

ОБ ОЦЕНКАХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ

Сергей Ю. Тихонов

Communicated by Miroslav Jevtić

РЕЗЮМЕ. В работе рассматриваются функции из пространства L_p , такие что их преобразованные ряды Фурье (в частности, дробные производные в смысле Вейля) принадлежат L_p . Получены оценки модуля гладкости дробного порядка преобразованного ряда Фурье через модули гладкости самой функции. Приведены утверждения, показывающие точность этих оценок на некоторых классах функций.

1. Введение

Пусть L_p ($1 < p < \infty$) — пространство всех 2π -периодических измеримых функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_p = (\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx)^{1/p} < \infty$. Определим модуль гладкости функции $f(x)$ порядка β ($\beta \in \mathbf{R}_+$) следующим образом:

$$\omega_\beta(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\beta(\beta-1) \cdots (\beta-\nu+1)}{\nu!} f(x + (\beta-\nu)h) \right\|_p.$$

Будем записывать ряд Фурье функции $f(x)$ в форме

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x).$$

Тогда $\sigma(f, \lambda)$ — преобразованный с помощью последовательности $\{\lambda_n\}$ ряд Фурье функции $f(x)$, т.е. $\sigma(f, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n A_n(x)$. Через $f^{(r)}(x)$, $r > 0$, обозначим r -ую производную Вейля функции $f(x)$. Если $f^{(r)}(x) \in L_p$, $1 < p < \infty$, то можно считать, что ее ряд Фурье есть $\sigma(f, \lambda)$, где $\lambda_n = n^r$.

Запись $I_1(f, \delta) \ll I_2(f, \delta)$, означает, что существует константа $C > 0$, не зависящая от f и от δ , но, быть может, зависящая от других параметров,

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 42A16; Secondary 41A25.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 03-01-00080 и 03-01-06155) и программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-1657.2003.1).

и такая, что $I_1(f, \delta) \leq C I_2(f, \delta)$. Если одновременно $I_1(f, \delta) \ll I_2(f, \delta)$ и $I_1(f, \delta) \ll I_2(f, \delta)$, то пишут $I_1(f, \delta) \asymp I_2(f, \delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей (соответственно, почти убывающей) на (a, b) , если она положительна, измерима на (a, b) и для любых $a < t_1 \leq t_2 < b$ существует не зависящая от них положительная константа C , такая что выполняется неравенство $\varphi(t_1) \leq C\varphi(t_2)$ (соответственно, $\varphi(t_1) \geq C\varphi(t_2)$).

В работе [1] приводятся оценки $\omega_\beta(f^{(r)}, t)_p$ через $\omega_{k+\beta}(f, t)_p$ при фиксированных k и β для случаев: (a) $r = k$, (b) $r = k - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < k$), (c) $r = k + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \beta$).

В работе [2] вместо последовательности $\lambda_n = n^{k-\varepsilon}$ (что соответствует случаю (b)) рассмотрено ее обобщение: $\lambda_n = \varphi(1/n)$, где функция $\varphi(t)$ обладает некоторыми свойствами и доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА А1. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leq \min(2, p)$ и пусть $k_1, \beta > 0$, а монотонная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $\exists \varepsilon_1 > 0$, такое что $\varphi(t)t^{\varepsilon_1}$ почти убывает на $(0, 1)$,
- (2) $\exists \varepsilon_2 > 0$, такое что $\varphi(t)t^{k_1-\varepsilon_2}$ почти возрастает на $(0, 1)$.

