PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 72(86) (2002), 123–136

# CONVERGENCES DES FONCTIONS CONVEXES ET APPROXIMATIONS INF-CONVOLUTIVES GENERALISEES

**D. Mentagui et K. El Hajioui**

*Communicated by Stevan Pilipović*

ABSTRACT. Let $\Phi : X \to \mathbb{R}^+$ be a kernel bounded on bounded subsets of a normed linear space $X$ and $f$ be a function in $\Gamma(X)$. The inf-convolution approximates of $f$ of parameters $\lambda > 0$ associated to $\Phi$ are the functions defined for each $x \in X$ by $f_\lambda(x) = \inf\{f(u) + \Phi(\frac{x-u}{\lambda}) : u \in X\}$. In this article, we prove that the slice convergence of a sequence $(f^n)_n$ in $\Gamma(X)$ is equivalent on the one hand to the convergence in the same sense of its sequences of inf-convolution approximates of sufficiently small parameters associated to $\Phi$, and on the other hand to the pointwise convergence of the regularized sequences defined in the theorem 3.10 of this paper. As well, we show that the Attouch–Wets convergence of $(f^n)_n$ is equivalent to the convergence in the same sense of its approximate sequences when the parameters $\lambda$ converge to 0; which is also equivalent to their uniform convergence on bounded subsets of $X$. Then, we generalize in particular the main results of G. Beer [12] established in the case of Baire-Wijsman regularizations($\Phi = \|\cdot\|$).

**Resume.** Soient $\Phi : X \to \mathbb{R}^+$ un référentiel borné sur les bornés d'un espace vectoriel normé $X$ et $f$ une fonction de $\Gamma(X)$. Les approximations inf-convolutives de $f$ de paramètres $\lambda > 0$ associées à $\Phi$ sont les fonctions définies pour tout $x \in X$ par $f_\lambda(x) = \inf\{f(u) + \Phi(\frac{x-u}{\lambda}) : u \in X\}$. Dans cet article, nous montrons que la slice convergence d'une suite de fonctions $(f^n)_n$ de $\Gamma(X)$ est équivalente, d'une part à la convergence dans le même sens des suites associées d'approximations inf-convolutives de paramètres assez petits relativement à $\Phi$, et d'autre part à la convergence simple des suites régularisantes définies dans le théorème 3.10 de ce papier. Nous démontrons également que la convergence d'Attouch–Wets de $(f^n)_n$ est équivalente à la convergenc dans le même sens de ses suites d'approximations lorsque les paramètres $\lambda$ tendent vers 0; ce qui est encore équivalent à leur convergence uniforme sur les bornés de $X$. Nous généralisons ainsi les résultats de G. Beer [12] établis dans le cas des régularisations de Baire–Wijsman ($\Phi = \|\cdot\|$).

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 52A41; Secondary 54B20, 40A30.

*Key words and phrases.* fonction convexe, référentiel, approximations inf-convolutives, Attouch–Wets convergence, slice convergence, Mosco convergence, convergence affine duale, épi-convergence, convergence uniforme sur les bornés.

Les résultats de cet article forment une partie de la thèse de Doctorat du second auteur.

## 1. Introduction

La théorie des convergences variationnelles a connu un développement considérable depuis les travaux de R. A. Wijsman en théorie de la décision statistique [34, 35] et ceux de U. Mosco en théorie des inéquations variationnelles [28, 29]. Du fait de leur rôle crucial en optimisation et en théorie d'approximation, ces convergences ont fait l'objet de nombreuses études tant sur le plan théorique que celui des applications(voir par exemple [1, 5, 18, 20, 26, 27, 33]). De ces études fructueuses, plusieurs importantes notions de convergences ont été mises en évidence [1, 4, 9, 16, 33], dont les plus connues sont la slice convergence et la convergence d'Attouch–Wets. La première était introduite formellement pour la première fois dans [33] puis étudiée intensivement dans [3, 9, 11, 16]. Elle constitue une extension naturelle de celle de Mosco au cas des espaces vectoriels normés quelconques et coïncide avec cette dernière si et seulement si l'espace considéré est réflexif [13]. La convergence d'Attouch–Wets correspond à la convergence uniforme sur les bornés des fonctions distance et coïncide avec la convergence précédente dans le cas de la dimension finie. Cette convergence s'est révélée très adéquate pour l'étude quantitative de la stabilité d'une classe de problèmes d'optimisation [4, 5, 6, 14, 15] et la distance épigraphique qui lui est associée possède un potentiel important pour estimer la rapidité de convergence de suites d'ensembles et de fonctions [4, 15], de plus elle possède de nombreuses propriétés de stabilité dans le cas convexe même en l'absence de réflexivité [6, 8, 15, 27]. En outre ces deux convergences conservent la bicontinuité de la transformation de Legendre-Fenchel dans le cas des espaces vectoriels normés quelconques [8, 9], ce qui justifie le rôle primordial qu'elles peuvent jouer en analyse non linéaire notamment en optimisation convexe et en théorie de dualité dans les espaces non nécessairement réflexifs [23, 27].

L'objet de cet article est de caractériser, dans le cas des fonctions convexes et dans le cadre d'un espace vectoriel normé quelconque $X$, ces deux convergences en terme d'approximations inf-convolutives associées à des référentiels généraux. Plus précisément, nous montrons que la slice convergence d'une suite de fonctions convexes est équivalente, d'une part à la convergence dans le même sens des suites associées d'approximations inf-convolutives de paramètres assez petits relativement à un référentiel $\Phi$ positif borné sur les bornés de $X$, et d'autre part à la convergence simple des suites régularisantes définies dans le théorème 3.10 de ce papier. Nous démontrons également que la convergence d'Attouch–Wets de la suite initiale est équivalente à la convergence dans le même sens de ses suites d'approximations associées à $\Phi$ lorsque les paramètres $\lambda$ tendent vers 0; ce qui est encore équivalent à leur convergence uniforme sur les bornés de $X$. Nous généralisons ainsi les résultats de G. Beer [12] établis dans le cas des régularisations de Baire-Wijsman.

Les démonstrations que nous présentons ici sont originales. Celles utilisées pour la slice convergence sont de nature analytique, basées en principe sur la bicontinuité de la transformation de Legendre-Fenchel pour cette convergence et sur les lemmes préparatifs de la section 3. Elles diffèrent de celles de [12] qui sont de nature géométrique et basées sur certains théorèmes de séparation moins classiques. Celles utilisées pour la convergence d'Attouch–Wets sont basées à la fois sur la bicontinuité de la transformation de Legendre-Fenchel pour cette convergence et l'aspect quantitatif des pseudo-distances qui lui sont associées (lemme 4.1).

