

ЛЕВЫЕ ФАКТОРИАЛЫ, ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ И ГИПОТЕЗА КУРЕПЫ

В. С. Владимиров

*Посвящается светлой памяти
выдающегося математика профессора Джуро Курепы*

Резюме. Устанавливается связь левых факториалов с числами Бернулли. В терминах p -адических чисел и чисел Бернулли получены новые критерии, эквивалентные гипотезе Курепы.

1. Введение

Левым факториалом $!n$ натурального числа n называется арифметическая функция

$$!n = \sum_{k=0}^{n-1} k!, \quad n = 1, 2, \dots$$

Понятие левого факториала было введено в 1971 году выдающимся сербским математиком Джуро Курепой [1] в связи с его теоретико-числовой гипотезой (ГК): общий наибольший делитель чисел $!n$ и $n!$ равен 2,

$$(!n, n!) = 2, \quad n = 2, 3, \dots$$

В той же работе [1] Курепа показал, что существует бесконечно много натуральных чисел n , для которых ГК верна. Она проверена на ЭВМ вплоть до $n < 2^{23}$ [2]. Однако до сих пор ГК не доказана для всех n .

В работах сербских математиков установлено большое число утверждений, эквивалентных ГК (см. обзор [3,4]). Одним из таких утверждений является следующее: для простых p

$$(1.1) \quad !p \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots$$

В этой заметке доказывается следующее сравнение:

$$(1.2) \quad !p \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \frac{B_k}{k!} \equiv \sum_{m=1}^{(p-3)/2} \frac{B_{2m}}{(2m)!} [!(2m) - 1] \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots,$$

связывающие левые факториалы с числами Бернулли B_k . Приведены и другие равенства и сравнения, содержащие левые факториалы. В терминах p -адических чисел получены новые критерии, эквивалентные ГК.

Знак \square обозначает конец доказательства.

2. ГК в терминах p -адических чисел

О поле p -адических чисел \mathbb{Q}_p см. [5–8].

а) ГК эквивалентна равенству

$$|!p|_p = 1, \quad p = 3, 5, \dots,$$

где $|\cdot|_p$ — p -адическая норма.

Вытекает из (1.1). \square

б) ГК эквивалентна равенству

$$|! \infty|_p = 1, \quad p = 3, 5, \dots,$$

где $! \infty$ обозначает p -адическое число $! \infty = \sum_{k=0}^{\infty} k! \in \mathbb{Q}_p$.

Вытекает из критерия а) и из представления $! \infty = !p + pN_p$, $N_p \in \mathbb{Z}_p$; здесь \mathbb{Z}_p — кольцо целых p -адических чисел. \square

Введём последовательность полиномов

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k! x^k, \quad f_n(1) = !n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Известно, что (см. [13, стр. 16])

$$(2.1) \quad f'_n(1) = \sum_{k=1}^{n-1} k k! = -1 + n!.$$

с) ГК эквивалентна утверждению: уравнение

$$(2.2) \quad f_p(x) = 0, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad p = 3, 5, \dots$$

не имеет решений вида

$$(2.3) \quad x_0 = 1 + p\epsilon, \quad \epsilon \in \mathbb{Z}_p.$$

Действительно, если ГК неверна, то в силу (1.1) $f_p(1) = !p \equiv 0 \pmod{p}$. Далее, в силу (2.1) $f'_p(1) \not\equiv 0 \pmod{p}$. По лемме Хензеля (см. [7,8]) существует решение $x_0 \in \mathbb{Z}_p$ уравнения (2.2) вида (2.3). Обратно, если уравнение (2.2) имеет решение вида (2.3), то и $0 = f_p(1 + p\epsilon) \equiv f_p(1) = !p \pmod{p}$, так что в силу (1.1) ГК неверна. \square

Введём аналитическую в диске $|x|_p \leq 1$ функцию

$$f_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!x^k, \quad f_\infty(1) = !\infty.$$

Из (2.1) следует равенство

$$(2.4) \quad f'_\infty(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k k! = -1.$$

д) ГК эквивалентна утверждению: уравнение

$$f_\infty(x) = 0, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad p = 3, 5, \dots$$

не имеет решений вида (2.3).