Если для $f \in L_p$ выполнено условие

$$\int_0^1 \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_1+\beta}^\theta(f, t)_p dt < \infty,$$

то существует функция $\psi \in L_p$, имеющая ряд Фурье $\sigma(f, \lambda)$, где $\lambda_n = \varphi(1/n)$, и для любого $\delta \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство

$$\omega_\beta(\psi, \delta)_p \ll \left\{ \delta^{\beta\theta} \int_\delta^1 \frac{\varphi^\theta(t)}{t} t^{-\beta\theta} \omega_{k_1+\beta}^\theta(f, t)_p dt + \int_0^\delta \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_1+\beta}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta}.$$

ТЕОРЕМА А2. Пусть $1 < p < \infty$, $\max(2, p) \leq \tau < \infty$, пусть $k_1, \beta > 0$, а монотонная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы А1. Если для $f \in L_p$ ряд $\sigma(f, \lambda)$, где $\lambda_n = \varphi(1/n)$, есть ряд Фурье некоторой функции $\psi \in L_p$, то для любого $\delta \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство

$$\omega_\beta(\psi, \delta)_p \gg \left\{ \delta^{\beta\tau} \int_\delta^1 \frac{\varphi^\tau(t)}{t} t^{-\beta\tau} \omega_{k_1+\beta}^\tau(f, t)_p dt + \int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t} \omega_{k_1+\beta}^\tau(f, t)_p dt \right\}^{1/\tau}.$$

В данной работе получены обобщения оценок модуля гладкости для случая (c).

ТЕОРЕМА Б1. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leq \min(2, p)$, $\max(2, p) \leq \tau < \infty$, пусть $k_2, \beta > 0$, а монотонная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $\exists \varepsilon_1 > 0$, такое что $\varphi(t)t^{k_2+\varepsilon_1}$ почти убывает на $(0, 1)$,
- (2) $\exists \varepsilon_2 > 0$, такое что $\varphi(t)t^{k_2+\beta-\varepsilon_2}$ почти возрастает на $(0, 1)$.

Если $f \in L_p$, и выполнено условие

$$\int_0^1 \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_2+\beta}^\theta(f, t)_p dt < \infty,$$

то существует функция $\psi \in L_p$, имеющая ряд Фурье $\sigma(f, \lambda)$, где $\lambda_n = \varphi(1/n)$, и для любого $\delta \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство

$$(1) \quad \left\{ \delta^{(k_2+\beta)\tau} \varphi^\tau(\delta) \int_\delta^1 \frac{t^{-(k_2+\beta)\tau-1}}{\varphi^\tau(t)} \omega_\beta^\tau(\psi, t)_p dt \right\}^{1/\tau} \ll \left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_2+\beta}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta}.$$

ТЕОРЕМА Б2. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leq \min(2, p)$, $\max(2, p) \leq \tau < \infty$, пусть $k_2, \beta > 0$, а монотонная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (1), (2) теоремы Б1. Если для $f \in L_p$ ряд $\sigma(f, \lambda)$, где $\lambda_n = \varphi(1/n)$, есть ряд Фурье некоторой функции $\psi \in L_p$, то для любого $\delta \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство

$$(2) \quad \left\{ \delta^{(k_2+\beta)\theta} \varphi^\theta(\delta) \int_\delta^1 \frac{t^{-(k_2+\beta)\theta-1}}{\varphi^\theta(t)} \omega_\beta^\theta(\psi, t)_p dt \right\}^{1/\theta} \gg \left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t} \omega_{k_2+\beta}^\tau(f, t)_p dt \right\}^{1/\tau}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частном случае, когда функция $\varphi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, и, соответственно, $\lambda_n = n^r$, утверждения, соответствующие Теоремам А1 и А2 (для случая $r < k$) и Теоремам Б1 и Б2 (для случая $k < r < k + \beta$), содержатся в работе [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выражения, которые стоят в левых частях неравенств (1) и (2), нельзя одновременно заменить на $\omega_\beta(\psi, \delta)_p$.

О точности Теорем Б1 и Б2 говорят следующие утверждения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если функция $f(x) \in L_p$, ($1 < p < \infty$) имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx$ с квазимонотонными коэффициентами, т.е. $\exists \gamma \geq 0$, такое что $a_n n^{-\gamma} \downarrow 0$, то утверждения Теорем Б1 и Б2 справедливы при замене условий $0 < \theta \leq \min(2, p)$, $\max(2, p) \leq \tau < \infty$ на условия $0 < \theta \leq p$, $p \leq \tau < \infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если функция $f(x) \in L_p$ ($1 < p < \infty$) имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^\infty a_n \cos 2^n x$, $a_n \geq 0$, то утверждения Теорем Б1 и Б2 справедливы при замене условий $0 < \theta \leq \min(2, p)$, $\max(2, p) \leq \tau < \infty$ на условия $0 < \theta \leq 2$, $2 \leq \tau < \infty$.

