Teorijska i primenjena MEHANIKA 1, 1975.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЛЕНТОПРОТЯЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Балтрушайтис Ю. Д., Андрюшкевичюс А. И

Лентопротяжный механизм (ЛПМ) применяется для транспортировки магнитной ленты в накопителях магнитной записи информации. Основным требованием для данного типа механизма является стабильность движения магнитной ленты.

Магнитная лента в ЛПМ является упругим элементам, связывающим узлы тролста и принимающим возмущения, возникающие в этих узлах. Узлы кассет и ведущего вала вызывают колебания ленты в продольном направлении с определенными частотами. Частоты собственных колебаний системы ЛПМ должны быть такими по величине, чтобы система работала не в зоне резонанса. Поэтому при конструировании ЛПМ необходимо знать частоты возмущающих колебаний, возникающих в узлах тролста, а также частоты собственных колебаний системы ЛПМ.

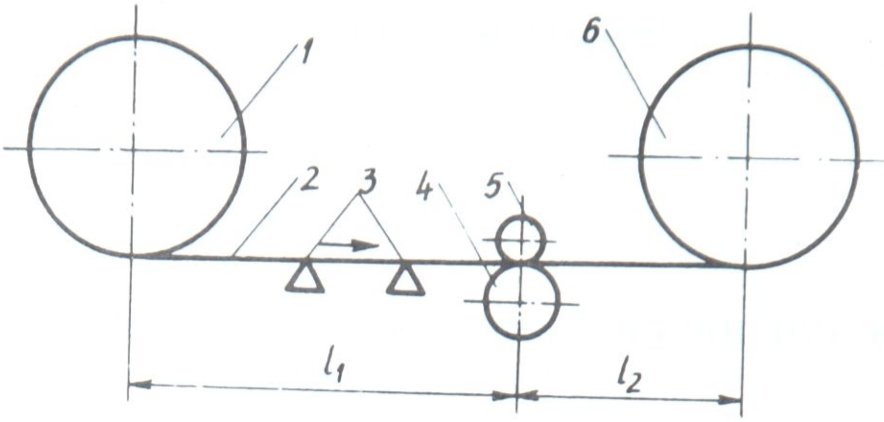
Для определения частот собственных колебаний ЛПМ принята прощенная динамическая модель, представлена на рисунке 1.

Плоская магнитная лента представляет собой гибкую пластинку, которая в процессе протягивания в ЛПМ получает продольные нагрузки. Из-за эффекта Пуассона, характеризуемого коэффициентом ν, лента деформируется также и в поперечном направлении. Поэтому, согласно уточненной теории [1], колебания магнитной ленты как упругого элемента ЛПМ описываются уравнением в виде

$$\frac{E}{\rho}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{(1-\nu)\,\text{б}}{12}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{E}{(1-\nu^2)\,\rho}\quad-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right]+$$

$$-\frac{(1-\nu^2)\,\rho\,\text{б}}{6\,E}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{E}{(1-\nu^2)\,\rho}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right]=0, \qquad (1.)$$

где $u - u(x, t)$, E — модуль упругости ленты, ρ — плотность материала, б — ширина ленты и ν — коэффициент Пуассона.



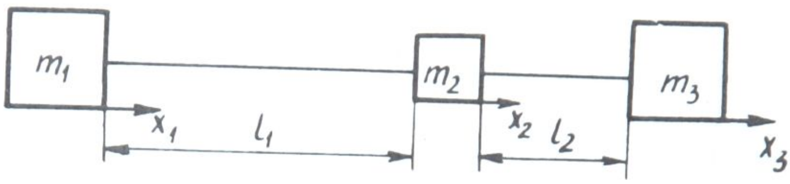


Рис. 1.

Схема лентопротяжного механизма. Q — упрощенная кинематическая схема, 1 — узел подающей кассеты, 2 — магнитная лента, 3 — магнитные головки записи-воспроизведения, 4 — прижимной ролик, 5 — узел ведущего вала, 6 —узел принимающей кассеты; b — расчетная схема, l_1, l_2 — расстояния между соотетствующими узлами тракта, m_1, m_2, m_3 — приведенные массы и x_1, x_2, x_3 — премещения элементов тракта ЛПМ.