Доказательство аналогично с). Используется аналог леммы Хензеля для аналитических функций p -адического аргумента с целыми p -адическими коэффициентами (см. [5, стр. 80]): если $|f_\infty(1)|_p \leq p^{-1}$ (и всегда в силу (2.4) $|f'_\infty(1)|_p = 1$), то существует число x_0 вида (2.3) такое, что $f_\infty(x_0) = 0$. \square

3. Одно тождество для сумм левых факториалов

Докажем тождество (см. также [3])

$$(3.1) \quad \sum_{k=2}^n !k = !(n-1)n, \quad n = 2, 3, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.1) функция $f_n(x) - n!$ имеет простой корень $x = 1$. Поэтому

$$(3.2) \quad f_n(x) - n! = (x-1)(b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0),$$

где $b_k = b_{k-1} - k!$, $k = 1, 2, \dots, n-3$, $b_0 = !n - 1$, $b_{n-2} = (n-1)!$. Отсюда выводим равенства $b_k = !n - !(k+1)$, $k = 0, 1, \dots, n-3$, $b_{n-2} = (n-1)!$.

Дифференцируя равенство (3.2) по x и полагая $x = 1$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} k k! = \sum_{k=0}^{n-2} b_k = \sum_{k=0}^{n-2} !(k+1) + !n(n-1),$$

откуда, принимая во внимание равенство (2.1), выводим тождество (3.1)

$$n! - 1 = !n(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} !k,$$

поскольку $!n(n-1) + !n - n! = !(n-1)n$. \square

Из тождества (3.1) и из критерия (1.1) следует.

е) ГК эквивалентна несравнению

$$\sum_{k=2}^{p-1} !k \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots$$

4. Связь левых факториалов с числами Бернулли

Нам понадобится следующее обобщённое сравнение Вильсона

$$(4.1) \quad q!(p-q-1)! \equiv (-1)^{q+1} \pmod{p}, \quad 0 \leq q \leq p-1, \quad p = 2, 3, \dots,$$

вытекающее из сравнения Вильсона (см. [9]).

Из сравнения (4.1) следует сравнение

$$(4.2) \quad !p \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}, \quad p = 3, 5, \dots$$

Введём обозначения

$$(4.3) \quad V_p = \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \frac{B_k}{k!}, \quad \bar{V}_p = \sum_{k=0}^{p-2} \frac{B_k}{k!},$$

где B_k , $k = 0, 1, \dots$ — числа Бернулли. Они определяются рекуррентным соотношением (см. [7])

$$(4.4) \quad nB_{n-1} + 1 + \sum_{k=1}^{n-2} B_k C_k^n = 0, \quad B_0 = 1, \quad n = 2, 3, \dots,$$

так что $B_1 = -1/2$, $B_3 = B_5 = \dots = 0$.

Докажем сравнение (1.2):

$$(4.5) \quad !pV_p \equiv \sum_{m=1}^{(p-3)/2} \frac{B_{2m}}{(2m)!} [!(2m) - 1] \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обобщённым сравнением Вильсона (4.1) и сравнением (4.2). Умножая равенства (4.4) на $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ и суммируя по n от 2 до $p-1$, получим

$$\sum_{n=2}^{p-1} (-1)^{n+1} \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{p-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \sum_{n=2}^{p-1} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{B_k (-1)^{n+1}}{k!(n-k)!} = 0,$$

откуда выводим сравнение

$$(4.6) \quad \sum_{k=1}^{p-2} (-1)^k \frac{B_k}{k!} + !p + \sum_{k=1}^{p-3} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k+2}^{p-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-k)!} \equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots$$

Далее, следующая цепочка равенств и сравнений имеет место

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+2}^{p-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-k)!} &\equiv \sum_{n=k+2}^{p-1} (-1)^k (p-n+k-1)! \\ &= (-1)^k \sum_{q=k}^{p-3} q! = (-1)^k [!(p-2) - !k] = (-1)^k (!p - !k) \pmod{p}, \\ & \qquad \qquad \qquad k = 1, 2, \dots, p-3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.6) следует сравнение (4.5)

$$\sum_{k=1}^{p-2} (-1)^k \frac{B_k}{k!} + !p + \sum_{k=1}^{p-3} (-1)^k \frac{B_k}{k!} (!p - !k) \equiv 0 \pmod{p},$$

если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{p-3} (-1)^k \frac{B_k}{k!} (!k - 1) = \sum_{m=1}^{(p-3)/2} \frac{B_{2m}}{(2m)!} [!(2m) - 1], \quad p = 3, 5, \dots \quad \square$$

Из сравнения (4.5) и критерия (1.1) следует такое достаточное условие справедливости ГК.

f) Если

$$(4.7) \quad \sum_{m=1}^{(p-3)/2} \frac{B_{2m}}{(2m)!} [!(2m) - 1] \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 5, 7, \dots,$$

то ГК верна и справедливо несравнение

$$(4.8) \quad V_p \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 5, 7, \dots$$

Если же справедливо несравнение (4.8), то ГК эквивалентна несравнению (4.7).

