PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 71(85) (2002), 133–147

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТАУБЕРОВЫХ ТЕОРЕМ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. Л. Якымив

Резюме. В статье дан обзор тауберовых теорем и их вероятностных приложений полученных автором за последние 20 лет.

1. Введение

Тауберовы теоремы, полученные И. Караматой, оказали существенное влияние на развитие не только теории функций, но и других областей математики, в том числе и теории вероятностей.

Настоящая статья содержит некоторые обобщения тауберовых теорем И. Карамата [51-52] и их приложения в различных направлениях теории вероятностей, полученные автором. Статья носит обзорный характер и охватывает работы [26-39] и [65], написанные в период с 1981 по 2000 год. Близкая по теме статья была опубликована Н. Г. Бингхэмом в 1989 году [40]. Однако, что касается содержания, то эти статьи между собой совершенно не пересекаются.

В разделе 2 работы приводятся некоторые утверждения тауберова и абелева типа. Их вероятностные приложения помещены в разделах 3, 4, 5, и 6. В частности, в разделе 3 формулируются предельные теоремы для ветвящихся процессов Беллмана-Харриса, в разделе 4 приводятся предельные теоремы для некоторых классов случайных подстановок, в разделе 5 изучаются асимптотические свойства случайных процессов рекордов, в разделе 6 исследуются вероятности больших уклонений для безгранично делимых случайных величин.

Автор выражает глубокую признательность Т. Острогорски за поддержку идеи написания настоящей обзорной статьи.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 40E05; Secondary 40-02..

Работа написана при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 00-15-96136, 00-01-00090

2. Тауберовы теоремы

Последние 25 лет характерны повышенным интересом авторов к многомерным тауберовым и абелевым теоремам. Отметим, в частности, исследования в этом направлении В. С. Владимирова, Ю. Н. Дрожжинова, Б. И. Завьялова, Е. Омея, Т. Острогорски, С. Пилиповича, Б. Станковича, А. Такачи, У. Стадтмюллера, Р. Траутнера, А. И. Стама [7, 8, 54–57, 59–62]. Работы [7, 54, 57] являются монографиями.

Первоначально мы сформулируем три многомерные тауберовы теоремы, которые получены автором в работах [27, 29, 32] в связи с приложениями к ветвящимся процессам и случайным подстановкам. Начнем с определения некоторых понятий.

Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый телесный конус в R^n с вершиной в нуле, то-есть, замкнутое выпуклое множество в R^n, такое, что для всех $x \in \Gamma$ и $t > 0$ $tx \in \Gamma$, причем $\operatorname{int}\Gamma \neq \emptyset$ и $\operatorname{int}\Gamma^* \neq \emptyset$, где $\Gamma^* = \{y : y \in R^n,\ (y,x) \geqslant 0\ \forall x \in \Gamma\}$. При этом сопряженный конус Γ^* тоже будет замкнутым выпуклым острым и телесным. Положим $S = \Gamma \setminus \{0\}$, $G = \operatorname{int}\Gamma$, $C = \operatorname{int}\Gamma^*$. Запись

$$x \overset{\Gamma}{\leqslant} y \quad (x \overset{\Gamma}{<} y)$$

будет означать, что

$$x, y, y - x \in \Gamma \quad (x \in \Gamma, y, y - x \in G).$$

Аналогичным образом вводится отношение порядка в конусах G, Γ^*, C. Естественным образом теперь можно ввести понятие монотонной функции (в Γ, G, Γ^* или C). Скажем, функцию $f(x)$ мы будем называть неубывающей в Γ, если при

$$x \overset{\Gamma}{\leqslant} y \quad f(x) \leqslant f(y)$$

и так далее. При $n = 1$ положим $\Gamma = \{t : t \geqslant 0\}$. Преобразование Лапласа функции f на Γ будем обозначать $\hat{f}(\lambda)$:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_\Gamma e^{-(\lambda,x)} f(x)\, dx$$

в предположении, что оно существует при $\lambda \in C$.

Функцию $f(x)$ будем называть r-*медленно колеблющейся* на бесконечности в Γ (в G), если для всех $x \in \Gamma$ ($x \in G$) при $t \to \infty$ и $x_t \to x$

$$f(tx_t) - f(tx) = o(r(t)), \tag{2.1}$$

где $r(t)$ – некоторая положительная функция переменной $t \geqslant 0$.