## 2. Rappels et notations

Soit $X$ un espace vectoriel normé de dual topologique $X^*$. Les origines de $X$ et $X^*$ sont notées respectivement par $\theta$ et $\theta^*$, leurs boules unités fermées par $U$ et $U^*$, et les topologies faibles $\sigma(X, X^*)$ et $\sigma(X^*, X)$ par $w$ et $w^*$. Le domaine effectif et l'épigraphe d'une une fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ sont notés respectivement par

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}, \operatorname{epi} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant \alpha\}.$$

On dit que $f$ est propre si $\operatorname{Dom} f \neq \emptyset$ et $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in X$. La transformée de Legendre–Fenchel de $f$, notée $f^*$, est la fonction définie par

$$f^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle - f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}, \forall y \in X^*.$$

Pour chaque $f \in \Gamma(X)$ on associe le sous-ensemble de $X \times X^*$

$$\partial f := \{(x, y) \in X \times X^* \mid f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle\}$$

appelé sous-différentiel de $f$, et le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R} \times X^*$ noté

$$\triangle(f) := \{(x, f(x), y) \in X \times \mathbb{R} \times X^* \mid (x, y) \in \partial f\}.$$

$\Gamma(X)$ (resp. $\Gamma(X^*)$) désigne l'ensemble des fonctions convexes propres semi-continues inférieurement (s.c.i) (resp. convexes propres $w^*$-s.c.i). $\mathcal{C}(X)$ (resp. $\mathcal{C}(X^*)$) désigne l'ensemble des parties non vides convexes fermées de $X$ (resp. non vides convexes $w^*$-fermées de $X^*$). Si $E$ est un sous-ensemble non vide de $X$ on note, $E^- := \{C \in \mathcal{C}(X) \mid C \cap E \neq \emptyset\}$ et $E^{++} := \{C \in \mathcal{C}(X) \mid \exists \varepsilon > 0 : C + \varepsilon U \subset E\}$. On définit alors sur $\mathcal{C}(X)$ la topologie $\tau_s^-$ (resp. $\tau_s^+$) ayant pour sous-base tous les ensembles de la forme $V^-$ où $V$ est un $\|\cdot\|$-ouvert de $X$ (resp. ceux de la forme $(F^c)^{++}$ où $F$ est une partie non vide convexe $\|\cdot\|$-fermée bornée de $X$) [9, 12].

Definition 2.1. [9] La slice topologie $\tau_s$ définie sur $\mathcal{C}(X)$ est la topologie qui a pour sous-base tous les ensembles de la forme $V^-$ où $V$ est un $\|\cdot\|$-ouvert de $X$, plus ceux de la forme $(F^c)^{++}$ où $F$ est une partie non vide convexe $\|\cdot\|$-fermée bornée de $X$.

Il est prouvé dans [9, 16] que la slice topologie définie sur $\mathcal{C}(X)$ est la topologie la moins fine rendant continues toutes les fonctions "gap" $(\mathcal{D}(F, .))_F$, où $F$ est un convexe non vide $\|\cdot\|$-fermé borné quelconque de $X$ avec

$$\mathcal{D}(F, .) : C \in \mathcal{C}(X) \to \mathcal{D}(F, C) := \inf\{\|b - a\|, (a, b) \in C \times F\} \in \mathbb{R}^+.$$

Si on remplace dans la définition précédente "$F$ convexe $\|\cdot\|$-fermé borné" par "$F$ convexe $w$-compact" on retrouve la topologie de Mosco $\tau_M$ [1, 9, 12].

On définit de même la slice topologie duale $\tau_s^*$ sur $\mathcal{C}(X^*)$ [9] comme étant la topologie qui a pour sous-base tous les ensembles de la forme $V^-$ où $V$ est un $\|\cdot\|_*$-ouvert de $X^*$et ceux de la forme $(K^c)^{++}$ où $K$ est un convexe non vide $w^*$-fermé et $\|\cdot\|_*$-borné de $X^*$ (convexe $w^*$-compact de $X^*$).

Si $C$, $D$ sont deux parties non vides fermées et $\rho > 0$ on note, $C_\rho := C \cap \rho U$, $e_\rho(C, D) := \sup_{x \in C_\rho} d(x, D)$ et $H_\rho(C, D) := \operatorname{Max}\{e_\rho(C, D), e_\rho(D, C)\}$.

Definition 2.2. [4] La topologie d'Attouch–Wets $\tau_{AW}$ définie sur $\mathcal{C}(X)$ est la topologie qui a pour base de voisinages d'un $C \in \mathcal{C}(X)$ tous les ensembles de la forme $U^-_{\rho,\varepsilon}(C) := \{D \in \mathcal{C}(X) \mid e_\rho(C, D) < \varepsilon\}$, plus ceux de la forme $U^+_{\rho,\varepsilon}(C) := \{D \in \mathcal{C}(X) \mid e_\rho(D, C) < \varepsilon\}$ ($\rho > 0$, $\varepsilon > 0$).

La topologie d'Attouch–Wets a été intensivement étudiée dans [2, 4, 5, 6, 8, 14, 15, 23, 27]. Elle est strictement plus fine que la slice topologie et coïncide avec cette dernière dans le cas de la dimension finie [4, 33]. soient $f$, $f^n$, $n \in \mathbb{N}$ des fonctions de $\Gamma(X)$. On rappelle les définitions suivantes [1, 4, 9, 12, 20, 28, 29, 33]:

(**1**) On dit que $(f^n)_n$ épi-converge vers $f$ (pour la topologie de la norme) et on note $f^n \xrightarrow{e} f$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $\forall x \in X$, $\forall x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $f(x) \leqslant \underline{\mathrm{Lim}} f^n(x_n)$;

(ii) $\forall x \in X$, $\exists x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $f^n(x_n) \to f(x)$.

Si $(f^n)_n$ épi-converge vers $f$ à la fois pour la topologie forte et la topologie faible de $X$, $(f^n)_n$ est dite alors Mosco convergente vers $f$ et on note $f^n \xrightarrow{M} f$.

(**2**) On dit que $(f^n)_n$ est slice convergente vers $f$ et on note $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$ si et seulement si la suite des épigraphes $(\operatorname{epi} f^n)_n$ converge vers l'épigraphe $\operatorname{epi} f$ pour la slice topologie définie sur $\mathcal{C}(X \times \mathbb{R})$ conformément à la définition 2.1. De façon équivalente, $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites [12]:

(i) Pour tout $\|\cdot\|$-ouvert $W$ de $X$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la condition $\operatorname{epi} f \in (W \times ]-\infty, \alpha[)^-$ implique que $\operatorname{epi} f^n \in (W \times ]-\infty, \alpha[)^-$ éventuellement pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Pour tout $\|\cdot\|_*$-ouvert $V$ de $X^*$ et tout $\eta \in \mathbb{R}$, la condition $\operatorname{epi} f^* \in (V \times ]-\infty, \eta[)^-$ implique que $\operatorname{epi} f^{n*} \in (V \times ]-\infty, \eta[)^-$ éventuellement pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De même, $f^n \xrightarrow{\tau_s^-} f$ (resp. $f^n \xrightarrow{\tau_s^+} f$) si et seulement si $\operatorname{epi} f^n \xrightarrow{\tau_s^-} \operatorname{epi} f$ (resp. $\operatorname{epi} f^n \xrightarrow{\tau_s^+} \operatorname{epi} f$) dans $\mathcal{C}(X \times \mathbb{R})$.

(**3**) On dit que $(f^n)_n$ converge vers $f$ au sens d'Attouch–Wets et on note $f^n \xrightarrow{AW} f$ si pour tout $\rho > 0$,

$$H_\rho(f^n, f) := \mathrm{Max}\{e_\rho(\operatorname{epi} f^n, \operatorname{epi} f), e_\rho(\operatorname{epi} f, \operatorname{epi} f^n)\} \to 0.$$

(**4**) On dit que $(f^n)_n$ converge uniformément sur les bornés de $X$ vers $f$ et on note $f^n \xrightarrow{UB} f$ si $\operatorname{Dom} f^n = \operatorname{Dom} f$ pour tout $n$ assez grand et

$$\sup\{|f^n(x) - f(x)| \mid x \in \operatorname{Dom} f \cap \rho U\} \to 0$$

pour tout $\rho > 0$ tel que $\operatorname{Dom} f \cap \rho U \neq \emptyset$.