5. Исследование сумм V_p и \bar{V}_p

Если ввести сумму

$$V'_p = \sum_{m=1}^{(p-3)/2} \frac{B_{2m}}{(2m)!}, \quad p = 3, 5, \dots, \quad V'_3 = 0, \quad V'_5 = 1/12,$$

то суммы V_p и \bar{V}_p примут вид

$$(5.1) \quad V_p = 3/2 + V'_p, \quad \bar{V}_p = 1/2 + V'_p.$$

Воспользуемся известной формулой (см. [7])

$$(5.2) \quad B_{2m} = 2(-1)^{m-1} \frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \zeta(2m), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где ζ — дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

(о дзета-функции Римана см. [12]). В силу (5.2) выражение для V'_p примет вид

$$\begin{aligned} V'_p &= 2 \sum_{m=1}^{(p-3)/2} (-1)^{m-1} \frac{\zeta(2m)}{(2\pi)^{2m}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{(p-3)/2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi n)^{2m}} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi n)^{-2} + (-1)^{(p-1)/2} (2\pi n)^{1-p}}{1 + (2\pi n)^{-2}}, \end{aligned}$$

то-есть

$$(5.3) \quad V'_p = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{(p-1)/2} (2\pi n)^{3-p}}{1 + (2\pi n)^2}.$$

Но (см. [7])

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (2\pi n)^2} = \frac{1}{e-1} - 1 + 1/2 = \frac{3-e}{2(e-1)} \approx 0,08197\dots$$

Перепишем равенство (5.3) в виде

$$(5.4) \quad V'_p = \frac{3-e}{2(e-1)} + (-1)^{(p-1)/2} \epsilon_p,$$

где

$$\epsilon_p = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{p-3}(1+4\pi^2 n^2)}.$$

Оценим ϵ_p ($p = 5, 7, \dots$):

$$\begin{aligned} \epsilon_p &< 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{p-1}} = 2 \frac{\zeta(p-1)}{(2\pi)^{p-1}} = \frac{|B_{p-1}|}{(p-1)!} \leq 2 \frac{\zeta(4)}{(2\pi)^{p-1}}, \\ \epsilon_p &> 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{(2\pi n)^{p-1}(1+4\pi^2)} = 2 \frac{4\pi^2}{1+4\pi^2} \frac{\zeta(p-1)}{(2\pi)^{p-1}} > \frac{8\pi^2}{(1+4\pi^2)(2\pi)^{p-1}}, \end{aligned}$$

то-есть

$$(5.5) \quad 1,95(2\pi)^{1-p} < \epsilon_p < 2,22(2\pi)^{1-p}, \quad p = 5, 7, \dots$$

Из оценок (5.5) и из равенства (5.4) следует, что p -целые числа $V_p > 0$, $\bar{V}_p > 0$ и $V'_p > 0$ ($V'_3 = 0$) и при $p \rightarrow \infty$

$$V_p \rightarrow \frac{e}{e-1}, \quad \bar{V}_p \rightarrow \frac{1}{e-1}, \quad V'_p \rightarrow \frac{3-e}{2(e-1)}.$$

6. Голоморфные функции с p -целыми коэффициентами Тейлора

Пусть p -простое число. Рациональное число x называется p -целым, если оно может быть представлено в виде $x = a/b$, где a и b — целые числа и $b \not\equiv 0 \pmod{p}$. Множество p -целых чисел образует кольцо.

