

TRAITEMENT DE LA COUCHE LIMITE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE DE DIFFUSION AVEC UNE CONDUCTIVITE ELECTRIQUE VARIABLE EN REGIME NON STATIONNAIRE

Radomir Ašković

1. Introduction.

Vu que la conductivité électrique σ variable change essentiellement la valeur de la contrainte tangentielle pariétale, ainsi que le transfert de chaleur, par rapport au modèle, généralement accepté, $\sigma = \text{const}$, on peut conclure que l'hypothèse simplifiée $\sigma = \text{const}$ ne donne qu'une information grossière sur ce qui se passe dans la couche limite. Mais malheureusement, la vraie valeur de σ est tellement compliquée qu'on ne peut rien faire dans le cas où σ est une fonction non linéaire.

C'est pourquoi nous limiterons nos considérations au cas plan d'un écoulement d'un fluide incompressible autour d'un corps dont la surface est soluble dans le fluide environant, non-conducteur à l'infini. Cependant, la conductivité électrique σ du fluide à proximité du corps est définie par la concentration de masse c de la matière soluble. On prouve (1) que dans le cas d'une solution fortement adoucissante cette relation devient linéaire:

$$\sigma = k c \quad (1)$$

où $k = \text{const}$. Donc, c'est une des plus simples possibilités de l'écoulement d'un fluide avec une conductivité variable et, par conséquent, commode à l'attaquer.

2. Méthode de résolution.

Acceptons les hypothèses suivantes:

- a) conductivité électrique σ du fluide est une fonction linéaire de concentration de masse c ;

- b) fluide arrivant de l'infini amont est non-conducteur;
- c) champ électrique est partout égal à zero;
- d) coefficient de diffusion D est constant (écoulement isotherme);
- e) influence des forces exterieures volumiques à la diffusion est négligeable.

Un tel problème doit être traité par un système d'équations de deux couches limites: dynamique et de diffusion. Les deux couches limites sont liées mutuellement par la conductivité σ , figurant dans l'équation de la couche limite dynamique, mais déterminée (1) par l'équation de la couche limite de diffusion. Voici ce système des équations:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad (4)$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} u = v = 0, & \quad c = c_{oo}(x), & \text{pour } y = 0, \\ u = U(x,t), & \quad c = 0, & \text{pour } y = \infty \end{aligned} \quad (5)$$

Après application de l'hypothèse b) on tire de l'équation (2) la valeur du gradient de pression:

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (6)$$

A part des symboles déjà expliqués, on a ici encore: (x,y) – système de coordonnées cartésiennes; (u,v) – composantes de la vitesse dans la couche limite; t – coordonnée temporelle; ρ – densité du fluide; ν – viscosité cinématique; B – induction magnétique appliquée; $U(x,t)$ – vitesse extérieure de l'écoulement à potentiel, pratiquement définie presque toujours par $U = \Omega(t) V(x)$.

Des fonctions $\Omega(t)$, $V(x)$, $c_{oo}(x)$ sont des fonctions de la classe C^k , $0 \leq k \leq \infty$, dans le domaine considéré.

Le fait physique que, pour les premiers instants du mouvement suivant une trajectoire rectiligne d'un corps initialement au repos, tous les termes convectifs du système ont des valeurs très faibles par rapport aux autres termes, permet de définir un procédé d'approximations successives pour la solution des équations (2)–(4).

Soit u_0, v_0, c_0 une première approximation qui décrit les premiers instants du mouvement, u_1, v_1, c_1 une deuxième approximation tenant compte de

l'influence des termes convectifs, u_i, v_i, c_i des approximations ultérieures telles que les deuxièmes membres du système contiennent seulement des termes d'itérations précédentes déjà connus.

