Teorijska i primenjena MEHANIKA 1, 1975.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

М. Ф. Диментберг, А. А. Горбунов

При идентификации колебательных систем в условиях нормального функционирования априорная информация о системе во многих случаях оказывается недостаточной для определения параметров системы с хорошей точностью. Вместе с тем для практических целей, например, для выявления основного источника шума или вибраций машины, иногда достаточно получать ответы типа „или-или" (простейший пример такой ситуации-задача обнаружения периодического сигнала на фоне случайного шума, возникающая, например, при диагностике автомобильных двигателей [I]). Решение подобных задач проверки непараметрических гипотез о структуре системы или о характере действующих в ней возмущений необходимо также для построения качественно правильной модели системы, испоьзуемой при последующем более детальном ее анализе.

В данной работе получен теоретически (на основе решения уравнений теории марковских процессов) и проверен путем моделирования на аналоговой машине (АВМ) ряд критериев различения гипотез для нелинейных систем со случайными возмущениями; на АВМ проверялась также возможность распространения некоторых из этих критериев нт более сложные системы, для которых не удается получить теоретическое решение.

I. Рассмотрим задачу обнаружения автоколебаний в системе, возмущенной случайными воздействиями (такая задача возникает, например, при экспериментальном определении границ области устойчивости механических систем; первая формулировка и качественное ее решение даны в [2]). Пусть система описывается уравнением

$$\ddot{x} + h(x\,\dot{x}) + \Omega^2 x\,[1 + \xi(t)] = \zeta(t) \tag{1.1}$$

где $h(0, 0) = 0$, h имеет порядок μ, а стационарные широкополосные центрированные гауссовские процессы $\xi(t), \zeta(t)$ — порядок $\mu^{1/2}$ (μ — малый параметр). Требуется на основании измерений узкополосного процесса $x(t)$ определить, представляет ли этот процесс автоколебания системы (I.I), или он вызван исключительно возмущениями ξ, ζ, недоступными для измерений. Перейдя к новым переменным $b(t)$, $\psi(t)$ ($x = b\sin\theta$, $\dot{x} = \Omega b \cos\theta$, $\theta = \Omega t + \psi$) и применив метод усреднения Крылова-Боголюбова с учетом второго приближения для флуктуационных членов, получим укороченное уравнение для амплитуды (огибающей):

$$b = -f(b) + K_\zeta | b + 3K_\xi b + \eta_\zeta(t) - \eta_\xi(t)\ ;\ K_\xi = 1/8\ \pi\Omega^2\ \Phi_{\xi\xi}(2\Omega)$$

$$f(b) = \frac{1}{2\pi\Omega}\int_0^{2\pi} t\,(b\sin\theta, \Omega b\cos)\cos\theta\, d\theta; K_\zeta = \frac{\pi\,\Phi_{\zeta\zeta}(\Omega)}{2\Omega^2} \tag{1.2}$$

Здесь $\Phi(\omega)$ — спектральные плотности процессов, соответствующих индексам, а η_ζ, η_ξ — процессы типа белого шума с интенсивностями соответственно $2K_\zeta$ и $2K_\xi b^2$. Уранению (1.2) соответствует уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) относительно плотности вероятности $p(b)$ процесса $b(t)$:

$$\frac{d}{db}\left[\left(f(b) + \frac{K_\zeta}{b} + 3K_\xi b\right)p\right] = \frac{d^2}{db^2}\left[(K_\zeta + K_\xi b^2)\,p\right] \tag{1.3}$$

имеющее решение

$$p(b) = 2Cb\exp[-G(b)],\ G(b) = \int_0^b \frac{f(u)\,du}{K_\zeta + K_\xi u^2},\ C = \mathrm{const} \tag{1.4}$$

Введя новую переменную $y = b^2$, получим из (1.5) плотность вероятности $W(y)$ квадрата амплитуды:

$$W(y) = C\exp\left[-G(\sqrt{y})\right] \tag{1.5}$$

I. Исходной постановке задачи отвечает такая классификация систем (1.1): если $f(b)$ имеет единственный корень $b = 0$, то возможны лишь вынужденные колебания, в противном случае система автоколебательная (поскольку $f(b) \to \infty$ при $b \to \infty$ и в силу „грубости" реальной физической системы можно не рассматривать случай когда кривая $f(b)$ касается оси $b = 0$). Вычислив согласно (1.4), (1.5) производную $d(\ln W)/dy$, придем к критерию: если $W(y)$ монотонно убывающая при всех $y > 0$, то наблюдаются чисто вынужденные колебания, если же имеется конечный интервал (y_1, y_2) возрастания $W(y)$, то наблюдаемый процесс содержит автоколебательную компоненту; более того, если во втором случае $y_1 = 0$, то возбуждение автоколебаний „мягкое", если $y_1 > 0$ — то жесткое".