Положительную функцию $f(x)$ будем называть *слабо осциллирующей* на бесконечности в Γ (в G), если она r-медленно колеблется на бесконечности в Γ (в G) при $r(t) = f(te)$ для произвольного вектора $e \in S$ ($e \in G$).

Теорема 2.1. *Пусть функция* $r(t)$ *правильно меняется на бесконечности с показателем* $\gamma > -n$, *функция* $f(x)$ r*-медленно колеблется на бесконечности в* Γ *и для всех* $\lambda \in C$ $\widehat{|f|}(\lambda) < \infty$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Если для всех* $\lambda \in C$ *при* $t \to \infty$

$$\frac{\hat{f}(\lambda/t)}{t^n r(t)} \to \psi(\lambda), \quad |\psi(\lambda)| < \infty, \tag{2.2}$$

то для каждого $x \in S$ *при* $t \to \infty$

$$f(tx)/r(t) \to \phi(x), \quad |\phi(x)| < \infty, \tag{2.3}$$

причем для всех $\lambda \in C$ *существует* $\hat{\phi}(\lambda)$ *и*

$$\hat{\phi}(\lambda) = \psi(\lambda), \quad \lambda \in C. \tag{2.4}$$

2) *Если имеет место* (2.3), *то для некоторой функции* $\psi(\lambda)$ *выполнены также соотношения* (2.2) *и* (2.4).

3) *В предположении каждого из пунктов* 1) *или* 2) *функция* $\phi(x)$ *непрерывна и однородна в* S *со степенью однородности* γ (*то-есть,* $\phi(tx) = t^\gamma \phi(x)$ *при* $t > 0$ *и* $x \in S$), *соотношение* (2.2) *выполнено равномерно по* $x \in K$ *для произвольного компакта* $K \subseteq S$.

Для двух конусов Γ_1 и Γ_2 будем писать $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, если замыкание множества $\{x : x \in \Gamma_1,\ |x| = 1\}$ содержится в $\operatorname{int}\Gamma_2$.

Теорема 2.2. *Пусть для некоторых функций* $f(x) \geqslant 0$ *и* $g(x) \geqslant 0$, *определенных в* Γ, *существуют их преобразования Лапласа* $\hat{f}(\lambda)$ *и* $\hat{g}(\lambda)$ *при* $\lambda \in C$, *функция* $f(x)$ *слабо осциллирует на бесконечности в* Γ, $g(x) = u(x)v(x)$, $x \in \Gamma$, *где функция* $u(x)$ *монотонна в* G, *функция* $v(x)$ *слабо осциллирует на бесконечности в* G *и для некоторых действительных чисел* $\alpha > -n$, $b > 0$, $c > 0$ *и произвольных* $t \geqslant b$ *и* $e \in \Gamma$, $|e| = 1$

$$f(tx)/f(te) \leqslant c|x|^\alpha \tag{2.5}$$

где $b/t \leqslant |x| \leqslant 1$, $x \in \Gamma$. *Если для некоторого телесного конуса* $C_0 \prec C$ *и всех* $\lambda \in C_0$

$$\hat{g}(\lambda t)/\hat{f}(\lambda t) \to 1 \quad (t \to 0_+),$$

то для произвольного конуса $\Gamma_0 \prec \Gamma$

$$g(x)/f(x) \to 1 \quad (|x| \to \infty, x \in \Gamma_0).$$

Замечание 2.1. В [29] показано, что для каждой слабо осциллирующей функции $f(x)$ и некоторых α, $b > 0$, $c > 0$ справедливо неравенство (2.5). Так что единственным дополнительным требованием в теореме 2.2 является неравенство $\alpha > -n$.