Решение уравнения (1) будем ускать в виде

$$u(x, t) = X(x)\ T(t) \tag{2}$$

здесь $T(t)$ — функция, зависящая только от времени. Можно ее представить в виде

$$T(t) = e^{i\omega t}. \tag{3}$$

$X(x)$ — некоторая функция только координаты x, определяющая форму рассматриваемых колебаний и удовлетворяющая граничным условиям:

$$m_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\right)_{x=0} = -EF\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=0}, \tag{4}$$

$$m_2 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\right)_{x-l_1} = EF\left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x-0} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x-l_1}\right], \tag{5}$$

$$m_3\left(\frac{\partial^2 U^2}{\partial t^2}\right)_{x=l_2} = EF\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=l_2}, \tag{6}$$

где U_1 — перемещение ленты на участке между массами m_1 и m_2 (рис. 1), U_2 — перемещение ленты, соответственно, на участке между массами m_2 и m_3, F — площадь поперечного сечения ленты.

Подставляя (2) с учетом (3) в (1), получаем

$$\frac{12\,(1+\nu)\,\rho}{6\,E}\,\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + \left[\frac{(3-\nu)\,\delta}{12}\,\omega^2 - \frac{E}{\rho}\right]\frac{d^2 X(x)}{dx^2} +$$

$$+\left.\frac{(1-\nu^2)\,\rho\delta}{6\,E}\,\omega^4 - \omega^2\right]X(x) = 0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) для каждого участка ищем в виде

$$X_1(x) = \cos\beta_{1i}\,x + \lambda_1 \sin\beta_{1i}\,x,$$

$$X_2(x) = \cos\beta_{2i}\,x + \lambda_2 \sin\beta_{2i}\,x. \tag{8}$$

Подставляя уравнение (2) с учетом (3) и (8) в уравнения (4), (5) и (6) получаем

$$\frac{m_1\,\omega^2}{EF} = \lambda_1\,\beta_{1i}, \tag{9}$$

$$+\frac{m_2\,\omega^2}{EF} = \frac{\lambda_2\,\beta_{2i} + \beta_{1i}\,(\sin\beta_{1i}\,l_1 - \lambda_1\cos\beta_{1i}\,l_1)}{\cos\beta_{2i}\,l_1 + \lambda_2\cos\beta_{2i}\,l_2} \tag{10}$$

$$-\frac{m_3\,\omega^2}{EF} = \frac{\beta_{2i}\,(-\sin\beta_{2i}\,l_2 + \lambda_2\cos\beta_{2i}\,l_2)}{\cos\beta_{2i}\,l_2 + \lambda_2\cos\beta_{2i}\,l_2}. \tag{11}$$

Из условия непрерывности ленты получим, что

$$u_1(l_1\,t) = u_2(0, t), \tag{12}$$

или

$$\cos\beta_{1i}\,l_1 + \lambda\sin\beta_{2i}\,l_1 = 1, \tag{13}$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{1-\cos\beta_{1i}\,l_1}{\sin\beta_{1i}\,l_1}. \tag{14}$$

Из уравнения (10) с учетом (9), (13) и (14) получим

$$\lambda_2 = -\frac{\omega^2}{EF\beta_{2i}}(m_1 + m_2). \quad (15)$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (7) получаем

$$a_1\,\omega^4 - a_2\,\omega^2 + a_3 = 0, \quad (16)$$

где

$$a_1 = \frac{(1-\nu^2)\delta\rho}{6\,E},$$

$$a_2 = \frac{(3-\nu)\,\delta\,\beta_{ni}}{12} + 1,$$

$$a_3 = \left[\frac{\delta\,\beta^4 n_i}{12\,(1+\nu)} + \beta^2_{ni}\right]\frac{E}{\rho},\ n = 1, 2. \quad (17)$$

Величина a_1 на два, три порядка меньше величин a_2 и a_3, поэтому можно ее не учитывать. Тогда для определения частот собственных колебаний ЛПМ получим уравнение в виде

$$\omega^2 = \frac{[\delta\,\beta^2_{ni} + 12\,(1+\nu)]\beta^2_{ni}\,E}{[(3-\nu)\,\delta\,\beta^2_{ni} + 12]\,(1+\nu)\,\rho}. \quad (18)$$

Для более сложных — многомассных систем определение частот собственных колебаний значительно затруднено. При определении оптимальных параметров систем и частот собственных колебаний будем пользоваться матричными методами.