En introduisant donc dans le système (2)–(4) une décomposition en sommes à N termes:

$$u = \sum_{i=0}^N u_i(x, y, t), \quad v = \sum_{i=0}^N v_i(x, y, t), \quad c = \sum_{i=0}^N c_i(x, y, t),$$

nous pouvons alors décomposer ce système d'équations en une succession de système et de conditions aux limites:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\sigma B^2}{\rho} u_0 = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} = 0, \quad (7.3)$$

avec les conditions:

$$u_0 = v_0 = 0, \quad c_0 = c_0(x), \quad \text{pour } y = 0; \quad u_0 = U(x, t), \quad c_0 = 0, \quad \text{pour } Y = \infty;$$

Le système suivant s'écrit:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\sigma B^2}{\rho} u_1 = U \frac{\partial U}{\partial x} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = -u_0 \frac{\partial c_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial c_0}{\partial y}, \quad (8.3)$$

avec les conditions:

$$u_1 = v_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \text{pour } y = 0; \quad u_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \text{pour } y = \infty;$$

on a encore que:

$$\sigma_0 = k c_0. \quad (8.4)$$

On peut continuer ainsi pour u_i, v_i, c_i ($i = 2, 3, 4, \dots$). Bien qu'une démonstration générale de convergence de ce procédé pour $N \rightarrow \infty$ n'existe pas, on peut espérer que pour t suffisamment petit les termes u_1, u_2, \dots deviennent

rapidement négligeables non seulement à cause de la petitesse des termes convectifs dont une petite erreur n'affectera que peu les deuxièmes membres, mais aussi en raison du choix des conditions aux limites, identiquement nulles à partir de u_1, v_1, c_1 .

Il sera donc, en général, déjà suffisant de s'arrêter après la première itération u_1, v_1, c_1 dont les conditions aux limites tiennent déjà compte des termes convectifs de l'écoulement à potentiel.

3. Cas d'un mouvement uniforme de translation avec une vitesse constante.

Nous limiterons nos considérations au cas: $U(x,t) = t^\alpha V(x)$, $\alpha \geq 0$, où $V(x)$ est la solution de l'écoulement à potentiel correspondant au cas stationnaire. Nous choisirons plus particulièrement ici $\alpha = 0$, pour simplifier l'écriture. On peut, d'ailleurs, résoudre de la même façon le problème avec α quelconque.

Introduisons une nouvelle variable:

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}} \quad (9)$$

et supposons la solution de l'équation (7.3) sous la forme suivante:

$$c_o = c_{o0} \zeta_o(\eta) \quad (10)$$

Il s'en suit:

$$\zeta_o'' + 2\eta \zeta_o' = 0 \quad (11)$$

avec les conditions aux limites: $\zeta_o(0) = 1, \zeta_o(\infty) = 0$.

A l'aide de (8.4) l'équation (7.1) devient:

$$\frac{\partial u_o}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} + m \zeta_o u_o = 0, \quad (12)$$

où:

$$m = \frac{k c_{o0} B^2}{\rho} \quad (13)$$

Cherchons la solution de l'équation (12), pour les petites valeurs du paramètre „ mt ”, sous la forme d'une série, comme en (2):

$$u_o = V(x) / f'_{o,0}(\eta) + (mt) f'_{o,1}(\eta) + (mt)^2 f'_{o,2}(\eta) + \dots \quad (14)$$

Après introduction de l'expression (14) dans l'équation (12), on aura le système des équations différentielles ordinaires:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{D} f''_{0,0} + 2\eta f'_{0,0} &= 0, \\ \frac{\nu}{D} f'''_{0,1} + 2\eta f''_{0,1} - 4f'_{0,1} &= 4\zeta_0 f'_{0,0}, \\ \frac{\nu}{D} f'''_{0,2} + 2\eta f''_{0,2} - 8f'_{0,2} &= 4\zeta_0 f'_{0,1}, \end{aligned} \quad (15)$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} f_{0,0}(0) = f'_{0,0}(0) &= 0, & f'_{0,0}(\infty) &= 1, \\ f_{0,1}(0) = f_{0,2}(0) = f'_{0,1}(0) = f'_{0,2}(0) &= f'_{0,1}(\infty) = f'_{0,2}(\infty) = \dots = 0. \end{aligned}$$