2. Вспомогательные результаты

ЛЕММА 1. [3] Пусть $a_n \geq 0$, $\lambda_n > 0$. Тогда для любого $p \geq 1$:

$$a. \quad \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu \right)^p \ll \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{\nu=n}^\infty \lambda_\nu \right)^p,$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu} \right)^p \ll \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} \right)^p.$$

ЛЕММА 2. [4] Если функция $f \in L_p$ ($1 < p < \infty$) и числа $\beta, r > 0$, $\tau = \max(2, p)$, $\theta = \min(2, p)$, то при всех $\delta \in (0, 1/2]$ справедливо неравенство:

$$\left(\delta^{\beta\tau} \int_{\delta}^1 t^{-\beta\tau-1} \omega_{\beta+r}^{\tau}(f, t)_p dt \right)^{1/\tau} \ll \omega_{\beta}(f, \delta)_p \ll \left(\delta^{\beta\theta} \int_{\delta}^1 t^{-\beta\theta-1} \omega_{\beta+r}^{\theta}(f, t)_p dt \right)^{1/\theta}.$$

ЛЕММА 3. [2] Если функция $f(x) \in L_p$ ($1 < p < \infty$) имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ с квазимонотонными коэффициентами, т.е. $\exists \gamma \geq 0$, такое что $a_n n^{-\gamma} \downarrow 0$, то

(а) Утверждение Теоремы А1 справедливо при замене условия $0 < \theta \leq \min(2, p)$ на условие $0 < \theta \leq p$,

(б) Утверждение Теоремы А2 справедливо при замене условия $\max(2, p) \leq \tau < \infty$ на условие $p \leq \tau < \infty$.

ЛЕММА 4. [2] Если функция $f(x) \in L_p$ ($1 < p < \infty$) имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2^n x$, $a_n \geq 0$, то

(а) Утверждение Теоремы А1 справедливо при замене условия $0 < \theta \leq \min(2, p)$ на условие $0 < \theta \leq 2$,

(б) Утверждение Теоремы А2 справедливо при замене условия $\max(2, p) \leq \tau < \infty$ на условие $2 \leq \tau < \infty$.

3. Доказательство Теоремы Б1

Прежде всего заметим, что, так как функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы Б1, то она удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы А1 с параметром $k_1 = k_2 + \beta$. Также, используя условия (1) и (2), можно показать, что для любого $s > 0$ выполнены соотношения:

$$(3) \quad n^{-k_1 s} \int_{1/n}^1 \frac{t^{-k_1 s}}{\varphi^s(t)} \frac{dt}{t} \asymp n^{-k_2 s} \int_0^{1/n} \frac{t^{-k_2 s}}{\varphi^s(t)} \frac{dt}{t} \asymp \int_{1/2n}^{1/n} \frac{1}{\varphi^s(t)} \frac{dt}{t} \asymp \frac{1}{\varphi^s(1/n)}.$$

Действительно, например, докажем, что

$$n^{-k_2 s} \int_0^{1/n} \frac{t^{-k_2 s}}{\varphi^s(t)} \frac{dt}{t} \asymp \frac{1}{\varphi^s(1/n)}.$$