(**5**) On dit que $(f^n)_n$ converge simplement vers $f$ et on note $f^n \to f$ si pour tout $x \in X$, $f^n(x) \to f(x)$.

Pour la définition de la convergence d'ensembles au sens de Painlevé-Kuratowski (P-K) dont nous aurons aussi besoin, le lecteur pourra consulter [1, 3].

Il est facile de voir que la convergence uniforme sur les bornés est plus fine que la convergence d'Attouch–Wets et que cette dernière est plus fine que la slice convergence, qui à son tour est plus fine que l'épi-convergence pour la topologie de la norme [12, 33]. Il est aussi important de noter à ce niveau (voir [8, 9]) que

$$(f_n \xrightarrow{\tau_s} f \Longleftrightarrow f_n^* \xrightarrow{\tau_s^*} f^*) \text{ et } (f_n \xrightarrow{AW} f \Longleftrightarrow f_n^* \xrightarrow{AW} f^*)$$

dans tout espace vectoriel normé. La slice convergence et la convergence simple sont en général incomparables [19, 32], mais le couplage des deux convergences dans le cas convexe est équivalent à une autre convergence sur $\Gamma(X^*)$ pour une certaine topologie appelée topologie affine duale. Plus précisément, $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$ et $f^n \to f$ si et seulement si $(\operatorname{epi} f^{n*})_n$ converge vers $\operatorname{epi} f^*$ pour la topologie définie sur $\mathcal{C}(X^* \times \mathbb{R})$ ayant pour sous-base d'ouverts tous les ensembles de la forme $(V \times ]-\infty, \eta[)^-$ où $V$ est un $\|\cdot\|_*$-ouvert de $X^*$ et $\eta \in \mathbb{R}$, plus ceux de la forme $(H^c)^{++}$ où $H$ est le graphe d'une fonction affine continue $\langle x, .\rangle - \alpha$ $(x \in X, \alpha \in \mathbb{R})$, définie sur $X^*$ [7, 9, 12]; et on note alors $f^{n*} \xrightarrow{\tau_A^*} f^*$. Pour plus de détails sur les convergences précédentes et leurs diverses caractérisations le lecteur pourra se référer par exemple à [1,4, 9, 16, 33].

On appelle référentiel [24], toute fonction $\Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe, paire, continue et nulle en zéro et cœrcive, i.e. $\Phi(x) \geqslant A\|x\| - B$ pour tout $x \in X$, où $A > 0$ est la constante de cœrcivité de $\Phi$ et $B \geqslant 0$.

Definition 2.3. [24] Soient $\Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ un référentiel, $f \in \Gamma(X)$ et $\lambda > 0$. Posons $\Phi_\lambda = \Phi(\frac{\cdot}{\lambda})$. On appelle approximation inf-convolutive de $f$ de paramètre $\lambda$ associée au référentiel $\Phi$ la fonction convexe $f_\lambda$ définie pour tout $x \in X$ par

$$f_\lambda(x) := f \nabla \Phi_\lambda(x) := \inf_{u \in X}\{f(u) + \Phi_\lambda(x-u)\} = \inf_{u \in X}\Big\{f(u) + \Phi\Big(\frac{x-u}{\lambda}\Big)\Big\}.$$

En utilisant la cœrcivité de $\Phi$, il est facile de vérifier que $f_\lambda > -\infty$ si $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$. Si de plus $\Phi$ est finie et majorée sur les bornés alors $f_\lambda$ l'est aussi, et donc $f_\lambda$ est finie et continue en tout point. En outre, les $f_\lambda$ forment quand $\lambda \downarrow 0$ une famille croissante vers $f$. Les régularisations de Baire–Wijsman sont les approximations inf-convolutives associées à $\Phi = \|\cdot\|$, celles associées à $\Phi = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ sont les approximations de Moreau–Yosida. Pour plus d'informations sur les études faites sur différents types de référentiels le lecteur pourra se référer à [1, 4, 5, 12, 22, 24, 30].

Dans toute la suite, sauf mention expresse, $f$, $f^n$, $n \in \mathbb{N}$ désigneront des fonctions de $\Gamma(X)$ et $\Phi : X \to \mathbb{R}^+$ un référentiel positif.

## 3. Caracterisation de la slice convergence en terme d'approximations inf-convolutives

Nous allons tout d'abord montrer que la slice convergence d'une suite de fonctions de $\Gamma(X)$ est équivalente à la convergence dans le même sens des suites associées d'approximations inf-convolutives généralisées de paramètres assez petits. Pour prouver ce résultat et d'autres de cette section, nous utiliserons les cinq lemmes suivants:

Lemme 3.0. *Soient $\lambda_0$, $\gamma_0$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 > 0$, $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$ et $f_{\lambda_0}(x) \geqslant \gamma_0$. Alors il existe $R := \frac{2(\gamma_1-\gamma_0+B)}{A} \geqslant 0$ tel que*

$$f_\lambda(x) = \inf\Big\{f(u) + \Phi\Big(\frac{x-u}{\lambda}\Big) \mid \|x-u\| \leqslant R\lambda\Big\} \tag{1}$$

*pour tout $\lambda \in \left]0, \frac{\lambda_0}{2}\right]$ vérifiant $f_\lambda(x) \leqslant \gamma_1$.*

Preuve. En effet, $f(u) + \Phi(\frac{x-u}{\lambda_0}) \geqslant \gamma_0$ $\forall u \in X$, et donc $f(u) + \Phi(\frac{x-u}{\lambda}) \geqslant \gamma_0 + \Phi(\frac{x-u}{\lambda}) - \Phi(\frac{x-u}{\lambda_0})$ pour tout $u \in X$. Mais pour $\lambda \in ]0, \lambda_0]$ et $y \in X$ nous avons $\Phi(\frac{y}{\lambda_0}) = \Phi(\frac{\lambda}{\lambda_0}\frac{y}{\lambda}) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_0}\Phi(\frac{y}{\lambda}) \leqslant \Phi(\frac{y}{\lambda})$. Ainsi pour $\lambda \in \left]0, \frac{\lambda_0}{2}\right]$ et $\|x-u\| > R\lambda$ on obtient

$$\begin{aligned} f(u) + \Phi\Big(\frac{x-u}{\lambda}\Big) &\geqslant \gamma_0 + \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\Big)\Phi\Big(\frac{x-u}{\lambda}\Big) \\ &\geqslant \gamma_0 + \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\Big)\Big(A\Big\|\frac{x-u}{\lambda}\Big\| - B\Big) \\ &\geqslant \gamma_0 - B + A\Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\Big)\frac{\|x-u\|}{\lambda} \\ &\geqslant \gamma_0 - B + \frac{A}{2}\frac{\|x-u\|}{\lambda} > \gamma_1. \end{aligned}$$

Enfin, si $f_\lambda(x) \leqslant \gamma_1$, l'inégalité précédente montre que (1) est vérifiée. □

Lemme 3.1. *Supposons qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$ et $f^n_\lambda \to f_\lambda$ pour tout $\lambda \in ]0, \lambda_0]$. Alors $f^n \xrightarrow{e} f$.*

Preuve. Soit $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Nous avons $f^n_\lambda(x) \leqslant f^n(x_n) + \Phi(\frac{x-x_n}{\lambda})$. Or $f_\lambda(x) = \operatorname{Lim} f^n_\lambda(x) \leqslant \underline{\operatorname{Lim}}[f^n(x_n) + \Phi(\frac{x-x_n}{\lambda})] \leqslant \underline{\operatorname{Lim}} f^n(x_n)$ pour tout $\lambda \in ]0, \lambda_0]$. En faisant tendre $\lambda$ vers 0 on obtient $f(x) \leqslant \underline{\operatorname{Lim}} f^n(x_n)$.