Теорема 2.3. *Пусть для всех $u, v \in [0,1)$ конечна функция*

$$A(u,v) = \sum_{m,n \geqslant 0} m^{\rho-1} a(m,n) u^m v^n$$

($\rho \geqslant 1$, $a(m,n) \geqslant 0$), *причем для всех $\lambda, \mu > 0$ при $t \to \infty$*

$$A(e^{-\lambda/t}, e^{-\mu/t})/r(t) \to \lambda^{-\rho}\mu^{-\sigma}\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma),$$

где $\sigma > 0$, $r(t)$ – некоторая положительная функция переменной t. Если $a(m,n)$ монотонна по m и при $n \to \infty$, $m \asymp n$, $l \geqslant n$, $l - n = o(n)$

$$a(m,n) - a(m,l) = o\biggl(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{l} a(m,i)\biggr),$$

то для произвольных $x > 0$, $y > 0$ при $t \to \infty$

$$a(tx, ty) \sim r(t) t^{-1-\rho} y^{\sigma-1}$$

(*при нецелых u, v, полагаем $a(u,v) = a([u],[v])$*).

Отметим, что при $n = 1$ и $r(t) \equiv 1$ мы приходим в (2.1) к хорошо известному определению медленно колеблющейся функции (см. [21, 40, 53]). Близкие классы функций также рассматривались в [48, 49] Л. де Хааном. Для наглядности приведем примеры слабо осциллирующих функций при $n = 1$ ($\Gamma = R_1^+ \equiv \{t, t \geqslant 0\}$).

1) Пусть функция f правильно меняется на бесконечности, то-есть, положительна, измерима и для всех $\lambda > 0$ при $t \to \infty$

$$f(\lambda t)/f(t) \to \phi(\lambda) > 0,\ \phi(\lambda) < \infty.$$

Тогда f слабо осциллирует на бесконечности. Как общеизвестно, эти функции были введены впервые И. Карамата [50]. Подробные сведения о них имеются в книге энциклопедического характера Н. Г. Бингхэма, Ч. М. Голди, Ж. Л. Тойгельса [41].

2) Пусть функция $f(x) > 0$ определена и дифференцируема при $x \geqslant a \geqslant 0$ и для некоторых действительных чисел α и β

$$\alpha f(x) \leqslant x f'(x) \leqslant \beta f(x).$$

Тогда f слабо осциллирует на бесконечности (такие функции были введены М. В. Келдышем в [11] и использовались в дальнейшем в тауберовых теоремах – см., например, [58]).

3) Пусть для всех $c > 1$ существуют такие константы α, β и $N > 0$, что для произвольных $x > y > N$

$$c^{-1}(x/y)^{\alpha} \leqslant f(x)/f(y) \leqslant c(x/y)^{\beta}.$$

Тогда f слабо осциллирует на бесконечности. Заметим, что для монотонных функций одно из последних неравенств выполнено автоматически (такие условия на монотонные функции f использовались в тауберовых теоремах, доказанных В.П. Белогрудем, В.И. Мацаевым, Ю.А. Палантом, Я.Т. Султанаевым в работах [2, 14, 24]).

4) Пусть функция $f(x) > 0$ неубывает и для всех $\lambda > 1$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} \equiv \phi(\lambda) < \infty,$$

причем $\phi(1_+) = 1$. Тогда f слабо осциллирует на бесконечности (такие условия на функцию f использовались в тауберовых теоремах, доказанных У. Стадтмюллером и Р. Траутнером [59–61]). Аналогичный пример можно привести и для невозрастающих функций.

В заключение настоящего раздела мы сформулируем еще четыре одномерные тауберовы теоремы, которые использовались при исследовании вероятностей больших уклонений для рекордных моментов и безгранично делимых случайных величин в статьях [30, 31].

Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ заданы и положительны при $t \geqslant a \geqslant 0$. Мы будем писать, что

$$f(t) \overset{w}{\sim} g(t) \tag{2.6}$$

при $t \to \infty$, если для произвольного $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta_0 \in (0,1)$, что для любого $\delta \in (0,\delta_0)$ найдется $t_0 > 0$, что при $t \geqslant t_0$ выполнены неравенства

$$(1-\epsilon)g(t(1+\delta)) \leqslant f(t) \leqslant (1+\epsilon)g(t(1-\delta)).$$

Заметим, что, если $g(t)$ слабо осциллирует на бесконечности, то из (2.6) следует обычная эквивалентность $f(t)$ и $g(t)$ на бесконечности

$$f(t) \sim g(t) \ (t \to \infty),$$

то-есть, что $f(t)/g(t) \to 1$ при $t \to \infty$.