Из условий (1) и (2) следует, что $0 < \varepsilon_1$ и $0 < \varepsilon_2 < \beta$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^{1/n} \frac{t^{-k_2 s}}{\varphi^s(t)} \frac{dt}{t} &\ll \frac{n^{(k_2 + \varepsilon_1)s}}{\varphi^s(1/n)} \int_0^{1/n} t^{\varepsilon_1 s} \frac{dt}{t} \ll \frac{n^{k_2 s}}{\varphi^s(1/n)}; \\ \int_0^{1/n} \frac{t^{-k_2 s}}{\varphi^s(t)} \frac{dt}{t} &\gg \frac{n^{(k_2 + \beta - \varepsilon_2)s}}{\varphi^s(1/n)} \int_0^{1/n} t^{(\beta - \varepsilon_2)s} \frac{dt}{t} \gg \frac{n^{k_2 s}}{\varphi^s(1/n)}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно применить теорему A1, которая утверждает существование принадлежащей L_p функции ψ с рядом Фурье $\sigma(f, \lambda)$, где $\lambda_n = \varphi(1/n)$, и выполнение следующего неравенства ($\forall \nu \in \mathbf{N}$):

$$\begin{aligned}
 & \omega_\beta^\tau(\psi, 1/2^\nu)_p \\
 & \ll \left\{ 2^{-\nu\beta\theta} \int_{1/2^\nu}^1 \frac{\varphi^\theta(t)}{t} t^{-\beta\theta} \omega_{k_1+\beta}^\theta(f, t)_p dt + \int_0^{1/2^\nu} \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_1+\beta}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{\tau/\theta} \\
 (4) \quad & \ll \left\{ \int_0^{1/2^n} \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_1+\beta}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{\tau/\theta} + \left\{ \sum_{\xi=\nu}^{n-1} \varphi^\theta\left(\frac{1}{2^\xi}\right) \omega_{k_1+\beta}^\theta\left(f, \frac{1}{2^\xi}\right)_p \right\}^{\tau/\theta} \\
 & + \left\{ 2^{-\nu\beta\theta} \sum_{\xi=1}^\nu 2^{\xi\beta\theta} \varphi^\theta\left(\frac{1}{2^\xi}\right) \omega_{k_1+\beta}^\theta\left(f, \frac{1}{2^\xi}\right)_p \right\}^{\tau/\theta} =: I_{11} + I_{12} + I_{13}.
 \end{aligned}$$

Выберем натуральное n , такое что $2^{-n} \leq \delta < 2^{-n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 I & := \left\{ \delta^{(k_2+\beta)\tau} \varphi^\tau(\delta) \int_\delta^1 \frac{t^{-(k_2+\beta)\tau-1}}{\varphi^\tau(t)} \omega_\beta^\tau(\psi, t)_p dt \right\}^{1/\tau} \\
 & \asymp \frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^n \frac{2^{\nu\tau(k_2+\beta)}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)} \omega_\beta^\tau\left(\psi, \frac{1}{2^\nu}\right)_p \right\}^{1/\tau}.
 \end{aligned}$$

Оценим I сверху с учетом неравенства (4).

$$I \ll \sum_{j=1}^3 \frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^n \frac{2^{\nu\tau(k_2+\beta)}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)} I_{1j} \right\}^{1/\tau} =: I_{21} + I_{22} + I_{23}.$$

Используя условие (3) и свойство модуля гладкости, получим

$$I_{21} \ll I_{11}^\tau \ll \left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_1+\beta}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta} \ll \left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_2+\beta}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta}.$$

Далее последовательно применяя лемму 1(b), условие (3) и лемму 2, оценим I_{22} .

$$\begin{aligned}
 I_{22} & \ll \\
 & \ll \frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^n \omega_{k_1+\beta}^\tau\left(f, \frac{1}{2^\nu}\right)_p \varphi^\tau\left(\frac{1}{2^\nu}\right) \left(\frac{2^{\nu\tau(k_2+\beta)}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)}\right)^{1-\tau/\theta} \left(\sum_{\xi=0}^\nu \frac{2^{\xi\tau(k_2+\beta)}}{\varphi^\tau(1/2^\xi)}\right)^{\tau/\theta} \right\}^{1/\tau} \\
 & \ll \frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^n \omega_{k_1+\beta}^\tau\left(f, \frac{1}{2^\nu}\right)_p 2^{\nu\tau(k_2+\beta)} \right\}^{1/\tau} \ll \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \omega_{k_2+\beta}\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \\
 & \ll \left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\theta(t)}{t} \omega_{k_2+\beta}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta}.
 \end{aligned}$$