Soit $x \in X$. Il suffit de montrer qu'il existe $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ telle que $f(x) \geqslant \overline{\operatorname{Lim}} f^n(x_n)$. Si $x \notin \operatorname{Dom} f$, on peut prendre $x_n := x$. Supposons que $x \in \operatorname{Dom} f$. Comme $f^n_{\lambda_0}(x) \to f_{\lambda_0}(x) \in \mathbb{R}$, il existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $f^n_{\lambda_0}(x) \geqslant \gamma_0$ pour tout $n \geqslant n_0$. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \left]0, \frac{\lambda_0}{2}\right]$ telle que $\lambda_k \downarrow 0$. Puisque $f^n_{\lambda_k}(x) \to f_{\lambda_k}(x) < f(x) + \frac{1}{k}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $f^n_{\lambda_k}(x) < f(x) + \frac{1}{k}$ pour tout $n \geqslant n_k$. On peut supposer sans nuire à la généralité que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Posons $\gamma_1 := f(x) + 1$ et $R := \frac{2(\gamma_1-\gamma_0+B)}{A}$. D'après le lemme 3.0, pour tout $n \geqslant n_k$ nous avons

$$f^n_{\lambda_k}(x) = \inf\Big\{f^n(u) + \Phi\Big(\frac{x-u}{\lambda_k}\Big) \mid \|x-u\| \leqslant R\lambda_k\Big\} < f(x) + \frac{1}{k}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant n_k$, il existe $x^k_n \in x + R\lambda_k U$ tel que $f^n(x^k_n) \leqslant f^n(x^k_n) + \Phi(\frac{x-x^k_n}{\lambda_k}) < f(x) + \frac{1}{k}$. D'où, en considérant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n := x^k_n$ pour $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ et $x_n$ arbitraire pour $n \leqslant n_1$, nous obtenons $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ et $f(x) \geqslant \overline{\operatorname{Lim}} f^n(x_n)$. □

LEMME 3.2. *Supposons que* $f^n \xrightarrow{\tau_s^+} f$. *Alors* $(f^n)_n$ *est uniformément minorée sur les bornés de* $X$.

PREUVE. Soit $r > 0$. Comme $f \in \Gamma(X)$, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant \gamma$ pour tout $x \in (r+1)U$. Ainsi $d(\operatorname{epi} f, D) > 0$, où $D := rU \times \{\gamma - 1\}$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(\operatorname{epi} f^n, D) > 0$ pour tout $n \geqslant n_0$. Ce qui implique que $\inf_{rU} f^n \geqslant \gamma - 1$ pour tout $n \geqslant n_0$. □

Dorénavant, $\Phi$ sera supposé de plus borné sur les bornés.

LEMME 3.3. *Supposons que* $f^n \xrightarrow{\tau_s^-} f$. *Alors* $(f_\lambda^n)_n$ *est uniformément majorée sur les bornés de* $X$ *pour tout* $\lambda > 0$.

PREUVE. Soit $\overline{x} \in \operatorname{Dom} f$. Considérons l'ouvert $V := \mathcal{B}(\overline{x}, 1) \times ]-\infty, \eta[$ avec $\eta := f(\overline{x}) + 1$ et $\mathcal{B}(\overline{x}, 1)$ est la boule ouverte de centre $\overline{x}$ et de rayon 1. Comme $\operatorname{epi} f \cap V \neq \emptyset$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{epi} f^n \cap V \neq \emptyset$ pour tout $n \geqslant n_0$. Soit alors $(x_n, t_n) \in \operatorname{epi} f^n \cap V$, $n \geqslant n_0$. Pour $\lambda > 0$ et $x \in rU$ nous avons alors

$$f_\lambda^n(x) \leqslant f^n(x_n) + \Phi\Big(\frac{x - x_n}{\lambda}\Big) \leqslant \eta + \sup_{\frac{r + \|\overline{x}\| + 1}{\lambda} U} \Phi.$$

Ce qui achève la preuve car $\Phi$ est borné sur les bornés. □

LEMME 3.4. *Supposons qu'il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$ *et* $f_\lambda^n \xrightarrow{e} f_\lambda$ *pour tout* $\lambda \in ]0, \lambda_0]$. *Alors* $(f_\lambda^n)_n$ *est uniformément Lipschitzienne sur les bornés de* $X$ *pour tout* $\lambda \in ]0, \lambda_0]$.

PREUVE. Soit $\lambda_1 := \frac{\lambda_0}{2}$. Puisque $f_{\lambda_1}^n \xrightarrow{e} f_{\lambda_1}$, il existe $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \theta$ telle que $f_{\lambda_1}^n(x_n) \to f_{\lambda_1}(\theta) \in \mathbb{R}$. Par suite, il existe $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $f_{\lambda_1}^n(x_n) < \gamma_1$ pour tout $n \geqslant n_1$. Comme $f_{\lambda_0}^n \xrightarrow{e} f_{\lambda_0}$ alors $f_{\lambda_0}(\theta) \leqslant \underline{\operatorname{Lim}} f_{\lambda_0}^n(x_n)$, il existe donc $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $f_{\lambda_1}^n(x_n) \geqslant f_{\lambda_0}^n(x_n) \geqslant \gamma_0$, $\forall n \geqslant n_0$. On peut supposer que $n_1 \geqslant n_0$. Posons $R := \frac{2(\gamma_1 - \gamma_0 + B)}{A} > 0$, d'après le lemme 3.0 nous avons pour $n \geqslant n_1$

$$f_{\lambda_1}^n(x_n) = \inf\Big\{f^n(u) + \Phi\Big(\frac{x_n - u}{\lambda_1}\Big) \mid \|x_n - u\| \leqslant R\lambda_1\Big\} < \gamma_1.$$

Il existe alors une suite $(u_n)_{n \geqslant n_1}$ vérifiant $\|u_n - x_n\| \leqslant R\lambda_1$ et $f^n(u_n) \leqslant \gamma_1$ pour tout $n \geqslant n_1$. Par suite $(u_n)_{n \geqslant n_1}$ est bornée. Soient $\lambda \in ]0, \lambda_0]$, $r > 0$ et $M := \sup\lim 4its_{\frac{2r + R\lambda_1}{\lambda} U} \Phi < +\infty$. Pour tout $n \geqslant n_1$ et tout $x \in 2rU$ nous avons

$$f_\lambda^n(x_n + x) \leqslant f^n(u_n) + \Phi\Big(\frac{x_n + x - u_n}{\lambda}\Big) \leqslant \gamma_1 + M \leqslant f_\lambda^n(x_n) + M_1,$$

où $M_1 := M + \gamma_1 - \gamma_0$. D'où, $f_\lambda^n$ a pour constante de Lipschitz $\frac{3M_1}{2}$ sur $x_n + rU$ pour tout $\lambda \in ]0, \lambda_0]$ et tout $n \geqslant n_1$. Comme $(x_n)_n$ est bornée, la famille $\{f_\lambda^n \mid \lambda \in ]0, \lambda_0], n \geqslant n_1\}$ est uniformément Lipschitzienne sur les bornés. □

THÉORÈME 3.5. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$.
(ii) $\forall\lambda > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{\tau_s} f_\lambda$.