Исследуемая система считается отстроенной, если спектр частот собственных колебаний расположен вне резонанса опасных зон, т.е. зон, принимаемых запретными для частот собственных колебаний. Для того, чтобы выполнить требование отстройки спектра частот собственных колебаний относительно запретных зон, необходимо составить функционал цели, при котором минимизирующий или максимизирующий его вектор составлял бы решение поставленной задачи. Таким функционалом можно принять функционал вида [2]:

$$f\,(\vec{u}, \vec{x}) = \frac{(B\,(\vec{u})\,\vec{X}, \vec{X})}{\bar{X}\,\bar{X}},\ \text{где} \quad (19)$$

$$B\,(u) = \prod_{i=1}^{r}\left(A\,(\vec{u}) - \alpha_i\,H\right)\left(A\,(\vec{u}) - \gamma_1\,H\right), \quad (20)$$

$A(\vec{u})$ — симметричная матрица характеристического уравнения, H — единичная матрица, $\vec{u}$ — вектор варьируемых параметров, α_i, γ_i — соответственно левые и правые концы запретных интервалов. Функционал (19) является функцией Релея и его минимумом по $\vec{X}$ является наименьшим собственным значением μ_1 матрицы $B(\vec{u})$. В том случае, когда μ_1 положительно, спектр собственных значений матрицы A расположен вне запретных интервалов. Таким образом следует выполнить поиск такого вектора варьируемых параметров, при которых $\min\limits_{\vec{x}} f(\vec{u}, \vec{x}) \geqslant 0$.

Для этого достаточно определить $\max\limits_{\vec{u}} \min\limits_{\vec{x}} f(\vec{u}, \vec{x})$. В том случае, когда $\max\limits_{\vec{u}} \min\limits_{\vec{x}} f(\vec{u}, \vec{x})$ положительный — исследуемая система отстроена, а в противном случае при заданных ограничениях, наложенных на варьируемые параметры систему отстроить нельзя.

Однако, во избежание многократного вычисления минимального собственного значения матрицы $B(\vec{u})$, для определения которого, в случае матрицы высокого порядка, требуется затрата большого количества времени, причем точность вычислений понижается с ростом порядка матрицы, можно предложить другой функционал качества, основанный на оценке по модулю нижней границы собственных значений этой матрицы.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \min_{ij} [|d_{ii} + h| + |d_{jj} + h| - \sqrt{(|d_{ii} + h| - |d_{jj} + h_l|)^2 4 P_j P_{j_1}} \qquad (21)$$

где d_{ii}, d_{jj} — диагональные элементы матрицы $B(\vec{u})$,

$$P_i = \sum_{k=1}^{n}{}' |d_{ik}|; \quad P_j = \sum_{k=1}^{n}{}' |d_{jk}| \qquad (22)$$

штрих означает, что при суммировании пропускаются диагональные элементы

$$h = (\gamma_r - \alpha_1)^{2r}. \qquad (23)$$

Для того, чтобы минимальное собственное значение матрицы $B(\vec{u})$ стало положительным, достаточно найти такой вектор варьируемых параметров, при котором функционал удовлетворят условие

$$\Phi(\vec{u}) \geqslant h \tag{24}$$

При данных ограничениях, возложенных на варьируемые параметры, условие (24) может и не выполняться, но так как условие (24) не является необходимым для достижения положительного μ_1, то во время поиска необходимо определить вектор варьируемых параметров максимизирующий функционал (21). При этом векторе необходимо определить и величину μ_1. В том случае, когда $\mu_1 > 0$, спектр собственных значений матрицы $A(\vec{u})$ расположен вне запретных интервалов. При $\mu_1 < 0$ за функционал цели следует принять функционал (19).

Некоторые ЛПМ обладают тем свойством, что моменты инерции сосредоточенных масс, а также коэффициенты жесткостей упругих звеньев мало отличаются друг от друга. Матрица A характеристического уравнения таких механизмов может быть представлена в виду суммы двух матриц A и M, первая из которых характеризует системы с одинаковыми моментами инерции и одинаковыми жесткостями, а вторая является возмущающей матрицей. Определить оптимальные параметры, при которых спектр собственных значений матрицы A_0, по возможности, максимально отдален от концов запретных интервалов, довольно просто. Это обьясняется тем, что варьированию подлежат только два параметра, а частоты собственных колебаний такой системы аналитически выражаются через варьуемые параметры.

