолжаемое для всех $t \geqslant t_1$ верхнее решение $\bar{y}\,(t.\,t_1, y_1)$ уравнения сравнения (2.5).

Тогда: 1° если выполнены условия 1°—4°, то невозмущенное движение подсистемы (2.2) соответственно:

т) устойчиво;
б) устойчиво равномерно по t_0;
в) асимптотически устойчиво;
г) асимптотически устойчиво равномерно по t_0;

2° если выполнены условия 1° — 3°, 5°, то для функции $\upsilon_k\,(t, x^k)$ на решении $x^k\,(t)$ подсистемы (2.2) имеет место оценка

$$\upsilon_k\,\bigl(t, x^k\,(t)\bigr) \leqslant \bar{y}\,(t, t_1, y_1) + T_k\,(t, x_0) \tag{2.6}$$

при всех $t \geqslant t_1$.

Теорема 2.2. Взаимодействующая подсистема (2.2) (λ, A, t_0, T) — устойчива [3] если выполняются условия 1°—3°, 5° и верхнее решение $\bar{y}\,(t, t_1, y_1)$ уравнения сравнения (2.5) с начальным значением

$$y_1 = \upsilon_{k\,\sup}^{\|x^k\|}\,(t_1) - T_k\,(t_1, x_0)$$

удовлетворяет неравенству

$$\bar{y}\,(t, t_1\, y_1) < \upsilon_{k\,\inf}^{\bar{\Gamma}_A}\,(t) - T_k\,(t, x_0)$$

при всех $t \geqslant t_1$.

§ 3. Агрегирование переменных композиций систем.

Пусть задана композиция систем

$$\frac{dx^s}{dt} = f_s(x^s) + \mathcal{G}_s(x^1, \ldots x^{s-1}, x^{s+1}, \ldots, x^m), \tag{3.1}$$

где $x^s \in E_{r_s}$, f_s и $\mathcal{G}_s$ — вектор-функции связи соответствующей размерности. Предположим, что при $x_0^s \in G$ решение $x^s(t) = (x_1(t), \ldots, x_{r_s}(t))$ существует и единственно при $t \in I_0 = (0, \infty)$.

Рассмотрим функциональное пространство $\mathcal{B}$ (пространство Гильберта), элементами которого являются векторные функции $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ где $\varphi_s(x_s, \ldots, x_{r_s})$ есть некоторая функция, заданная в E_{r_s}. В подпространствах $G \subset E_{r_s}$ норму вектора x^s будем понимать евклидовой, а в $\mathcal{B}$ норму вектора φ определим формулой

$$\|\varphi\| = \left(\int\limits_{\Omega'} \sum_{s=1}^{m} \varphi_s^2 \, d\Omega' \right)^{1/2},$$

где Ω' — некоторая ограниченная область.

Зададим определенно положительные функции $\varphi_s(x^s)$ удовлетворяющие условию

$$\|\varphi\| \geqslant a(\|x\|), \tag{3.2}$$

где $a(r)$ — непрерывная, монотонно возрастающая функция r, $r \in [0, h]$, $h > 0$ — const обращающаяся в нуль при $r = 0$ и имеющая обратную функцию $a^{-1}(r)$.

Рассмотрим вспомогательные системы уравнений в частных производных пергово порядка:

$$\sum_{j=1}^{r_s} f_j \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} = \lambda_s \varphi_s + \psi_s(x_1, \ldots, x_{r_s}), \ 1 \leqslant s \leqslant m, \tag{3.3}$$

где λ_s — некоторые константы, $\psi_s(x_1, \ldots, x_{r_s})$ — произвольные функции, обеспечивающие совместно с $f_j(x^j)$ существование решения $U = U(\varphi, t)$ такого, что $U(\varphi, t)$ определенно при всех $t \in (-\infty, +\infty)$ и $U(\varphi, t) \in \mathcal{B}$ при $t \in (-\infty, +\infty)$, $U(\varphi, o) = 0$ Кроме того, $U(\varphi, t)$ непрерывно по обеим своим аргументам. Пусть далее при $\varphi = 0$ справедливо равенство $U(\varphi, t) = 0$. Учитывая (3.3), производная вектора

φ в силу системы (3.1) примет вид

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = \lambda_s \varphi_s + I_s (x_1, \ldots, x_n), \tag{3.4}$$

где

$$I_s = \sum_{j=1}^{r_s} \mathcal{F}_j (x^1, \ldots, x^{s-1}, x^{s+1}, \ldots, x^m) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \psi_s (x_1, \ldots, x_{r_s}).$$

Важно отметить, что агрегаты φ_s ($1 \leqslant s \leqslant m$) удовлетворяющие уравнениям (3.3), линейно независимы в любой области $\Omega' \subset \Omega$. То, что это действительно так, вытекает с очевидностью из способа задания элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и того, что

$$\Gamma(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \det \left\| \int_{\Omega'} \varphi_s \varphi_j \, d\sigma \right\| \neq 0,$$

где σ — некоторая мера области Ω'.