ЛЕММА 1. Если $p \geq 3$ и функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

голоморфна в круге $|z| < a$ и непрерывна в $|z| \leq a$, причем коэффициенты a_k , $k = 0, 1, \dots, p-q$, p -целые, то

$$(6.1) \quad \begin{aligned} J_q &= \sum_{k=0}^{p-q} \frac{a_k}{k!} \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z} \left[\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{p-1} - \frac{1}{z^{p-1}} - \frac{1}{z^{p-2}} - \dots - \frac{1}{z^{p+1-q}} \right] dz \pmod{p}, \\ & \qquad \qquad \qquad q = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о вычетах справедливо равенство

$$\frac{a_k}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда выводим

$$(6.2) \quad J_q = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} f(z) \sum_{k=0}^{p-q} \frac{dz}{z^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} f(z) \frac{z^{p-q+1} - 1}{z^{p-q+1}(z-1)} dz.$$

Пусть $q = 1$. Продолжая равенства (6.2), получим сравнение (6.1)

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} f(z) \frac{[1 + (z-1)]^p - 1}{z^p(z-1)} dz \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} f(z) \frac{(z-1)^{p-1}}{z^p} dz \pmod{p},$$

поскольку $C_k^p \equiv 0 \pmod{p}$, если $k \neq 0$ или $k \neq p$.

Пусть $q \geq 2$. Продолжая равенства (6.2), аналогично получим сравнение (6.1)

$$\begin{aligned} J_q &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} f(z) \frac{z^p - z^{q-1}}{z^p(z-1)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} f(z) \frac{[1 + (z-1)]^p - z^{q-1}}{z^p(z-1)} dz \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} f(z) \frac{(z-1)^{p-1} + \frac{1-z^{q-1}}{z-1}}{z^p} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z} \left[\frac{(z-1)^{p-1}}{z^{p-1}} - \frac{1+z+\dots+z^{q-2}}{z^{p-1}} \right] dz. \quad \square \end{aligned}$$

Пусть все коэффициенты a_k функции f вещественны, то-есть $f(\bar{z}) = \bar{f}(z)$. Сравнение (6.1) при $a = 1$ и $q = 1, 2$ примет вид

$$(6.3) \quad J_1 \equiv \frac{1}{\pi} (-1)^{(p-1)/2} \int_0^\pi \operatorname{Re} [f(e^{i\theta}) e^{-\theta(p-1)/2}] \sin^{p-1} \theta / 2 d\theta \pmod{p},$$

$p = 3, 5, \dots,$

$$(6.4) \quad \begin{aligned} J_2 &\equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi f(e^{i\theta}) e^{-i\theta(p-1)/2} \left[(-1)^{(p-1)/2} \sin^{p-1} \theta / 2 - e^{-i\theta(p-1)/2} \right] d\theta \pmod{p} \\ &\equiv J_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{Re} [f(e^{i\theta}) e^{-i\theta(p-1)/2}] d\theta \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Действительно, если $f \in L_1(S^1)$ и $\bar{f}(z) = f(\bar{z})$, то справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} f\left(\frac{i-x}{i+x}\right) \frac{dx}{1+x^2}.$$

Отсюда и из формулы (6.1) при $q = 1$ следует формула (6.3)

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi f(e^{i\theta}) (1 - e^{-i\theta})^{p-1} d\theta \\ &= \frac{2^{p-1}}{\pi} (-1)^{(p-1)/2} \int_0^\pi \operatorname{Re} [f(e^{i\theta}) e^{-i\theta(p-1)/2}] \sin^{p-1} \theta / 2 d\theta, \pmod{p} \end{aligned}$$

так как по теореме Ферма $2^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$ при $p \geq 3$. Аналогично выводится и сравнение (6.4). \square

7. Примеры

Применим полученные в п.6 результаты к вычислению сравнений чисел $e_p, !p, V_p$ и \bar{V}_p (см. пп. 3 и 4).

ПРИМЕР 1. Числа $e_p = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}$, $p = 3, 5, \dots$. Для них $f(z) = e^z$, $a = 1$, $a_k = 1$, $q = 1$, так что в силу (6.3)

$$e_p \equiv \frac{1}{\pi} (-1)^{(p-1)/2} \int_0^\pi e^{\cos \theta} \cos[\sin \theta - \theta(p-1)/2] \sin^{p-1} \theta/2 d\theta \pmod{p}.$$

ПРИМЕР 2. Числа $!p$, $p = 3, 5, \dots$. Для них $f(z) = -e^{-z}$, $a = 1$, $a_k = (-1)^{k+1}$, $q = 1$, так что в силу (6.3)

$$!p \equiv \frac{1}{\pi} (-1)^{(p+1)/2} \int_0^\pi e^{-\cos \theta} \cos[\sin \theta + \theta(p-1)/2] \sin^{p-1} \theta/2 d\theta \pmod{p}.$$