Теорема 2.4. *Пусть при $t > 0$ заданы функции $a_i(t) > 0$, $b_i(t) > 0$, $i = 1,2$, причем $a_1(t)$ и $b_1(t)$ не возрастают, а $a_2(t)$ и $b_2(t)$ слабо осциллируют на бесконечности. Положим $a(t) = a_1(t)a_2(t)$, $b(t) = b_1(t)b_2(t)$,*

$$A(t) = \int_0^t a(u)\,du, \quad B(t) = \int_0^t b(u)\,du, \quad t > 0.$$

Если $\hat{a}(t) \sim \hat{b}(t)$ $(t \to 0_+)$ и для всех $\lambda \in (0,1)$ $\limsup_{t\to\infty} B(\lambda t)/B(t) < 1$, то

$$a(t) \overset{w}{\sim} b(t) \ (t \to \infty).$$

Теорема 2.5. *Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ положительны, не возрастают при $t > 0$,*

$$\limsup_{t\to\infty} g(t)/g(2t) < \infty$$

и существует такое $M \geqslant 0$, что для каждого фиксированного целого $n > M$

$$\frac{d^n}{dt^n}\hat{f}(t) = (1 + o(1))\frac{d^n}{dt^n}\hat{g}(t) \ (t \to 0_+).$$

Тогда при $t \to \infty$

$$f(t) \overset{w}{\sim} g(t).$$

Теорема 2.6. *Пусть функция $g(t)$ положительна и не возрастает при $t > 0$, функция $f(t)$ дифференцируема при достаточно больших t, причем*

$$f'(t) = O(g(t)/t), \ t \to \infty.$$

Если существует такое $M \geqslant 0$, что для каждого фиксированного целого $n > M$

$$\frac{d^n}{dt^n}\hat{f}(t) = o\Big(\Big|\frac{d^n}{dt^n}\hat{g}(t)\Big|\Big), \ t \to 0_+,$$

то при $t \to \infty$ $f(t) = o(g(t))$.

Теорема 2.7. *Пусть функции $a(t)$ и $b(t)$ измеримы и неотрицательны при $t \geqslant 0$, при $\lambda > 0$ у них существуют преобразования Лапласа $\hat{a}(\lambda)$ и $\hat{b}(\lambda)$, для некоторого $\alpha \geqslant 0$ функция $b(t)$ невозрастает при $t \geqslant \alpha$ и мажорируемо меняется на бесконечности* [41]:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{b(t)}{b(2t)} < \infty,$$

причем при $y \geqslant x$, $y = x + o(x)$

$$\limsup_{x\to\infty}(a(y) - a(x))/b(x) \leqslant 0.$$

Если существует $M \geqslant 0$ такое, что для произвольного фиксированного целого $n > M$ при $t \to 0_+$

$$\frac{d^n}{dt^n}\hat{a}(t) = (1 + o(1))\frac{d^n}{dt^n}\hat{b}(t),$$

то при $t \to \infty$

$$a(t) \overset{w}{\sim} b(t).$$

3. Предельные теоремы для критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса

Напомним, что в ветвящихся процессах Беллмана-Харриса каждая частица является независимой вероятностной копией первоначальной частицы, имеющей функцию распределения длительности жизни $G(t)$, $t \geqslant 0$ и производящую функцию числа потомков, порождаемых частицей в конце жизни, $h(s)$, $s \in [0,1]$. Критичность процесса означает, что $h'(1) = 1$ (в среднем одна частица порождает одну).

Пусть $\mu(t)$ – число частиц в момент t в процессе Беллмана–Харриса, если в начальный момент $t = 0$ в процессе был одна частица нулевого возраста. В статье [28] была доказана следующая предельная теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $G(0_+) = 0$,

$$h(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L\Big(\frac{1}{1-s}\Big),\ s \in (0,1),$$

$$1 - G(t) = t^{-\beta} L_0(t),\ t > 0,$$

$$\frac{n(1 - G(n))}{1 - h_n(0)} \to \infty\ (n \to \infty), \tag{3.1}$$

где $\alpha \in (0,1)$, $\beta > 0$, *функции* L *и* L_0 *медленно меняются на бесконечности,* $h_n(s)$ – n*-я итерация функции* $h(s)$. *Тогда при* $t \to \infty$ *конечномерные распределения случайного процесса* $\{\mu(\tau t), \tau \in (0,1]\}$ *при условии, что* $\mu(t) > 0$, *слабо сходятся к конечномерным распределениям некоторого марковского случайного процесса* $\{\eta(\tau), \tau \in (0,1]\}$.