Теперь оценим I_{23} , используя лемму 1(a) и условие (3).

$$\begin{aligned} I_{23} &\ll \frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}} \\ &\times \left\{ \sum_{\nu=0}^n \omega_{k_1+\beta}^\tau \left(f, \frac{1}{2^\nu} \right)_p \varphi^\tau \left(\frac{1}{2^\nu} \right) 2^{\nu\beta\tau} \left(\frac{2^{\nu\tau k_2}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)} \right)^{1-\frac{\tau}{\theta}} \left(\sum_{\xi=\nu}^n \frac{2^{\xi\tau k_2}}{\varphi^\tau(1/2^\xi)} \right)^{\tau/\theta} \right\}^{1/\tau} \\ &\ll \frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^n \omega_{k_1+\beta}^\tau \left(f, \frac{1}{2^\nu} \right)_p 2^{\nu\tau(k_2+\beta)} \right\}^{1/\tau}. \end{aligned}$$

Последнее выражение мы уже оценивали выше.

Итак,

$$I \ll \left\{ \int_0^\delta \frac{\psi^\theta(t)}{t} \omega_{k_2+\beta}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta}.$$

Теорема доказана.

4. Доказательство Теоремы Б2

Так как функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то можно показать, что для любого $s > 0$ выполнены соотношения ($k_1 = k_2 + \beta$):

$$(5) \quad n^{k_1 s} \int_0^{1/n} \frac{\varphi^s(t)}{t} t^{k_1 s} dt \asymp \int_{1/2n}^{1/n} \frac{\varphi^s(t)}{t} dt \asymp \varphi^s(1/n).$$

Аналогично доказательству Теоремы Б1, используя Теорему А2 с $\lambda_n = \varphi(1/n)$ и $k_1 = k_2 + \beta$, получим справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} \omega_\beta(\psi, \delta)_p &\gg \left\{ \delta^{\beta\tau} \int_\delta^1 \frac{\varphi^\tau(t)}{t} t^{-\beta\tau} \omega_{k_1+\beta}^\tau(f, t)_p dt + \int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t} \omega_{k_1+\beta}^\tau(f, t)_p dt \right\}^{1/\tau} \\ (6) \quad &\gg \left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t} \omega_{k_1+\beta}^\tau(f, t)_p dt \right\}^{1/\tau}. \end{aligned}$$

Наряду с неравенством (6), нам понадобится неравенство

$$(7) \quad \omega_{k_1+\beta}(f, \delta) \ll \frac{1}{\varphi(\delta)} \omega_\beta(\psi, \delta)_p \quad \text{для} \quad \delta \in (0, 1/2]$$

Докажем (7), пользуясь неравенством (6), свойствами модуля гладкости и условием (1) на функцию $\varphi(t)$.

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(\psi, \delta)_p &\gg \left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t) t^{(k_1+\beta)\tau}}{t} \frac{\omega_{k_1+\beta}^\tau(f, t)_p}{t^{(k_1+\beta)\tau}} dt \right\}^{1/\tau} \\
&\gg \frac{\omega_{k_1+\beta}(f, \delta)_p}{\delta^{k_1+\beta}} \left\{ \int_0^\delta \varphi^\tau(t) t^{(k_1+\beta)\tau-1} dt \right\}^{1/\tau} \\
&\gg \frac{\omega_{k_1+\beta}(f, \delta)_p}{\delta^{k_1+\beta}} \left\{ \varphi^\tau(\delta) \delta^{(k_2+\varepsilon_1)\tau} \int_0^\delta t^{(k_1+\beta-k_2-\varepsilon_1)\tau-1} dt \right\}^{1/\tau} \\
&\gg \omega_{k_1+\beta}(f, \delta) \varphi(\delta).
\end{aligned}$$