ПРИМЕР 3. Числа V_p , $p = 3, 5, \dots$. Для них $f(z) = -z(e^{-z} - 1)^{-1}$, $a = 1$, $a_k = (-1)^k B_k$, $q = 2$ (см. [7]), так что в силу (6.4)

$$V_p \equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \left(e^{-e^{i\theta}} - 1 \right)^{-1} e^{-i\theta(p-1)/2} \times \left[(-1)^{(p+1)/2} \sin^{p-1} \theta/2 + e^{-i\theta(p-1)/2} \right] d\theta \pmod{p}.$$

ПРИМЕР 4. Числа \bar{V}_p , $p = 3, 5, \dots$. Для них $f(z) = z(e^z - 1)^{-1}$, $a = 1$, $a_k = B_k$, $q = 2$ (см. [7]), так что в силу (6.4)

$$\bar{V}_p \equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \left(e^{e^{i\theta}} - 1 \right)^{-1} e^{-i\theta(p-1)/2} \times \left[(-1)^{(p-1)/2} \sin^{p-1} \theta/2 - e^{-i\theta(p-1)/2} \right] d\theta \pmod{p}.$$

8. Применение Главной теоремы Рамануджана

В 1913 году великий индийский математик Сринаваза Рамануджан открыл замечательную теорему, названную им Ramanujan's Master Theorem (RMT) (см. [10]): если в окрестности точки $x = 0$

$$(8.1) \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!} (-x)^k,$$

то существует "естественное" непрерывное продолжение коэффициентов $\varphi(k)$, $k = -1, -2, \dots$ такое, что

$$(8.2) \quad \int_0^\infty x^{k-1} F(x) dx = (k-1)! \varphi(-k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Он указал ряд необходимых условий, однако не указал достаточных условий на функцию F , при которых RMT верна, а в конкретных случаях проверял её справедливость.

ПРОБЛЕМА. Найти необходимые и достаточные условия справедливости РМТ.

(По этому поводу см. Харди [11], а также [10, стр. 299].)
Рассмотрим два примера на применение РМТ.

ПРИМЕР 5. При $F(x) = e^{-x}$, $\varphi(k) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$ РМТ верна и формула (8.2) даёт

$$(8.3) \quad \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx = (k-1)!.$$

Докажем теперь известное сравнение [3]

$$(8.4) \quad !p \equiv \int_0^{\infty} (x-1)^{p-1} e^{-x} dx \pmod{p}.$$

Действительно, в силу формулы (8.3)

$$\begin{aligned} !p &= \sum_{k=0}^{p-1} k! = \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{p-1} x^k dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x^p - 1}{x-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{[(x-1) + 1]^p - 1}{x-1} e^{-x} dx, \end{aligned}$$

откуда и вытекает сравнение (8.4), так как $C_k^p \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq k \leq p-1$. \square

ПРИМЕР 6. Положим

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{k!} (-x)^k,$$

так что

$$(8.5) \quad \varphi(k) = (-1)^k B_k = B_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Как известно (см. [7, 12]),

$$(8.6) \quad B_k = -k\zeta(1-k), \quad k = 2, 3, \dots$$

есть аналитическая интерполяция чисел Бернулли B_k , $k = 2, 3, \dots$

Далее, справедливо равенство [8]

$$(8.7) \quad \int_0^{\infty} x^s \frac{dx}{e^x - 1} = \Gamma(s+1)\zeta(s+1), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

так что РМТ верна.

Теперь, пользуясь формулой (5.2), при $s = 2k - 1$ из (8.7) выводим

$$\int_0^\infty x^{2k-1} \frac{dx}{e^x - 1} = (2k - 1)! \zeta(2k) = \frac{|B_{2k}|}{4k} (2\pi)^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$(8.8) \quad \frac{|B_{2k}|}{2k} = 2 \int_0^\infty \frac{y^{2k-1} dy}{e^{2\pi y} - 1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

и стало быть

$$(8.9) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{|B_{2k}|}{2k} &= 2 \int_0^\infty (e^{2\pi y} - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{(p-3)/2} y^{2k-1} dy \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{y^{p-2} - y}{(y^2 - 1)(e^{2\pi y} - 1)} dy = 2 \int_0^\infty \frac{[(y-1) + 1]^{p-2} - y}{(y^2 - 1)(e^{2\pi y} - 1)} dy \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{(y-1)^{p-3} - 1 + \sum_{k=1}^{p-3} (y-1)^{k-1} C_k^{p-2}}{(y+1)(e^{2\pi y} - 1)} dy. \end{aligned}$$

Докажем сравнение

$$(8.10) \quad \sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{|B_{2k}|}{2k} \equiv 2 \int_0^\infty \frac{(y-1)^{p-1} - y^2 - y - 1}{y^2(y+1)(e^{2\pi y} - 1)} dy \pmod{p},$$

$$p = 5, 7, \dots$$

Предварительно введём следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — полиномы с p -целыми коэффициентами. Будем говорить, что $f(x) \equiv g(x) \pmod{p}$, если соответствующие коэффициенты этих полиномов сравнимы по модулю p .