PREUVE. (i) $\Rightarrow$(ii): Fixons $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$. Par slice convergence, $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^{n*})$ pour tout $n \geqslant$ à un certain $n_0 \in \mathbb{N}$ et donc $\{f_\lambda; f^n_\lambda, n \geqslant n_0\} \subset \Gamma(X)$. Ainsi d'après le théorème 4.2 de [9], il suffit de montrer que $(f^n_\lambda)^* \xrightarrow{\tau_s^*} (f_\lambda)^*$. Or par cœrcivité, $\frac{A}{\lambda}U^* \subset \mathrm{Dom}\,\Phi^*_\lambda$ et donc $\mathrm{Dom}\, f^* \cap \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\,\Phi^*_\lambda) \neq \emptyset$. Comme de plus $f^{n*} \xrightarrow{\tau_s^*} f^*$ [9], alors d'après la remarque 3.5 de [25]

$$(f^n_\lambda)^* = f^{n*} + \Phi^*_\lambda \xrightarrow{\tau_s^*} f^* + \Phi^*_\lambda = (f_\lambda)^*.$$

(ii)$\Rightarrow$(i): Remarquons tout d'abord que pour chaque $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$, $f^n_\lambda \in \Gamma(X)$ pour tout $n$ suffisamment grand. En effet: Si $f^n_\lambda(z_n) = -\infty$ pour une sous-suite alors les $f^n_\lambda$ sont identiquement égales à $-\infty$ car $f^n_\lambda$ est convexe majorée sur les bornés pour tout $n$. Par suite $f_\lambda \equiv -\infty$ car $f^n_\lambda \xrightarrow{\tau_s} f_\lambda$. Ce qui est absurde. L'épi-convergence étant moins fine que la slice convergence, le lemme 3.4 et un résultat de [19] montrent alors que $f^n_\lambda \to f_\lambda$ pour tout $\lambda$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$. Ainsi $f^n \xrightarrow{e} f$ d'après le lemme 3.1. Par suite, si $W$ est un $\|\cdot\|$-ouvert de $X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{epi}\, f \in (W \times ]-\infty, \alpha[)^-$ alors $\mathrm{epi}\, f^n \in (W \times ]-\infty, \alpha[)^-$ pour tout $n$ assez grand. Supposons maintenant que $\mathrm{epi}\, f^* \in (V \times ]-\infty, \eta[)^-$ où $V$ est un $\|\cdot\|_*$-ouvert et $\eta \in \mathbb{R}$, et soient $\varepsilon_0 > 0$ et $y_0 \in V$ tels que $f^*(y_0) < \eta - \varepsilon_0$. Choisissons $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$ et $y_0 \in \mathrm{int}(\frac{A}{\lambda}U^*) \cap V$. Nous avons $(f_\lambda)^*(y_0) = f^*(y_0) + \Phi^*_\lambda(y_0) < r$ avec $r := \eta - \varepsilon_0 + \Phi^*_\lambda(y_0)$. Comme $\Phi^*_\lambda$ est continue sur $W := \mathrm{int}(\frac{A}{\lambda}U^*) \cap V$, il existe une boule ouverte $O := \mathcal{B}(y_0, \delta) \subset W$ telle que $|\Phi^*_\lambda(y) - \Phi^*_\lambda(y_0)| < \varepsilon_0$ dès que $y \in O$. Maintenant puisque $\mathrm{epi}(f_\lambda)^* \cap (O \times ]-\infty, r[) \neq \emptyset$ et $f^n_\lambda \xrightarrow{\tau_s} f_\lambda$ alors d'après [12] $epi(f^n_\lambda)^* \cap (O \times ]-\infty, r[) \neq \emptyset$ pour tout $n$ suffisamment grand. Il existe alors $y_n \in O$ tel que $(f^n_\lambda)^*(y_n) < r$; d'où

$$f^{n*}(y_n) < r - \Phi^*_\lambda(y_n) = \eta - \varepsilon_0 + \Phi^*_\lambda(y_0) - \Phi^*_\lambda(y_n) < \eta.$$

Ainsi, $\mathrm{epi}\, f^{n*} \in (V \times ]-\infty, \eta[)^-$ pour tout $n$ assez grand. □

COROLLAIRE 3.6. *Si $X$ est un espace de Banach réflexif alors, $f^n \xrightarrow{M} f \iff \forall\lambda > 0$ telque $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{M} f_\lambda$.*

COROLLAIRE 3.7. *Nous avons les équivalences du théorème* 3.5 *pour les référentiels $\Phi = \|\cdot\|^p$, $p \geqslant 1$.*

PREUVE. Il suffit de remarquer que pour chaque $p \geqslant 1$, $\Phi = \|\cdot\|^p$ est un référentiel positif borné sur les bornés de $X$. □

Pour $p = 1$, on retrouve le théorème 3.7 de [12].

COROLLAIRE 3.8. *Supposons de plus que $\Phi^*$ est de classe $C^1$. Alors chacune des deux propositions du théorème* 3.5 *est équivalente à:*
(iii) $\exists\lambda_0 > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$ *et* $f^n_{\lambda_0} \xrightarrow{\tau_s} f_{\lambda_0}$.

PREUVE. D'après le théorème 3.5, il suffit de montrer que (iii)$\Rightarrow$(i). En effet: D'après le théorème 4.2 de [9] nous avons,

$$(f^n_{\lambda_0})^* = f^{n*} + \Phi^*_{\lambda_0} \xrightarrow{\tau^*_s} f^* + \Phi^*_{\lambda_0} = (f_{\lambda_0})^*.$$

Comme $\Phi^*_{\lambda_0} = \Phi^*(\lambda_0.)$ est de classe $C^1$ alors $f^{n*} \xrightarrow{\tau^*_s} f^*$ [25, Lemme 5.1]. D'où $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$ d'après [9, Théorème 4.2]. □

COROLLAIRE 3.9. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$.

(ii) *Pour chaque* $\lambda > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$ *nous avons*

(*) $\partial(f^n_\lambda) \xrightarrow{P-K} \partial(f_\lambda)$,

(**) $\exists(u,z) \in \partial(f_\lambda)$, $\forall n$ $\exists(u_n, z_n) \in \partial(f^n_\lambda)$ *tels que* $(u_n, f^n_\lambda(u_n), z_n) \to (u, f_\lambda(u), z)$.

*Si de plus* $\Phi^*$ *est de classe* $C^1$ *alors (i) est satisfaite si et seulement si (ii) est vérifiée pour un certain* $\lambda_0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$.

PREUVE. L'équivalence entre (i) et (ii) se déduit immédiatement par application du théorème 3.5 et de [3, Théorème 4.2]. La dernière partie s'obtient par application du théorème 4.2 de [3] et du corollaire 3.8. □

Nous allons terminer cette section par généraliser le théorème 3.3 de [12] au cas des référentiels quelconques définis sur $X$ et $X^*$.

THÉORÈME 3.10. *Soit* $\Psi : X^* \to \mathbb{R}^+$ *un référentiel borné sur les bornés de* $X^*$ *que l'on suppose de même constante de cœrcivité que* $\Phi$. *Alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$.