Определим теперь оператор $\mathcal{R}$, действующий на элементы φ_s:

$$\mathcal{R} \varphi_s = I_s (x_1, \ldots, x_n)$$

в подпространстве $\mathcal{B}'$ пространства $\mathcal{B}$, образованном линейными комбинациями $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

Далее следует определить элементы h_{sj} матрицы $\mathcal{H}$ так, чтобы

$$\mathcal{R} \varphi_s = \sum_{j=1}^{m} h_{sj} \varphi_j + \delta_s (x_1, \ldots, x_n) \tag{3.5}$$

и при этом

$$\| \delta(x) \| \to \min \quad x \in \Omega'. \tag{3.6}$$

При условии согласованности норм в области Ω' для вектора $\delta(x)$ можно указать число $L > 0$ такое, что равномеено по $x \in \Omega'$ справедлива оценка

$$\| \delta(x) \| \leqslant L \| \varphi(x) \|, \tag{3.7}$$

где $\| . \|$ — евклидова.

Теперь для системы (3.1) с учетом (3.7) рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{j=1}^{m} h_{sj} y_j + L(\Omega') \| y \|, \tag{3.8}$$

где $h_{sj} = h_{sj}^{\circ} + \lambda_s \delta_{sj}$, h_{sj}° — const, δ_{sj} — символ Кронекера.

Теорема 3.1. Для того, чтобы нулевое решение системы (3.1) было устойчиво достаточно, а при $f_s(x^s)$, имеющих ограниченные частные производные по x^s и необходимо, чтобы существовал вектор-агрегат φ, компоненты которого φ_s суть решения системы (3.3), обладающие свойствами

$$1^{\circ} \quad \|\varphi(x)\| \leqslant b\,\|x\|; \quad \sum_{s=1}^{m} |\varphi_s(x)| \geqslant a\,\|x\|, \quad (a, b) > 0 - \text{const};$$

$$2^{\circ} \quad \Phi \leqslant \widetilde{\mathscr{H}}\Phi, \quad \Phi = \operatorname{col}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m);$$

$$3^{\circ} \quad \|\delta(x)\| \to \min, \quad x \in \Omega';$$

4° для матрицы $\widetilde{\mathscr{H}} = \|h_{sj}\|$ выполняются условия Севастьянова-Котелянского

$$(-1)^s \begin{vmatrix} \tilde{h}_{11} & \ldots & \tilde{h}_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{h}_{s1} & \ldots & \tilde{h}_{ss} \end{vmatrix} = \gamma_s > 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant m.$$

В заключении отметим, что построение вспомогательной системы (3.8) и диференциального неравенства $\dot{\Phi} \leqslant \widetilde{\mathscr{H}}\Phi$ где матрица $\mathscr{H}$ — гурвицева, удовлетворяющая условиям позитивности ($h_{sj} \geqslant 0$, $j \neq s$) позволяет исследовать композиции систем, подсистемы которых не удовлетворяют условиям асимптотической устойчивости в целом. Теоремы §2 позволяют рассмотреть случай $C(t, \upsilon_k) \equiv 0$ (только устойчивая подсистема), а также случай, когда среди подсистем композиции (2.2) могут быть такие, что

$$\frac{\partial \upsilon_j}{\partial t} - (\operatorname{grad} \upsilon_j, X_j(t, x^j)) \geqslant k_j \quad (k_j > 0 - \text{const});$$

$$\frac{\partial \upsilon_r}{\partial t} - (\operatorname{grad} \upsilon_r, X_r(t, x^r)) \leqslant -g_r \quad (g_r > 0 - \text{const})$$

причем $$\sum_{j=1}^{l} k_j - \sum_{r=1}^{p} g_r \leqslant 0; \quad p + l \leqslant m.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мартынюк А. А., Задорожный В. Ф., Устойчивость движения сложных систем. Второй национальный конгресс теоретической и прикладной механики, Варна 8—14 октября 1973 г. Болгария. Резюме докладов.

[2] Мартынюк А. А. Техническая устойчивость в динамике, ,,Техника'', К, 1973.

[3] Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, изд-во АН СССР, М., 1962.

Резюме

Установлены условия устойчивости взаимодействующей обособленной подсистемы сложной системы на бесконечном и заданном интервале времени. Разработан алгоритм агрегирования переменных в системах большой размерности и на этой основе сформулированы необходимые и достаточные условия устойчивости движения композиции систем.

252001, Киев — I, ГСФ, Репина, 3, Институт математики АН УССР, А. А. Мартынюк.