Для обеспечения расположения собственных значений матрицы A вне запретной области, необходимо через оптимальные параметры матрицы A_0, при помощи безразмерных параметров, выразить элементы матрицы M. Затем определить минимум квадрата евклидовой нормы матрицы M по вектору безразмерных параметров. В том случае, когда этот минимум не превышает минимального из расстояний между собственными значениями матрицы A. и ближаймими к ним концами запретных зон, собственные значения матрицы A расположены вне запретной области.

Некоторые ЛПМ обладают той или иной симметрией, элементы которой составляют группу. Отстройку спектра частот собственных колебаний таких систем относительно запретной области облегчает разложение матрицы характеристического уравнения на матрицы меньшего порядка. Оптимальные параметры могут быть определены при максимизации функционалов цели, размерности которых соответствуют размерностям блоков квазидиагональной матрицы характеристического уравнения.

В том случае, когда частоты собственных колебаний механизма расположены вне запретных интервалов желательно параметры системы подобрать с таким расчетом, чтобы расстояния между ближайшими к границам запретных интервалов квадратами частот собственных колебаний, с одной стороны и упомянутыми выше границами, с другой, принимали максимальные значения. Для этого нужно определить векторы варьируемых параметров, при которых функционалы принимают

$$f_j(\vec{u}) = \alpha_v - \mu_m^{(\alpha_v)}, \; \varphi_i(\vec{u}) = \mu_{m+1}^{(\gamma_s)} - \gamma_s \tag{25}$$

соответственно максимальные значения $f_j^{(0)}$ и $\varphi_i^{(0)}$. При поиске таких векторов нужно соблюдать ограничения, наложенные на варьируемые параметры и условие положительности минимального собственного значения матрицы $B(\vec{u})$. Здесь m и $m+1$ — номера квадратов частот собственных колебаний, наиболее близких к концам α_v и γ_s соответствующих запретных интервалов. Однако выполнение оптимальности по одному критерию может отрицательно сказаться на выполнении других требований. Поэтому нужно выбрать глобальный критерий оптимальности, который обьединяет функционалы цели (25) .Выполнение оптимизации по глобальному критерию приводит к компромиссному решению, которое может и не быть оптимальным ни для одного из функционалов цели (25), но наиболее приемлемым для всей их совокупности. Допустим, что потери по каждому критерию (25) равноценны. Тогда в качестве глобального функционала цели можно принять сумму отклонений всех функционалов цели (25) от своих оптимальных значений:

$$N(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{K} (f_j^{(0)} - f_j) + \sum_{i=1}^{P} (\varphi_i^0 - \varphi_i) \tag{26}$$

Вектор $\vec{u} = \vec{u}'$, минимизирующий функционал $N(\vec{u})$ является компромиссным решением поставленной задачи.

Определить экстремумы построенных функционалов при помощи регулярных методов (градиантного, наискорейшего спуска и т.д.) нельзя из-за отсутствия информации о выпуклости этих функционалов и области изменения варьируемых параметров. В настоящее время существует большое количество методов (метод статистических испытаний, метод оврагов и т.д.), позволяющих найти оптимальные параметры для невыпуклых многоэкстремальных функционалов. Для решения такой задачи нами был использован метод, предложенный СОБОЛЕМ и назван ЛП — поиском [3]. Преимущество этого метода по сравнению с методом случайного поиска заключается в том, что вместо случайных точек в многомерном кубе используются точки ЛП$_\tau$ последовательности. Последние распределены более равномерно, чем случайные. Их расчет на ЭЦВМ осуществляется довольно просто.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Балтрушайтис Ю. Д., Буда А. — В. А. Частоты собственных продольных колебаний магнитных лент. Научные труды вузов Лит. ССР „Вибротехника", 2 (15), 1972.

[2] Глазман И. М., Штейнвольф Л. И. Освобождение резонансно-опасных зон от собственных частот вибрационной системы варьированием ее параметров. — Изд. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.

[3] Гринкевич В. К., Соболь И. М., Статников Р. Б. Об одном методе поиска оптимальных параметров колебательной системы. — АН СССР, Машиностроение, 1971, № 1.

RESEARCH OF DYNAMICS OF TAPE TRANSPORTS

Baltruchaitis J. D., Andriushkevichius A. J.

Summary

Calculations of tape transports natural oscillation frequencies when elastic tape is …nnecting elements of mechanizm are given. Poisson's effect is taken into account when the …e is stretched in longitudinal direction. When the frequencies of forced vibrations are …wn the methods of calculation of optimal parameters of the system according to the …uencies of natural oscillations are given as well.