(ii) $\forall\ \lambda > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda} > \mathrm{Max}\{d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*), d(\theta, \mathrm{Dom}\, f)\}$, $f^n_\lambda \longrightarrow f_\lambda$ *et* $f^{n*}_\lambda \longrightarrow f^*_\lambda$, *où* $f^{n*}_\lambda$ *et* $f^*_\lambda$ *sont respectivement les approximations inf-convolutives de paramètre* $\lambda$ *des fonctions* $f^{n*}$ *et* $f^*$ *relativement à* $\Psi$.

PREUVE. (i)$\Rightarrow$(ii): Soit $\lambda$ tel que $\frac{A}{\lambda} > \mathrm{Max}\{d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*), d(\theta, \mathrm{Dom}\, f)\}$. D'après le théorème 3.5, $f^n_\lambda \xrightarrow{\tau_s} f_\lambda$ et $f^n_\lambda \in \Gamma(X)$ pour tout $n$ assez grand; et par les lemmes 3.2 et 3.3, la suite $(f^n_\lambda)_n$ est uniformément bornée sur les bornés. Elle est donc équi-localement-Lipschitzienne d'après [21], par suite $f^n_\lambda \to f_\lambda$ d'après [19]. Un raisonnement analogue appliqué à $(f^{n*})_n$, $f^*$ et $\Psi$ moyennant [9, Théorème 4.2] et le fait que $f^{**} = f$, montre que $f^{n*}_\lambda \longrightarrow f^*_\lambda$.

(ii)$\Rightarrow$(i): D'après le lemme 3.1 appliqué une fois à $f^n_\lambda \longrightarrow f_\lambda$ et une seconde fois à $f^{n*}_\lambda \longrightarrow f^*_\lambda$ nous avons $f^n \xrightarrow{e} f$ et $f^{n*} \xrightarrow{e} f^*$. Ainsi, si $W$ est un $\|\cdot\|$-ouvert de $X$(resp. $\|\cdot\|_*$-ouvert de $X^*$) et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{epi}\, f \in (W \times ]-\infty, \alpha[)^-$ (resp. $\mathrm{epi}\, f^* \in (W \times ]-\infty, \alpha[)^-$) alors il est facile de vérifier que $\mathrm{epi}\, f^n \in (W \times ]-\infty, \alpha[)^-$ (resp. $\mathrm{epi}\, f^{n*} \in (W \times ]-\infty, \alpha[)^-$) pour tout $n$ assez grand. □

Le théorème 3.10 s'applique évidemment aux référentiels $\Phi = \|\cdot\|^p$ et $\Psi = \|\cdot\|^q_*$, $p, q \geqslant 1$, et pour $p = q = 1$ on retrouve le théorème 3.3 de [12].

COROLLAIRE 3.11. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$.
(ii) $\forall\ \lambda > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$, $(f_\lambda^n)^* \xrightarrow{\tau_A^*} (f_\lambda)^*$.

PREUVE. D'après les théorèmes 3.5 et 3.10, $f^n \xrightarrow{\tau_s} f$ si et seulement si $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_s} f_\lambda$ et $f_\lambda^n \to f_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$. Ce qui est encore équivalent d'après [9, Théorème 4.7] au fait que $(f_\lambda^n)^* \xrightarrow{\tau_A^*} (f_\lambda)^*$ pour les mêmes $\lambda$. □

Notons finalement que si on a seulement $f_\lambda^n \longrightarrow f_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$ alors en général $f^n \overset{\tau_s}{\not\to} f$ (voir [12]).

## 4. Cas de la convergence d'attouch-wets

Nous allons maintenant caractériser la convergence d'Attouch–Wets des suites de fonctions de $\Gamma(X)$ en terme d'approximations inf-convolutives généralisées. Pour cela nous aurons besoin des deux lemmes suivants:

LEMME 4.0. *Supposons que* $f^n \xrightarrow{AW} f$ *et* $f$ *est* $\|\cdot\|$*-continue en un point* $x_0$. *Alors* $\forall x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0, f^n(x_n) \to f(x_0)$. *En particulier si* $f^n \xrightarrow{AW} f$ *et* $f$ *est* $\|\cdot\|$*-continue en tout point alors* $f^n \to f$.

PREUVE. $f$ étant $\|\cdot\|$-continue en $x_0$, il existe $M > \inf_{x\in X} f(x)$ et $\eta > 0$ tels que $f \leqslant M$ sur $x_0 + \eta U$. Comme $f^n \xrightarrow{AW} f$, alors d'après [14]

$$\{x \in X \mid f^n(x) \leqslant M\} := \{f^n \leqslant M\} \xrightarrow{AW} \{x \in X \mid f(x) \leqslant M\} := \{f \leqslant M\}.$$

Ainsi par définition de la convergence d'Attouch–Wets il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{x\in x_0+\eta U} d(x, \{f^n \leqslant M\}) < \eta, \forall n \geqslant N$. Nous en déduisons que $x_0 + \frac{\eta}{2}U + \frac{\eta}{2}U \subset \{f^n \leqslant M\} + \frac{\eta}{2}U$ pour tout $n \geqslant N$; et par [31] nous avons $x_0 + \frac{\eta}{2}U \subset \{f^n \leqslant M\}$, $\forall n \geqslant N$. Les fonctions $f^n$ sont donc uniformément majorées sur $x_0 + \frac{\eta}{2}U$. Comme $\tau_{AW} \supset \tau_s^+$ alors en vertu du lemme 3.2 et un résultat de [21], $\{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ est équi-Lipschitzienne sur $x_0 + rU$ pour $0 < r < \frac{\eta}{2}$. Il existe alors $\alpha > 0$ et $N_1 \geqslant N$ tels que

$$|f^n(y) - f^n(z)| \leqslant \alpha\|y - z\|, \ \forall y, z \in x_0 + rU, \ \forall n \geqslant N_1. \tag{2}$$

D'autre part la convergence d'Attouch–Wets étant plus fine que l'épi-convergence, il existe $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ telle que $f^n(z_n) \to f(x_0)$. Soit $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$. Il existe $N_2 \geqslant N_1$ tel que $x_n, z_n \in x_0 + rU\ \forall n \geqslant N_2$. En utilisant(2) on déduit que $f^n(x_n) \to f(x_0)$, ce qui achève la preuve. □

En dimension finie la convergence d'Attouch–Wets est identique à l'épi-convergence [4], le lemme 4.0 généralise alors le corollaire 3B de [32].