ЛЕММА 2.

$$(8.11) \quad \sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1} C_k^{p-2} \equiv -\frac{2x^{p-2} + x^{p-3} + x + 2}{(1+x)^2} \pmod{p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь обобщённым сравнением Вильсона (4.1), получим следующую цепочку равенств и сравнений, эквивалентную сравнению (8.11)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1} C_k^{p-2} &= \sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1} \frac{(p-2)!}{k!(p-2-k)!} \equiv \sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1} (-1)^{k+1} (p-k-1) \\ &\equiv \sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1} (-1)^k (k+1) = \sum_{k=2}^{p-2} x^{k-2} (-1)^{k+1} k = -\frac{1}{x} \sum_{k=2}^{p-2} x^{k-1} (-1)^k k \\ &= -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \sum_{k=2}^{p-2} (-x)^k = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{x^{p-1} - x^2}{x+1} \\ &= \frac{(p-2)x^{p-2} + (p-1)x^{p-3} - x - 2}{(x+1)^2} \equiv -\frac{2x^{p-2} + x^{p-3} + x + 2}{(x+1)^2} \pmod{p}. \quad \square \end{aligned}$$

Применим лемму к интегралу (8.9) при $x = y - 1$. (Эта операция законна, так как подынтегральное выражение в (8.9) за исключением множителя $(e^{2\pi e} - 1)^{-1}$ есть полином по y по модулю p с p -целыми коэффициентами в силу (8.8).) В результате получим сравнение (8.10):

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{|B_{2k}|}{2k} \equiv 2 \int_0^\infty \frac{y^2(y-1)^{p-3} - 2(y-1)^{p-2} - (y-1)^{p-3} - y^2 - y - 1}{y^2(y+1)(e^{2\pi y} - 1)} dy \pmod{p},$$

$p = 5, 7, \dots$

Действуя подобным образом и исходя из формулы (см. [8])

$$\int_0^\infty x^s \frac{dx}{e^x + 1} = \Gamma(s+1)\zeta(s+1)(1 - 2^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

получим сравнение

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{|B_{2k}|}{2k} (1 - 2^{1-2k}) \equiv 2 \int_0^\infty \frac{(y-1)^{p-1} - y^2 - y - 1}{y^2(y+1)(e^{2\pi y} + 1)} dy \pmod{p},$$

$p = 5, 7, \dots$

Благодарности. Благодарю Фонд поддержки ведущих научных школ (проект 00-15-96073) за частичную финансовую поддержку. Благодарю профессора А. А. Карацубу за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Ё. Курепа, *On the left factorial function $n!$* , Math. Balkan. 1 (1971), 147–153.
2. М. Џивковић, *The number of primes $\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} i!$ is finite*, Math. Comput. 68 (1999), 403–409.
3. А. Ивић and Џ. Мижаловић, *On Kurepa's Problems in Number Theory*, Publ. Inst. Math. 71 (1995), 19–28.
4. В. Драговић, *On some finite sums with factorials*, Facta Univ., Ser. Math. Inf. 14 (1999), 1–10.
5. W. H. Schickhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p -adic analysis*, Cambridge University Press, 1984.
6. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p -Adic analysis and mathematical physics*, World Scientific, Singapore, 1994.
7. Z. I. Borevich and I. R. Schafarevich, *Number Theory*, Academic Press, 1966.
8. N. Koblitz, *p -adic numbers, p -adic analysis and zeta-functions*, Springer-Verlag, 1977.
9. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Физматгиз, Москва, 1952.
10. Bruce C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part I*, Springer-Verlag, 1985.
11. G. H. Hardy, *Ramanujan, 3-rd ed.*, Chelsea, New York, 1978.
12. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Физматлит, Москва, 1983.
13. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва, 1963.

Steklov Mathematical Institute
Gubkina Str. 8
117966 GSP-1
Moscow, Russia

(Поступила 10 09 2002)