Alors l'équation (7.2) nous offre:

$$v_0 = -2\sqrt{Dt} V'(x)/f_{0,0}(\eta) + (mt) f_{0,1}(\eta) + (mt)^2 f_{0,2}(\eta) + \dots/. \quad (16)$$

Après avoir introduit (10), (14) et (16) dans l'équation (8.3), pour $c_{0,0} = \text{const}$, on aura:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = c_{0,0} V'(x) \zeta'_0(\eta)/f_{0,0}(\eta) + (mt) f_{0,1}(\zeta'(\eta)) + (mt)^2 f_{0,2}(\eta) + \dots/ \quad (17)$$

Si l'on suppose la solution de cette équation sous la forme:

$$c_1 = tc_{0,0} V'(x)/\zeta_{1,0}(\eta) + (mt) \zeta_{1,1}(\eta) + (mt)^2 \zeta_{1,2}(\eta) + \dots/ \quad (18)$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \zeta'_{0,1} + 2\eta \zeta'_{1,0} - 4\zeta'_{1,0} &= 4\zeta'_0 f_{0,0}, \\ \zeta'_{1,1} + 2\eta \zeta'_{1,1} - 8\zeta'_{1,1} &= 4\zeta'_0 f_{0,1}, \\ \zeta'_{1,2} + 2\eta \zeta'_{1,2} - 12\zeta'_{1,2} &= 4\zeta'_0 f_{0,2}, \end{aligned} \quad (19)$$

avec les conditions:

$$\zeta_{1,0}(0) = \zeta_{1,0}(\infty) = \zeta_{1,1}(0) = \zeta_{1,1}(\infty) = \zeta_{1,2}(0) = \zeta_{1,2}(\infty) = \dots = 0.$$

Ensuite, l'équation (8.1), à l'aide de (14) et (16), devient:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + m\zeta_0 u_1 = \nu V'/(1 - f''_{0,0} + f_{0,0} f''_{0,0}) + (mt) (f_{0,0} f''_{0,1} + f''_{0,0} f_{0,1} -$$

$$- 2f'_{0,0} f'_{0,1}) + (mt)^2 (f_{0,0} f''_{0,2} + f_{0,1} f''_{0,1} + f''_{0,0} f_{0,2} - 2f'_{0,0} f'_{0,2} - f''_{0,1}) + \dots /$$

dont la solution peut être présentée comme suit:

$$u_1 = tVV' / f'_{1,0}(\eta) + (mt) f'_{1,1}(\eta) + (mt)^2 f'_{1,2}(\eta) + \dots / \quad (21)$$

Après la substitution de l'expression (21) dans l'équation (20), on tire le système suivant des équations différentielles ordinaires:

$$\frac{\nu}{D} f'''_{1,0} + 2\eta f''_{1,0} - 4f'_{1,0} = 4(f'^2_{0,0} - f_{0,0} f''_{0,0} - 1), \quad (22)$$

$$\frac{\nu}{D} f'''_{1,1} + 2\eta f''_{1,1} - 8f'_{1,1} = 4\zeta_0 f'_{1,0} + 8f'_{0,0} f'_{0,1} - 4f_{0,0} f''_{0,1} - 4f''_{0,0} f_{0,1},$$

$$\frac{\nu}{D} f'''_{1,2} + 2\eta f''_{1,2} - 12f'_{1,2} = 4\zeta_0 f'_{1,1} + 8f'_{0,0} f'_{0,2} + 4f'^2_{0,1} - 4(f_{0,0} f''_{0,2} + f_{0,1} f''_{0,1} + f''_{0,0} f_{0,2}),$$

avec les conditions:

$$f_{1,0}(0) = f'_{1,0}(0) = f'_{1,0}(\infty) = f_{1,1}(0) = f'_{1,1}(0) = f'_{1,1}(\infty) = \dots = 0.$$

En principe, on peut continuer le calcul des approximations ultérieures sans difficultés.