LEMME 4.1. *Soit $f : X \to ]-\infty, +\infty]$ une fonction propre vérifiant $f \geqslant -\alpha_0(\|\cdot\| + 1)$ pour un certain $\alpha_0 \geqslant 0$. Alors pour tout $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > \alpha_0$ et pour tout $\rho > 0$*

$$H_\rho(f_\lambda, f) \leqslant \lambda \frac{\rho + \rho\alpha_0 + B + \alpha_0}{A - \lambda\alpha_0}.$$

*En particulier si $(\lambda_n)_n \downarrow 0$ alors $f_{\lambda_n} \xrightarrow{AW} f$.*

PREUVE. Soient $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > \alpha_0$ et $\rho > 0$. Comme $f_\lambda \leqslant f$ alors $H_\rho(f_\lambda, f) = e_\rho(\operatorname{epi} f_\lambda, \operatorname{epi} f)$. Soit $(x, \alpha) \in (\operatorname{epi} f_\lambda)_\rho$. Par définition de $f_\lambda$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u \in X$ vérifiant

$$f(u) + \Phi_\lambda(x - u) < \alpha + \varepsilon. \tag{3}$$

Comme $\Phi_\lambda \geqslant 0$ alors $(u, \alpha + \varepsilon) \in \operatorname{epi} f$ et donc

$$d((x, \alpha), \operatorname{epi} f) \leqslant \|x - u\| + \varepsilon. \tag{4}$$

D'autre part, puisque $f \geqslant -\alpha_0(\|\cdot\| + 1)$ et $\Phi_\lambda \geqslant \frac{A}{\lambda}\|\cdot\| - B$, l'inégalité (3) implique $-\alpha_0\|u\| - \alpha_0 + \frac{A}{\lambda}\|x - u\| - B < \alpha + \varepsilon \leqslant \rho + \varepsilon$. Comme $\frac{A}{\lambda} > \alpha_0$ alors $\|x - u\| < \lambda\frac{\rho+\rho\alpha_0+B+\alpha_0+\varepsilon}{A-\lambda\alpha_0}$, et par (4) on obtient finalement $e_\rho(\operatorname{epi} f_\lambda, \operatorname{epi} f) \leqslant \lambda\frac{\rho+\rho\alpha_0+B+\alpha_0}{A-\lambda\alpha_0}$ en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0. □

Remarquons ici que la dernière affirmation du lemme 4.2 généralise en particulier les théorèmes 3.8 et 3.9 de [15].

THÉORÈME 4.2. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{AW} f$.

(ii) *Pour tout $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{AW} f_\lambda$.*

(iii) *Pour tout $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{UB} f_\lambda$.*

*Si de plus $\Phi$ est fortement cœrcif, i.e. $\frac{\Phi(x)}{\|x\|} \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, les propositions précédentes sont équivalentes à*

*(iv) Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$ et $f^n_{\lambda_0} \xrightarrow{AW} f_{\lambda_0}$.*

PREUVE. (i)⇒(ii): Fixons $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$. Comme $\tau_{AW} \supset \tau_s$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^{n*})$ pour tout $n \geqslant n_0$ et donc $\{f_\lambda; f^n_\lambda, n \geqslant n_0\} \subset \Gamma(X)$. Maintenant $\Phi_\lambda \geqslant \frac{A}{\lambda}\|\cdot\| - B$ implique $\frac{A}{\lambda}U^* \subset \operatorname{Dom} \Phi^*_\lambda$. Ainsi, $\operatorname{Dom} f^* \cap \operatorname{int}(\operatorname{Dom} \Phi^*_\lambda) \neq \emptyset$ et $f^n_\lambda \xrightarrow{AW} f_\lambda$ d'après [12, Proposition 4.2].

(ii)⇒(iii): Remarquons d'abord que (ii) implique que pour chaque $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*)$, $f^n_\lambda \in \Gamma(X)$ à partir d'un certain rang. Maintenant, le fait que $f_\lambda$ soit $\|\cdot\|$-continue en tout point et $f^n_\lambda \xrightarrow{AW} f_\lambda$ implique $f^n_\lambda \to f_\lambda$ d'après le lemme 4.0; et donc $f^n \xrightarrow{e} f$ d'après le lemme 3.1. Il existe alors une suite bornée $(x_n)_n$ et $M \in \mathbb{R}$ avec $f^n(x_n) \leqslant M$. Soient $\rho > 0$, $\alpha > 0$ et $r > 0$ avec $\|x_n\| \leqslant \rho$ et $\sup\{\Phi(z) \mid z \in \frac{\alpha+\rho}{\lambda}U\} \leqslant r$. Pour tout $x \in \alpha U$ et tout $n$, $f^n_\lambda(x) \leqslant f^n(x_n) + \Phi(\frac{x-x_n}{\lambda}) \leqslant M + r$. Les fonctions $f^n_\lambda$ sont alors uniformément majorées sur les bornés; et d'après [12, Lemme 4.1], $f^n_\lambda \xrightarrow{UB} f_\lambda$.

(iii)⇒(i): Soit $\lambda_0$ fixé tel que $\frac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$. Comme $f^n_{\lambda_0} \xrightarrow{UB} f_{\lambda_0}$ alors $f^n_{\lambda_0} \in \Gamma(X)$ pour $n$ grand et $(f^n_{\lambda_0})^* \xrightarrow{\tau^*_s} (f_{\lambda_0})^*$. Il existe alors en vertu de [9] $y$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $M > 0$ tels que

$$\sup\{\|y\|_*, (f_{\lambda_0})^*(y), \|y_n\|_*, (f^n_{\lambda_0})^*(y_n) \mid n \in \mathbb{N}\} < M.$$

Ainsi $\{f_{\lambda_0}; f^n_{\lambda_0}, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément minorée par $-\alpha_0(\|\cdot\| + 1)$ avec $\alpha_0 := M$. Il en est alors de même pour $\{f; f^n, n \in \mathbb{N}\}$. Choisissons maintenant $\lambda > 0$ tel que $\frac{A}{\lambda} > \mathrm{Max}\{\alpha_0, d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)\}$ et soit $\rho > 0$. D'après le lemme 4.1

$$\mathrm{Max}\{H_\rho(f^n_\lambda, f^n), H_\rho(f_\lambda, f)\} \leqslant \lambda \frac{\rho + \rho\alpha_0 + B + \alpha_0}{A - \lambda\alpha_0}. \tag{5}$$

D'autre part, $f^n \xrightarrow{e} f$ d'après (iii) et le lemme 3.1. Soient $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ et $\rho_0 > 0$ tels que $f(x_0) < \rho_0$ et $\|x_0\| < \rho_0$. Il existe $(x_n)_n$ telle que $f^n(x_n) < \rho_0$ et $\|x_n\| < \rho_0$. Ainsi, pour tout $\rho \geqslant \rho_0$ et tout $n$ nous avons

$$\rho \geqslant \mathrm{Max}\left\{ \inf_{\|x\|\leqslant\rho} f(x), \inf_{\|x\|\leqslant\rho} f_\lambda(x), \inf_{\|x\|\leqslant\rho} f^n(x), \inf_{\|x\|\leqslant\rho} f^n_\lambda(x)\right\};$$

et d'après la proposition 1.2 de [4]

$$H_\rho(f^n, f) \leqslant H_{9\rho}(f^n, f^n_\lambda) + H_{9\rho}(f^n_\lambda, f_\lambda) + H_{9\rho}(f_\lambda, f), \ \forall n.$$

En utilisant (5) on obtient alors

$$H_\rho(f^n, f) \leqslant H_{9\rho}(f^n_\lambda, f_\lambda) + 2\lambda \frac{9\rho + 9\rho\alpha_0 + B + \alpha_0}{A - \lambda\alpha_0}, \ \forall n. \tag{6}$$

Soient maintenant $\varepsilon > 0$ et $\lambda_1 > 0$ tels que

$$\frac{A}{\lambda_1} > \mathrm{Max}\left\{d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*), \frac{9\rho + 9\rho\alpha_0 + B + \alpha_0}{\varepsilon} + \alpha_0\right\}.$$

Pour ce $\lambda_1$ choisi, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $H_{9\rho}(f^n_{\lambda_1}, f_{\lambda_1}) < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$ car $f^n_{\lambda_1} \xrightarrow{AW} f_{\lambda_1}$ d'après (iii); et par l'inégalité (6) appliquée à $\lambda = \lambda_1$ et $n \geqslant n_\varepsilon$ on obtient $H_\rho(f^n, f) \leqslant 3\varepsilon$, ce qui prouve bien que $f^n \xrightarrow{AW} f$. Si de plus $\Phi$ est fortement cœrcif, alors $\Phi^*$ est bornée sur les bornés de $X^*$; et d'après le théorème 3.4 de [2], $f^n \xrightarrow{AW} f$ dès qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $f^n_{\lambda_0} \xrightarrow{AW} f_{\lambda_0}$. Ce qui achève la démonstration. □

Les équivalences du théorème 4.2 ont lieu en particulier pour $\Phi = \|\cdot\|^p$, $p \geqslant 1$. Pour $p = 1$ on retrouve le théorème 4.3 de [12].