Этот критерий проверялся на АВМ для системы с $h(x, \dot{x}) = 2\alpha_1\dot{x} + 8\beta_1 x^2\dot{x}$ ($f(b) = \alpha_1 b + \beta_1 b^3$, $\beta_1 > 0$) и позволял безошибочно различать вынужденные колебания ($\alpha_1 > 0$) и автоколебания ($\alpha_1 < 0$); при проверке свойства монотонности $W(y)$ использовалось „сглаживание'' последовательности экспериментальных точек $W(y_i)$ по критерию „значимой разности'' [3]. В [3, 4] был выведен и проверен на АВМ другой критерий *Б*, основанный на проверке свойства мототонности плотности вероятности $W_1(x)$ исходного процесса $x(t)$ при $x > 0$; этот критерий — „смещенный'' и не позволяет обнаруживать автоколебания с очень глубокой модуляцией, но зато он может применяться и для неидеально узкополосных $x(t)$. В работе [5] критерий *Б* был проверен на АВМ для модели упругой системы, находящейся под действием неконсервативных сил (такие модели принципиально должны иметь не менее двух степеней свободы [6], и получить теоретическое решение для них не удается). Критерий *Б* позволял даже при интенсивных случайных возмущениях оценивать с точностью порядка 10% критическое значение „параметра неконсервативности'', соответствующее порогу устойчивости линеаризованной системы.

2. Обратимся к частному случаю $f(b) = \alpha_1 b + \beta_1 b^3, \alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ (неавтоколебательная система), для которого (1.4), (1.5) принимают вид

$$p(b) = 2\,C\,b\,(æ + b^2)^{(\varkappa\beta - \alpha)} \exp(-\beta b^2) \tag{2.1}$$

$$W(y) = C\,(æ + y)^{\varkappa\beta - \alpha} \exp(-\beta y) \tag{2.2}$$

где $\alpha = \alpha_1/2K_\xi$, $\beta = \beta_1/2K_\xi$, $æ = K_\zeta/K_\xi$. Для частного случая чисто параметрических возмущений ($æ = 0$) распределение (2.1) было получено в [7], где было показано, что в этом случае при $\alpha > 1/2\,p(b)$ имеет в точке $b = 0$ особенность, которая при $1/2 < \alpha < 1$ и $\alpha > 1$ будет соответственно интегрируемой и неинтегрируемой; это связано с тем, что значение $\alpha = 1$ соотвествует порогу стохастической устойчивости линейной системы, получаемой при $\beta_1 = 0$. Поставим теперь задачу: на основании измерений процесса $x(t)$ в нелинейной системе определить, будет ли соответствующая линейная система стохастически устойчива ($\alpha > 1$) или неустойчива ($\alpha < 1$). Результаты данного исследования показали, что практически удается получать ответ на этот вопрос при малых $æ\beta$, когда при $\alpha < 1$ преобладающий вклад в $x(t)$ вносят параметрические возмущения $\xi(t)$, а при $\alpha > 1$ — внешние возмущения $\zeta(t)$. Таким образом, это есть, по существу, задача о выявлении преобладающего механизма возбуждения колебаний.

Вычислив C из условия нормировки, найдем для случая $\alpha < 1$ среднее значение $\langle y \rangle$ квадрата амплитуды:

$$\langle y \rangle = \int y W(y) dy = \langle y \rangle_\xi + \langle y \rangle_\zeta,\ \langle y \rangle_\xi = (1-\alpha)/\beta,$$

$$\langle y \rangle_\xi = q^{(q-\alpha+1)} e^{-q}/\beta\,\Gamma(q - \alpha + 1),\ q = \varkappa\beta \tag{2.3}$$

где Γ — неполная гамма-функция.