A l'aide du procédé, exposé ci—avant, notre problème est ramené au système des équations différentielles ordinaires (11), (15), (19), (22), qui peut être résolu numériquement pour chaque $\frac{\nu}{D}$ donné.

Malheureusement, il est impossible à démontrer rigoureusement la convergence des séries, provenues de la méthode. C'est pourquoi nous devrions au moins vérifier la convergence physique du procédé.

Il est à remarquer que dans les équations (15) et (22) figure le nombre du Prandtl de diffusion $S_c = \frac{\nu}{D}$. Dans la théorie de diffusion des mélanges il joue un rôle analogue au nombre de Prandtl au processus du transfert de chaleur. Il est bien connu [1] que pour les „solutions—liquides” $S_c = 1000$, tandis que pour les gaz $S_c = 1$.

Par la suite, nous allons prendre que $S_c = 1$, mais, pour l'instant, seulement dans le cas où un gaz peut être considéré comme incompressible. Si l'on admet, par exemple, qu'une erreur relative par rapport à la compressibilité ne dépasse pas 1%, alors dans le cas de l'air sous les conditions normales (température $T = 273+15^\circ$, vitesse du son 340 m/s) la vitesse de l'écoulement doit rester au dessous de 50 m/s [3]. Même, pour une vitesse de l'air voisine de 100 m/, l'erreur relative ne dépasse pas 4%

Or, les équations (11), (15), (19), (22) sont du type parabolique. Il est commode à exprimer leurs solutions, pour $S_c = 1$, par:

$$g_\alpha(\eta) = \frac{2^{\frac{1}{2}-n}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} D_{-1-2n}(\eta\sqrt{2}),$$

où $D_{-1-2n}(\eta\sqrt{2})$ représente la fonction du cylindre parabolique (4) de l'ordre $(-1-2n)$, pour $n \geq 0$, tandis que Γ est le symbole pour la fonction gamma.

Voici, maintenant, quelques solutions analytiques de nos équations, données comme illustrations, n'entrant pas dans les détails (5):

$$f_{00}(\eta) = \eta + g_{1/2}(\eta) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(3/2)},$$

$$f'_{01}(\eta) = \left(4 + \frac{8}{\pi}\right) g_1(\eta) - g_0(\eta) - 2g_{1/2}^2(\eta),$$

$$f'_{10}(\eta) = 2g_0(\eta) + \frac{1}{4}g_{-1}(\eta) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}g_{-1/2}(\eta) - \left(6 + \frac{8}{3\pi}\right)g_1(\eta) - 2g_0(\eta)$$

$$g_1(\eta) + 2g_{1/2}^2(\eta),$$

$$\zeta_0(\eta) = g_0(\eta),$$

$$\zeta_{10}(\eta) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}g_{-1/2}(\eta) - \left(2 + \frac{16}{3\pi}\right)g_1(\eta) - \frac{1}{4}g_{-1}(\eta) + 2g_0(\eta)g_1(\eta).$$

En additionnant, donc, les expressions (14) et (21) d'un côté, ainsi que (10) et (18) de l'autre – les solutions de deux couches limites (dynamique et de diffusion) sont trouvées, avec une certaine exactitude:

$$u = V(x)/f'_{00}(\eta) + (mt) f'_{01}(\eta) + \dots / + tVV'/f'_{10}(\eta) + (mt) f'_{11}(\eta) + \dots /, \quad (23)$$

$$c = c_{00} \zeta_0(\eta) + tc_{00} V'/\zeta_{10}(\eta) + (mt) \zeta_{11}(\eta) + \dots / . \quad (24)$$

A l'aide de ces solutions on peut, maintenant, calculer les profils des vitesses dans la couche limite, les épaisseurs de réfoulement et de perte de quantité de mouvement, déterminer la quantité de la matière transférée à travers l'unité de surface:

$$q_d = D \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0},$$

calculer le coefficient local du transfert de masse:

$$P_d = \frac{q_d}{|c_{00} - c_\infty|} \quad \text{e.t.c.}$$

En cadres de cet article nous nous limiterons à examiner un peu plus en détail le problème du décollement de la couche limite dans les circonstances de la variable conductivité σ :