Выберем натуральное n , такое что $2^{-n} \leq \delta < 2^{-n+1}$. Тогда, применяя неравенство (5) и лемму 2, получим

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t} \omega_{k_2+\beta}^\tau(f, t)_p dt &\asymp \sum_{\nu=n}^\infty \varphi^\tau\left(\frac{1}{2^\nu}\right) \omega_{k_2+\beta}^\tau\left(f, \frac{1}{2^\nu}\right)_p \\
&\ll \sum_{\nu=n}^\infty \frac{\varphi^\tau(1/2^\nu)}{2^{\nu(k_2+\beta)\tau}} \left(\sum_{\xi=1}^\nu 2^{\xi(k_2+\beta)\theta} \omega_{k_1+\beta}^\theta\left(f, \frac{1}{2^\xi}\right)_p \right)^{\tau/\theta} \\
&\ll \sum_{\nu=n}^\infty \frac{\varphi^\tau(1/2^\nu)}{2^{\nu(k_2+\beta)\tau}} \left(\sum_{\xi=1}^n 2^{\xi(k_2+\beta)\theta} \omega_{k_1+\beta}^\theta\left(f, \frac{1}{2^\xi}\right)_p \right)^{\tau/\theta} \\
&\quad + \sum_{\nu=n}^\infty \frac{\varphi^\tau(1/2^\nu)}{2^{\nu(k_2+\beta)\tau}} \left(\sum_{\xi=n+1}^\nu 2^{\xi(k_2+\beta)\theta} \omega_{k_1+\beta}^\theta\left(f, \frac{1}{2^\xi}\right)_p \right)^{\tau/\theta} = J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Оценка J_1 производится с помощью неравенств (5) и (7):

$$J_1 \ll \frac{\varphi^\tau(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)\tau}} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{2^{\nu(k_2+\beta)\theta}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)} \omega_\beta^\theta\left(\psi, \frac{1}{2^\nu}\right)_p \right)^{\tau/\theta}.$$

Для того, чтобы оценить J_2 , воспользуемся леммой 1 и неравенством (6).

$$J_2 \ll \sum_{\nu=n}^\infty \varphi^\tau\left(\frac{1}{2^\nu}\right) \omega_{k_1+\beta}^\tau\left(f, \frac{1}{2^\nu}\right)_p \ll \omega_\beta^\tau\left(\psi, \frac{1}{2^n}\right)_p.$$

Таким образом, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
\left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t} \omega_{k_2+\beta}^\tau(f, t)_p dt \right\}^{1/\tau} &\ll (J_1 + J_2)^{1/\tau} \\
&\ll \left\{ \delta^{(k_2+\beta)\theta} \varphi^\theta(\delta) \int_\delta^1 \frac{t^{-(k_2+\beta)\theta-1}}{\varphi^\theta(t)} \omega_\beta^\theta(\psi, t)_p dt \right\}^{1/\theta}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Утверждения 1 и 2 доказываются теми же методами, что и теоремы Б1 и Б2, только вместо теорем А1 и А2 надо использовать лемму 3 (для доказательства Утверждения 1) и лемму 4 (для доказательства Утверждения 2).

Автор выражает благодарность профессору М. К. Потапову за внимание к работе.

Список литературы

- [1] М.К. Потапов, Б. Лакович, Б.В. Симонов, *Об оценках модулей гладкости функций, имеющих дробную производную*, Math. Montisnigri 7 (1996), 41–52.
- [2] М.К. Потапов, Б.В. Симонов, *Об оценках модулей гладкости функций с преобразованным рядом Фурье*, Фундаментальная и прикладная математика 1:2 (1995), 455–469
- [3] М.К. Потапов, М. Бериша, *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного*, Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. 26(40) (1979), 215–228
- [4] М.Ф. Тиман, *Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p* , В сб. “Исследования по основным теоремам конструктивной теории функций”, Баку, 1965.

Механико-математический факультет
МГУ, Москва
Россия

(Поступила 16 04 2002)

ser_tikhonov@mail.ru