Согласно (2.1) квадрат наиболее вероятного значения амплитуды равен

$$y_m = b_m^2 = \{1 - 2\alpha + [(1 - 2\alpha)^2 + 8\,æ\,\beta]^{1/2}\}/4\beta \tag{2.4}$$

(b_m — точка максимума $p(b)$). Если $æ\beta \ll |1 - 2\alpha|$, то в случае $1/2 < \alpha < 1$ согласно (2.3), (2.4) $y_m \approx æ$, $y_m \ll \langle y \rangle$, $\langle y \rangle_\xi \gg \gg y \langle_\varsigma$. Таким образом, условие $y_m \ll \langle y \rangle$ есть первый признак „преимущественно параметрических" колебаний, но он, вообще говоря, не является достаточным, так как несправедлив в случае $\alpha < 1/2$. Второй признак-знак кривизны функции $\ln W(y)$; при $æ = 0$, $\alpha < 1$ $(\ln W)'' < 0$, а при $æ \to \infty$ после предельного перехода получаем $(\ln W)'' < 0$; „граница" $(\ln W)'' = 0$ соответствует равенству $\alpha = æ\beta$, так как $(\ln W)'' = (\alpha - æ\beta)/(æ + y)^2$. При $\alpha = æ\beta$, $\langle y \rangle_\xi / \langle y \rangle_\varsigma = (1 - \alpha)/\alpha$, и в случае $\alpha < 1/2$ это отношение больше единицы.

Наконец, можно непосредственно находить α путем аппроксимации экспериментальной кривой $W(y)$ зависимостью (2.2) по методу наименьших квадратов. В экспериментах на АВМ применялся метод случайного поиска минимума суммарной разности квадратов Q. Эксперименты показали, что количественные значения a получаются не очень точными из-за малой чувствительности Q к изменениям α (причем аппроксимацию лучше проводить не при всех $y > 0$, а в диапазоне $y > \langle y \rangle$), однако различение состояний $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$ в выполненных экспериментах осуществлялось безошибочно.

3. Рассмотрим теперь систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta\dot{x}^3 + \Omega^2 x\,[1 + \lambda\cos 2\nu t] = \zeta(t) \tag{3.1}$$

в котором α, β, λ — малые величины, $\varsigma(t)$ — стационарный центрированный широкополосный гауссовский случайный процесс. Для случая $\chi = \Omega$ после замены переменных $x = x_1\cos\Omega t + x_2\sin\Omega t$, $\dot{x} = \Omega\,(-x_1 \times \times \sin\Omega t + x_2\cos\Omega t\ \text{сос})$ и усреднения по методу Крылова-Боголюбова получаем систему двух укороченных уравнений

$$\dot{x}_2 = -\,\partial u/\partial x_i + \eta_i(t)\ \ (i = 1{,}2),\ u(x_1, x_2) =$$
$$= 1/2\,\alpha\,(x_1^2 + x_2^2) + 3/32\,\beta\,\Omega^2\,(x_1^2 + x_2^2)^2 + 1/4\,\lambda\,x_1 x_2 \tag{3.2}$$

где $\eta_i(t)$, $i = 1, 2$ — некоррелированные белые шумы с одинаковой интенсивностью $D/2\,\Omega^2$. Стационарное уравнение ФПК относительно совместной плотности вероятности $p(x_1, x_2)$ имеет точное решение

$$p(x_1, x_2) = C_1\exp(-2u/D),\ C_1 = \text{const}. \tag{3.3}$$

Введем в (3.3) новые переменные b, φ по формулам $x_1 = b\cos\varphi$, $x_2 = b\sin\varphi$ и проинтегрируем результат по φ от нуля до 2π, а затем перейдем к переменной $y = b^2$. Тогда получим плотность вероятности квадрата амплитуды:

$$W(y) = C \exp\,[-(y + qy^2)/2\sigma^2]\, I_0(py/\sigma^2),\ C = \mathrm{const}$$

$$p = \lambda\Omega/8\alpha,\ q = 3\beta\Omega^2/16\alpha,\ \sigma^2 = D/4\alpha\Omega^2 \qquad 3.4$$

Здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя; при малых σ можно воспользоваться ее асимптотическим разложением для больших значений аргумента, и в результате получим

$$W(y) \approx C\sigma(2\pi py)^{-1/2} \exp\{[(2p-1)y - qy^2]/2\sigma^2\} \qquad (3.5)$$

Выражение (3.5) указывает на возможность обнаружения параметрически возбужденных колебаний в системе (3.1) при наличии дополнительных случайных возмущений. Действительно, необходимым и достаточным признаком параметрической устойчивости ($p < 1/2$) или неустойчивости ($p > 1/2$) линейной системы, получаемой из (3.1) при $\beta = 0$, является согласно (3.5) соответственно наличие или отсутствие свойства монотонности убывания $W(y)$ при всех $y > 0$. Хотя, как следует из точного выражения (3.4), при больших σ „пороговое" значение p оказывается несколько большим половины, этот критерий можно рекомендовать в дополнение к корреляционному методу обнаружения периодичностей, так как последний весьма чувствителен к небольшим флуктуациям частоты. Критерий был проверен на АВМ, в том числе и для случая $\nu \neq \Omega$.

