Teorijska i primenjena MEHANIKA 1, 1975.

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ПРИ ПОМОЩИ НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

М. М. Константинов С. П. Патарински П. Хр. Петков Н. Д. Христов

1. Основные обозначения

Пусть E, F — банаховые пространства с нормами $|\,.\,|_E$, $|\,.\,|_F$ (в дальнейшем под E будем понимать также n — мерное вещественное пространство R^n или какое-нибуть его замкнутое непустое подмножество Ω). Через $C_E(A)$ $\left(C_E^*(A)\right)$ будем обозначать пространство непрерывных (кусочно-непрерывных) функций, заданных на вещественном интервале A со означениями в E. Пусть далее $\mathcal{J}_T = (-\infty, T)$, $I = (O, T)$, где $T > O$, — вещественные интервалы. Если $x \in C_E(\mathcal{J}_T)$, то значения функции $x(t)$ на любом отрезке $\mathcal{J}_t$, $t \in I$, будем рассматривать как элемент пространства $C_E(\mathcal{J}_0)$, определяемый формулой $x_t = x_t(s) = x(t+s)$, $s \in \mathcal{J}_0$, т.е. $x_t(s)$ — сужение функции $x(s)$ на интервал $\mathcal{J}_t$. Таким образом дифференциально-функциональные уравнения будем записывать в виде $\dot{x}(t) = f(t\; x_t)$, $t \in I$; $x(t) = \varphi(t)$, $t \in \mathcal{J}_0$.

2. Постановка задачи

Основным обьектом изучения в теории оптимальных процессов до сих пор были преимущественно системы, в которых управление осуществлялость при помощи специальных внешних воздействии, каким — то образом связанных с текущим состоянием системы. Рассмотрим например систему, описываемую уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t,\; x_t, u_t), \quad t \in I \tag{1}$$

и начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathcal{J}_0. \tag{2}$$

Здесь $x \in C_E(\mathcal{J}_T)$, $f: I \times C_E(\mathcal{J}_0) \times C_F^*(\mathcal{J}_0) \to E$, а $u \in C_F^*(\mathcal{J}_T)$

— управляющая функция. которую надо подобрать таким образом, чтобы удовлетворялся заданный критерий качества: $L(u^0) \leq L(u)$, где u^0 — оптимальное управление. В качестве L обычно берут

$$L_0(u) = \int_0^{t_0} f^0\left((t, x(t), \ u(t)\right) dt, \quad t_0 \in I; \tag{3}$$

$$f^0 : [0, t_0] \times C_E(I) \times C_F^*(I) \to R^1,$$

при дополнитеоьном условии $x(t_0) = x^{(0)} \in E$, или

$$L_1(u) = \xi\left(x(t_1)\right), \quad t_1 \in I; \quad \xi : E \to R^1. \tag{4}$$

Существует необозримое число работ, посвященных обобщению и решению проблем теории оптимальных процессов. Для оптимальной задачи (1), (2), (3) укажем только на основаные методы ее решения: принцип максимума Пантрягина [1], [2] и метод динамического программирования Беллмана [3]. Для случая дифференциально-функционального уравнения в конечномерном пространстве задача (1), (2), (4) (так называемая задача об управляемости — о достижении заданного состоямия системы в определенное время t_1) решалась в [4] и в [5] — [8] в различных постановках. В [9] эта же задача рассматривалась для уравнения без запаздывания в банаховом пространстве.

Отметим общую особенность этих проблемов. Во всех случаях управление ведется за счет внешних воздействий при фиксированном начальном состоянии. Каждому критерию L_0 отвечает оптимальное управление $u^0(t)$, которое прождает движение $x^0(t)$, причем функция x^0 является решением уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t^0)$. Если рассмотрим семейство $\{L_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, критериев качества, то каждому элементу λ будет соответствовать оптимальное управление u^λ и уравнение $\dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t^\lambda)$. Таким образом изменение критерия ведет к переменной структуре рассматриваемого уравнения и оптимальное управление состоится в находении подходящей структуры уравнения (1) — (первый подход в теории оптимальных процессов).

Ясно, что с теоретической и практической точки зрения является необходимым создать соответствующую теорию оптимальных процессов, в которой удовлетворение критерия качества достигалось за счет подходящего выбора начального условия (2). Это мы будем называть управлением при помощи начальной функции. В этом случае мы не будем учитывать внешних управлящих воздействий типа $u(t)$ — (второй подход в теории оптимальных процессов).

Кончено, интерес представляет управление при помощи варирования как структуры уравнения, так и начального состояния. Хотя это и представляет обобщение двух первых подходов, ввиду недостаточной разработанности второго подхода мы общий подход не будем рассматривать.