Le point du décollement de la couche limite à la surface d'un cylindre est déterminé par:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,$$

d'où, tenant compte de (23):

$$f''_{0,0}(0) + t_{dec}/m f''_{0,1}(0) + V'(x) f''_{1,0}(0) + \dots = 0 \quad (25)$$

où, d'après les solutions données ci-avant:

$$f''_{0,0}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad f''_{0,1}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{4}{\pi}\right), \quad f''_{1,0}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right).$$

4. Exemple:

Prenons un cylindre de rayon R , mis brusquement en mouvement uniforme de translation avec la vitesse V_∞ . Puisque $V(x) = 2V_\infty \sin x/R$ on obtient facilement de l'équation (25) que:

$$1 + \frac{V_\infty t_{dec}}{R} / \left(1 - \frac{4}{\pi}\right) \frac{mR}{V_\infty} + 2 \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \cos \frac{x}{R} = 0. \quad (26)$$

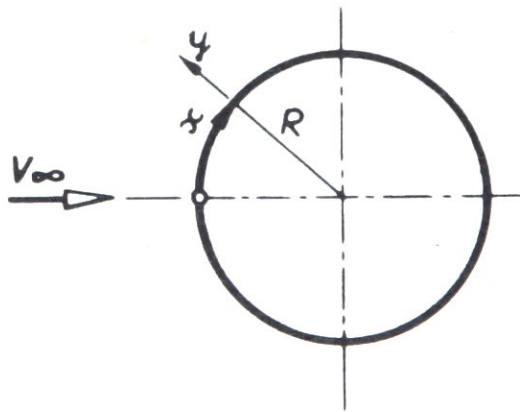


Figure 1

On voit de (26) que le premier décollement se produit au point d'impact postérieur ($\cos \frac{x}{R} = -1$) et la distance parcourue par le cylindre jusqu'au

premier décollement ($s_{dec} = V_{\infty} t_{dec}$) est définie par:

$$\frac{s_{des}}{R} = \frac{1}{\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) M + 2\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)}, \quad (27)$$

où apparaît un paramètre magnétique M:

$$M = \frac{mR}{V_{\infty}} = \frac{kc_{oo} B^2 R}{V_{\infty}}$$

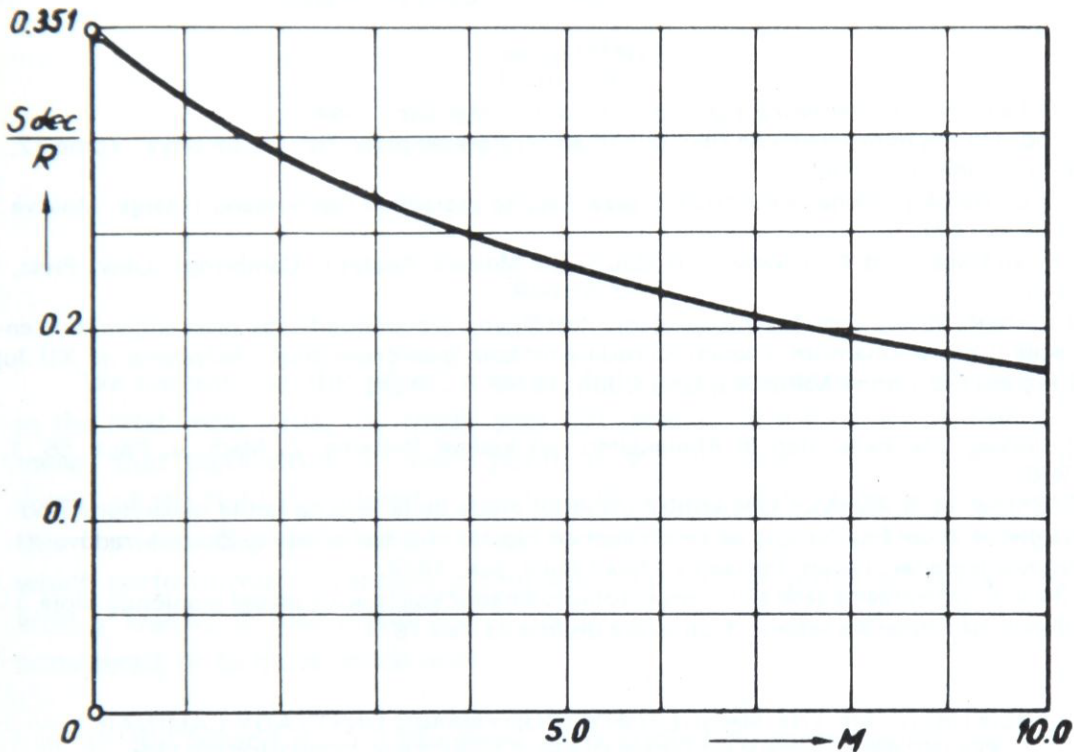


Figure 2

Dans le cas d'un fluide non-conducteur $M = 0$ et on calcule de (27) que:

$$\lim_{M \rightarrow 0} \left(\frac{s_{des}}{R} \right) = \frac{3\pi}{6\pi + 8} = 0.351,$$

ce qui est la valeur déjà trouvée par Blasius (6).

5. Conclusion.

La formule (27), ainsi que la figure 2 qui la reflète, montre que la distance de décollement s_{dec} diminue avec l'augmentation du paramètre magnétique M, ce qui

est contraire au cas de la conductivité électrique constante [7]. Notons que le même effet se produit dans le cas stationnaire [8], avec (et sans) conductivité variable.

Physiquement, cela peut être expliqué par le fait que dans le cas d'une conductivité constante (9) le gradient de pression contient le terme $\sigma B^2 U$, dont „l'effet d'accélération” surmonte „l'effet de ralentissement”, exprimé par le terme $\sigma B^2 u$; tandis que dans le cas actuel cet „effet d'accélération” n'existe plus (6).

Références

- [1] V.G.Levi: Fiziko—hemijska gidrodinamika. Fiz. Mat.Giz., 1954.
- [2] J.Pop: On the hydromagnetic flow due to an accelerated plate. Rev.Roum.phys., Tome 12, No 9, p. 865—867, 1967.
- [3] L.G.Loicjanskij: Mehanika židkosti i gaza. četvrto prerađeno i dopunjeno izdanje, Moskva 1973, str. 127.
- [4] T.E.Whittaker and N.G.Watson: A Course of Modern Analysis. Cambridge, Univ. Press, 1946.
- [5] R.Ašković: Prilog proučavanju strujanja nestišljivog provodnog fluida promenljive koncentracije u nestacionarnom magnetohidrodinamičkom graničnom sloju. Saopšteno na XII Jug. Kongresu rac. i prim. Mehanike, Ohrid, Jun, 1974.
- [6] H.Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. u. Phys. 56, 1, 1908.
- [7] T.Ašković et R.Ašković: Une contribution à l'étude de la couche limite magnétohydrodynamique d'un écoulement de révolution en régime non stationnaire. Zbornik radova XI Jug.Kongresa rac. i prim. Mehanike, Baško Polje, Jun, 1972.
- [8] Z.Boričić: Univerzalne jednačine magnetohidrodinamičkog (stacionarnog) graničnog sloja i njihova parametarska rešenja. Doktorska disertacija, Niš 1971.

TREATMENT OF THE MAGNETOHYDRODYNAMIC UNSTEADY LAMINAR BOUNDARY LAYER WITH VARIABLE ELECTRIC CONDUCTIVITY

Abstract:

The unsteady laminar magnetohydrodynamic boundary layer on a body in non—uniform motion in the presence of some given magnetic field, with variable conductivity — linearly linked with the mass concentration of the dissolved matter of body surface, is discussed.