Наконец рассмотрим такую задачу: как отличить $x(t)$ от колебаний линейной системы, вызванных внешним периодическим воздействием, т.е. от процесса $x_1(t)$, где

$$\ddot{x}_1 + 2\alpha_1\dot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = \lambda_1 \cos\nu_1 t + \varsigma_1(t) \qquad (3.6)$$

Выражение для плотности вероятности $W_1(y_1)$ квадрата амплитуды $y_1 = b_1^2$ процесса $x_1(t)$ получается из известной [7] зависимости для плотности вероятности амплитуды в виде

$$W_1(y_1) = C_1 \exp(-y_1/2\sigma_1^2)\, I_0\left(\sqrt{y_1 y_{01}}/\sigma_1^2\right) \qquad (3.7)$$

Аналогично (3.5) запишем

$$W_1(y_1) \approx 1/2\, C_1\sigma_1\left(2\pi\sqrt{y_1}\right)^{-1/2} \exp\left[\left(2\sqrt{y_1 y_{01}} - y_1\right)/2\sigma_1^2\right] \qquad (3.8)$$

Согласно (3.5) можно получить $(\psi - \psi_0)\,\mathrm{sign}\,(y - y_0) =$ $æz\ (æ = \mathrm{const})$, $\mathrm{sign}\ v = \pm 1$ при $v \gtrless 0$, $\psi = \ln\left(\sqrt{y}\,w\right)$, $z = (y - y_0)^2 \times$ $\times\,\mathrm{sign}\,(y - y_0)$, а согласно (3.8) $(\psi_1 - \psi_{01})\,\mathrm{sign}\,(y_1 - y_{01}) = æ_1 z_1$, $\psi_1 =$ $= \ln\left(\sqrt{y_1}\,w_1\right)$, $z_1 = \left(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_{01}}\right)^2 \mathrm{sign}\,(y_1 - y_{01})$; здесь y_0, y_{01} — наиболее вероятные значения переменных y, y_1, $\psi_0 = \psi(y_0)$, $\psi_{01} = \psi_1(y_{01})$. Таким образом, для экспериментально найденной плотности вероятности квадрата амплитуды строятся зависимости $\psi(z)$ и $\psi_1(z_1)$, и различение гипотез $x(t)$ и $x_1(t)$ осуществляется на основании того, какая из этих двух зависимостей ближе к линейной. Этот критерий был проверен на АВМ, в том числе и для случая $\nu \neq \Omega$, когда теоретическое решение (3.3) несправедливо.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Павлов Б. В. Акустическая диагностика механизмов. М., изд. ,,Машиностроение'', 1971.

[2] Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М., изд. Наука, 1966.

[3] Горбунов А. А., Диментберг М. Ф. О различении вынужденных случайных и автоколебаний, возмущенных случайными воздействиями. ,,Машиноведение'', 1970, № 6.

[4] Диментберг. М Ф. К задаче распознавания случайных вынужденных колебаний и автоколебаний. Известия АН СССР, Механика тв. тела, 1969, № 6.

[5] Горбунов А. А. Экспериментальная оценка границ области устойчивости систем, нагруженных неконсервативными силами, при наличии случайных воздействий. ,,Машиноведение'', 1971, № 3.

[6] Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., Физматгиз, 1961.

[7] Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., изд. Советское радио, 1961.

Summary

This report considers certain problems of testing nonparametric hypotheses concerning type of dynamical system and/or random excitation; the choice of the right hypothesis should be based on statistical analysis of random vibration data for the system under consideration. The problems considered include: distinguishing between randomly excited oscillations and self-excited oscillations perturbed by random disturbances; analysis of stochastic stability for linearized system basing on measurements of random vibrations in nonlinear system; detection of periodically-induced parametric oscillations in presence of random noise; distinguishing between vibrations, induced by parametrical and external periodic excitation in presence of random noise. Theoretical solutions of these problems are based on analytical expressions for probability densities of amplitudes, obtained as solutions of FPK-equations of theory of Markov processes. The criteria obtained were checked on analog computer; simulation on analog computer was used also for checking the possibility of extiapolation of these criteria to certain cases, for which the theoretical solutions could not be obtained.

Докт.техн. наук М.Ф. Диментберг, инж. А.А. Горбунов, Институт проблем механики АН СССР, Москва 125040, Ленинградский проспект 7.