Отметим, что при наличие подходящего критерия качества существует определенная связь между задачами об управлении при помощи начальной функции и об осуществлении програмного движения [10], [11], [12].

3. Управление при помощи начальной функции

Пусть движение системы описывается дифференциально-функциональным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t),\ t \in I \tag{5}$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t),\ \dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t),\ t \in \mathcal{J}_0. \tag{6}$$

Если рассмотрим задачу (5), (6), (4) об относительной управляемости [5], [7] при помощи начальной функции, то сразу обнаруживается связь с проблемом о точечной полноте [13], [14] уравнения (5). Так например при $\xi(x) = |x|_E$ или $\xi(x) = |x^{(1)} - x|_E$ и $x^{(1)} \in E = R^n$ условия разрешимости задачи (5), (6), (4) включаются в условиях точечной полноты уравнения (5). Здесь еще в линейном случае видно, что условия разрешимости задачи (5), (6), (4) — значительно менее ограничительны, чем условия разрешимости задачи (1), (2), (4).

Этот факт трудно обьяснить в общем случае, но нам кажется, что суть дела в следующем: при произвольном фиксированном начальном состоянии система может обладать слишком ,,плохими'' априорными качествами в отношении к конкретному критерию и внешным воздействиям ,,не удасться'' (при соответствующих ограничениях, накладываемых на эти воздействия) заметно улучшить их по истечению заданного время (см. пример 1).

Кроме того второй подход дает возможность ввести некоторые новые критерии качества, значительно более общие чем (4).

Обозначим решение начальной задачи (5), (6) через $x_\varphi \in X \subset C_E(\mathcal{J}_T)$ (далее будем предполагать существование и единственность этого решения), а через $\hat{x}_\varphi$ — сужение функции x_φ на интервал I.

Пусть $z \in Z \subset C_E(I)$, где Z — множество всех — $\hat{x}$, $x \in X$. Пусть кроме того начальная функция φ ищется в классе $\Phi \in C_E(\mathcal{J}_0)$ (или $\Phi \in C^*_E(\mathcal{J}_0)$.

Рассмотрим функционал

$$\omega(z, \varphi) = \| z - \hat{x}_\varphi \|_{C_E(I)}, \tag{7}$$

($\|\cdot\|_{C_E(I)}$ — некоторая норма в $C_E(I)$), определенный на множестве $Z \times \Phi$ и рассматриваемый как критерий качества, которого надо минимизировать подходящим выбором φ.

Определение 1. Управление при помощи начальной функции с учетом критерия (7) будем называть (ω, φ) — управлением.

Положим

$$\varepsilon = \varepsilon(z, \Phi) \overset{df}{=} \inf\{\omega(z, \varphi) : \varphi \in \Phi\} = \omega(z, \varphi^{(z)})$$

и

$$\mu = \mu(Z, \Phi) \overset{df}{=} \sup\{\omega(z, \varphi^{(z)}) : z \in Z\} = \omega(z^0, \varphi^{(z0)}).$$

Определение 2. Функцию $z \in Z$ будем называть (ε, Φ) — недостижимой.

Определение 3. Функцию $\varphi^{(z)} \in \Phi$ будем называть $(z, \Phi$ — оптимальной с точностью э.

Определение 4. Функцию $z^0 \in Z$ будем называть максимально (Z, Φ) — недостижимой или просто μ — недостижимой.

Определение 5. Функцию $\varphi^{(z0)} \in \Phi$ будем называть (Z, Φ) — оптимальной с точностью μ.

Определение 6. Систему (5) будем называть (Z, Φ) — управляемой с точностью μ.

Определение 7. Систему (5) будем называть вполне (Z, Φ) — управляемой, если $\mu = 0$.

Надо иметь ввиду, что функции $\varphi^{(z)}$ и z^0, вообще говоря, не определяются евинственным образом из — за возможности слипания решений [15] в сторону возрастающих t.

Отметим, что некоторые соображения насчет выбора начальных условий для систем без запаздывания высказывались еще в [16].

Для уравнений с отклоняющимся аргументом задача об управляемости обсуждалась в [13], а для уравнений нейтрального типа задача об (ω, φ) — управляемости внервые рассматривалась в [17], хотя и в несколько иной постановке. Некоторые результаты об управляемости выбором начальной функции систем с запаздыванием аннонсированы в [18]. Различные задачи об управлении в множестве начальных состояний рассматривались также в [19], [20].

4. Примеры

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$, $x(0) = x_0$, и задачу об относительной управляемости $x(t_1) = x_1$ при ограничении $|u| \leqq 1$. Ясно, что эта задача имеет решение только при определенном соотношении между x_0 и x_1. Так например при $a(x_0) < x_1 < b(x_0)$, где

$$a(x_0) = \begin{cases} x_0, x_0 \leqq -1 \\ e^{t_1}(x_0+1)-1, \ x_0 > -1 \end{cases}; \ b(x_0) = \begin{cases} e^{t_1}(x_0-1)+1, x_0 \leqq 1 \\ x_0, x_0 > 1, \end{cases}$$

задача не имеет решение.