D'après la démonstration précédente, si $f^n \xrightarrow{AW} f$ alors $f^n_\lambda \to f_\lambda$ et les $f^n_\lambda$ sont uniformément bornées sur les bornés pour tout $\lambda > 0$ assez petit. La réciproque est en général fausse, il suffit de reprendre l'exemple 3.4 de [12].

COROLLAIRE 4.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{AW} f$.

(ii) $\forall \lambda > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$, $e_\rho(\Delta(f_\lambda), \Delta(f^n_\lambda)) \to 0$ *pour tout* $\rho > 0$.

*Si de plus* $\Phi$ *est fortement cœrcif alors* (i) *est satisfaite si et seulement si* (ii) *est vérifiée pour un certain* $\lambda_0 > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate de [17, Théorème 3.5] et du théorème 4.2. □

COROLLAIRE 4.4. *Si $X = \mathbb{R}^p$ et $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^+$ est un référentiel quelconque, alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{e} f$.

(ii) $\forall\lambda > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda} > d(\theta, \operatorname{Dom} f^*)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{e} f_\lambda$.

(iii) $\forall\lambda > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda} > d(\theta, \operatorname{Dom} f^*)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{UB} f_\lambda$.

(iv) $\forall\lambda > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda} > d(\theta, \operatorname{Dom} f^*)$, $f^n_\lambda \to f_\lambda$.

PREUVE. Elle découle immédiatement du théorème 4.2 et du lemme 3.1. □

**Remerciements.** Les auteurs expriment leur profonde reconnaissance à l'arbitre de cet article pour ses remarques judicieuses et ses suggestions fructueuses, qui ont joué un rôle capital dans la rédaction finale de ce papier.

## References

[1] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Pitman, London, 1984.

[2] H. Attouch, D. Azé, and G. Beer, *On some inverse stability problems for the epigraphical sum*, Nonlinear Anal. Theo. Meth. Appl. **16** (1991), 241–254.

[3] H. Attouch and G. Beer, *On the convergence of subdifferentials of convex functions*, Arch. Math. **60** (1993), 389–400.

[4] H. Attouch and R. J.-B. Wets, *Quantitative stability of variational systems: I. The epigraphical distance*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 695–729.

[5] D. Azé, *Convergences variationnelles et dualité. Application en calcul des variations et en programmation mathématique*, Thèse de Doctorat, Univ. de Perpignan, 1986.

[6] D. Azé and J. P. Penot, *Operations on convergent families of sets and functions*, Optim. **21** (1990), 521–534.

[7] G. Beer, *Infima of convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 849–859.

[8] G. Beer, *Conjugate convex functions and the epi-distance topology*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 117–126.

[9] G. Beer, *The slice topology: A viable alternative to Mosco convergence in nonreflexive spaces*, Nonlinear. Anal. Theo. Meth. Appl. **19** (1992), 271–290.

[10] G. Beer, *Efficiency and the uniform linear minorization of convex functions*, Mh. Math. **115** (1993), 281–290.

[11] G. Beer, *Wijsman convergence of convex sets under renorming*, Nonlinear. Anal. Theo. Meth. Appl. **22** (1994), 207–216.

[12] G. Beer, *Lipschitz regularization and the convergence of convex functions*, Numer. Funct. Anal. Optim. **15** (1994), 31–46.

[13] G. Beer and J. Borwein, *Mosco convergence and reflexivity*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 427–436.

[14] G. Beer and R. Lucchetti, *Convex optimization and the epi-distance topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 795–813.

[15] G. Beer and R. Lucchetti, *The epi-distance topology: Continuity and stability results with applications to convex optimization problems*, Math. Oper. Res. **17** (1992), 715–726.

[16] G. Beer and R. Lucchetti, *Weak topologies for the closed subsets of a metrizable space*, Trans. Amer. Math. Soc. **335** (1993), 805–822.

[17] G. Beer and M. Théra, *Attouch–Wets convergence and a differential operator for convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 851–858.

[18] E. de Giorgi, *Convergence problems for functions and operators*, Proc. int. meeting on recent methods in nonlinear analysis, Roma 1978, Pitagora, Bologna (1979), 131–138.

[19] S. Dolecki, G. Salinetti and R. Wets, *Convergence of functions: equi-semicontinuity*, Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), 409–429.

[20] A. L. Dontchev and T. Zolezzi, *Well-posed optimization problems*, Lecture Notes in Math. 1543, Springer-Verlag, 1993.

[21] I. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris, 1974.

[22] B. El Ghali, *Mosco convergence et Approximations inf-convolutives associées à des référentiels généraux*, Thèse de troisième cycle, Faculté des Sciences de Rabat, 1988.

[23] K. el Hajioui et D. Mentagui, *Slice convergence: Stabilité et optimisation dans les espaces non réflexifs*, Preprint.

[24] A. Fougeres et A. Truffert, *Régularisation s.c.i et Γ-convergence. Approximations inf-convolutives associées à un référentiel*, (version augmentée) 84-08/15, Publications AVAMAC, Univ. de Perpignan.

[25] J. Lahrache, *Stabilité et convergences dans les espaces non réflexifs*, Sém. d'Anal. Convexe Montpellier, exposé 10, 1991.

[26] D. Mentagui, *Problèmes d'optimisation biens posés et convergences variationnelles, Théorie et applications dans le cadre de l'optimisation non différentiable*, Thèse d'Etat, F.U.N.D.P., Namur, 1996.

[27] D. Mentagui, *Analyse de récession et résultats de stabilité d'une convergence variationnelle, Application à la théorie de dualité en programmation mathématique*, à paraître ESAIM-COCV.

[28] U. Mosco, *Approximation of the solutions of some variational inequalities*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **21** (1967), 373–394.

[29] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.

[30] J. P. Penot, A. Pommelet and M. Bougeard, *Towards minimal assumptions for the infinimal convolution regularization*, Publications AVAMAC, Vol II, 85-23.

[31] H. Radström, *An imbedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 165–169.

[32] G. Salinetti and R. J.-B. Wets, *On the relations between two types of convergence for convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **60** (1977), 211–226.

[33] Y. Sonntag and C. Zalinescu, *Set convergences: An attempt of classification*, in: Proceedings of Intl. Conf. on Diff. Equations and Control theory, Iasi, Romania, August 1990, 199–226

[34] R. A. Wijsman, *Convergence of sequences of convex sets, cones and functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 186–188.

[35] R. A. Wijsman, *Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II*, Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), 32–45.

Laboratoire d'Analyse Convexe et Variationnelle
Systèmes Dynamiques et Processus Stochastiques
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Kénitra, Maroc

(Received 03 04 2001)
(Revised 16 09 2002)