В то же время задача об относительной управляемости $\dot{x}(t) = x(t)$, $x(t_1) = x_1$, при помощи подходящего выбора начального условия $x(0) = x_0$, очевидно всегда умеет решение $x_0 = x_1 e^{-t_1}$.

Пример 2. Рассмотрим скалярное уравнение нейтрального типа

$$\sum_{k=0}^{m} \left(a_k \dot{x}(t-\Delta_k) + b_k x(t-\Delta_k)\right) = 0, \ t > 0, \tag{8}$$

где a_k, b_k и Δ_k — постоянные, причем $0 \leqq \Delta_0 < \ldots < \Delta_m$.

Определим Φ как множество всех непрерывных функций на интервале $[-\Delta_m, 0]$ и пусть $Z = P_N$, где P_N — множество всех алгебрических полиномов от t степени не выше N.

Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы система, описываемая уравнением (8), была вполне (Z, Φ) — управляемой, является выполнение равенств

$$\sum_{k=0}^{m} \Delta_k^{\nu-1} (\nu a_k - b_k \Delta_k) = 0; \ \ \nu = 0, \ldots, N,$$

причем

$$\sum_{k=0}^{m} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \neq 0.$$

Отсюда видно, что необходимое условие для (Z, Φ) — управляемости этой системы есть $N < 2m + 1$. При выполнении этого неравенства всегда найдется такое уравнение вида (8), чтобы соответствующая система была вполне (Z, Φ) — управляемой.

Аналогичным образом можно сформулировать необходимые и достаточные условия для того, чтобы система была вполне (Z, Φ) — управляемой в случаях когда Z — множество тригонометрических полиномов от t, множество полиномов от e^t и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, Москва, 1961.

[2] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. „Наука", Моска, 1969.

[3] Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, Москва, 1960.

[4] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума для оптимизации систем с последействием. ДАН СССР, т. 194, № 5, 1970.

[5] Калман Р. Об общей теории систем управления. Тр. I Конгр. ИФАК, Изд-во АН СССР, Москва, 1961.

[6] Kalman R. Lectures on Controllability and Observability. Corso tenuto a Sasso Marconi. Bologna, 1968.

[7] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. „Наука", Москва, 1971.

[8] Крахотко В. В. Относительная управляемост систем с распределенным запаздыванием. ДУ, Т. 9, № 2, 1973.

[9] Fattorini H. On Complete Controllability of Linear Systems. J. Diff. Eq., v. 3, No. 3, 1967.

[10] Мансуров К. Построение множества систем дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, имеющих заданную интегральную кривую. Изв. АН Казах. ССР, сер. физ. мат. № 5, 1972.

[11] Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, ПММ, т. 16, вып. 6, 1952.

[12] Галиуллин А. С., Мухамедзянов И. Я., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д. Построение систем программного движения. „Наука", Москва, 1971.

[13] Weissl. On the Contollability of Delay — Differential Systems. SIAM J. Control, v. 5, No. 4, 1967.

[14] Зверкин А. М. О точечной полноте систем с запаздыванием, ДУ, т. 9, № 3, 1973.

[15] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. „Наука", Москва, 1972.

[16] Goodman T. System Identification and Prediction. Quar. Appl. Math., v. XXIX, No. 3, 1966.

[17] Байнов Д. Д., Константинов М. М. О прогнозировании и идентификации при линейных системах нейтрального типа. Математички весник, 9 (24), Св. 4, 1972.

[18] Забелло Л. Е., Копейкина Т. Б. Об управляемости выбором начальной функции систем с запаздыванием. Межд. Симп. по интегр., дифф. и функ. ур. — ям, Блед, 1973.

[19] Banks H. T., Kent G. A. Control of Functional Differential Equations of Retarded and Neutral Type to Target Sets in Function Space. SIAM J. Control, v. 10, 1972.

[20] Kikuchi N. On Control Problems for Functional-Differential Equations. Funkcial. Ekvac., v. 14, 1971.

PROBLEMS OF MOTION CONTROL BY MEANS OF INITIAL FUNCTIONS OF THE SYSTEM DESCRIBED BY DIFFERENTIAL—FUNCTIONAL EQUATIONS

М. М. Константинов, С. П. Патарински, П. Хр. Петков, Н. Д. Христов

Summary

The paper deals with a new class of problems related to the optimal control wherein the minimization criterion has been obtained by a corresponding selection of inital functions. The systems whose motion has been described by differential—functional equations are analyzed.

Высший Машинно-электротехнический институт
имени В. И. Ленина — София