В [28] приводится также явная формула для производящих функций предельного процесса, из которой следует, что $\eta(\tau) \xrightarrow{P} \infty$ при $\tau \to 0$. Это указывает на новый и неожиданный эффект, обнаруженный в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса.

Отметим, что предельная теорема для $\mu(t)$ в условиях теоремы 3.1 доказана В. А. Ватутиным в 1976 году [5]. Теорема 3.1 была получена лишь в 1984 году, так как для ее доказательства потребовалась разработка специального математического аппарата, основанного на многомерных тауберовых теоремах (теоремы 2.1 и 2.2). В статье [28] доказана еще одна предельная теорема.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 3.1 *и* $\nu(\tau, t)$ *при* $0 \leqslant \tau \leqslant t$ *есть число частиц в процессе, которые существуют в момент* τ *и будут существовать в момент* t. *Тогда для произвольного* $\epsilon \in (0,1]$ *при* $\gamma = (1+\alpha)^{-1}$ *и* $t \to \infty$

$$M\big\{s^{\nu(\epsilon t, t)} \mid \mu(t) > 0\big\} \to 1 - (1-s)^{\gamma}.$$

Теорема 3.2 указывает на то, что для рассматриваемого класса процессов при больших t с вероятностью, близкой к 1, все существующие в момент t

частицы имеют возраст, больший $t(1-\epsilon)$. Таким образом, процесс продолжается за счет существования частиц – "долгожителей".

Дальнейшими исследованиями в этом направлении занимались В. А. Топчий и С. М. Сагитов [22, 25]. В частности, В. А. Топчий обнаружил аналогичные эффекты в ветвящихся процессах Крампа–Мода–Ягерса, С. М. Сагитов изучала асимптотическое поведение редуцированных ветвящихся процессов.

Если отношение в (3.1) стремится не к бесконечности, а к нулю или к положительной константе, то в этих случаях справедливы другие предельные теоремы (подробную библиографию см. в обзорной статье В. А. Ватутина и А. М. Зубкова [6]).

4. Предельные теоремы для случайных А-подстановок

Зафиксируем некоторое множество $A \subseteq N$. A-подстановкой называют подстановки, длины циклов которых принадлежат множеству A. Пусть T_n – совокупность всех A-подстановок степени n, ζ_{nm} – число циклов случайной подстановки, равномерно распределенной в T_n, имеющих длину $m \in A$, ζ_n – общее число ее циклов:

$$\zeta_n = \sum_{m \in A} \zeta_{nm}.$$

Через $|X|$ в этом разделе мы будем обозначать число элементов конечного множества X. При помощи тауберовой теоремы 2.3 в статьях [32, 33, 35, 36] решаются следующие задачи:

(1) Нахождение асимптотики $|T_n|$ при $n \to \infty$;

(2) Асимптотическое поведение (в слабом смысле) ζ_n и ζ_{nm} при $n \to \infty$ и фиксированном $m \in A$.

В [32] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть* $|m : m \in A, m \leqslant n|/n \to 1$ $(n \to \infty)$. *Тогда*

(1) $|T_n| \sim n! \exp\Bigl(-\sum\limits_{m \in B(n)} 1/m\Bigr)$ $(n \to \infty)$, *где* $B(n) = \{m : m \leqslant n, m \in N \setminus A\}$.

(2) *Распределение случайной величины* $\zeta_n' = (\zeta_n - l(n))/\sqrt{\ln n}$ *слабо сходится при* $n \to \infty$ *к стандартному нормальному закону, где*

$$l(n) = \ln n - \sum_{m \in B(n)} 1/m.$$

(3) *Для каждого фиксированного* $m \in A$ *распределение случайной величины* ζ_{nm} *слабо сходится при* $n \to \infty$ *к пуассоновскому распределению с параметром* $1/m$.

Ранее Э. А. Бендером и А. И. Павловым были рассмотрены случаи конечного $B = N \setminus A$ и сходимости ряда $\sum_{m \in B} 1/m$ [3, 20]. Теорема 4.1 обобщает также известный результат В. Л. Гончарова [9].

В работе [33] доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть при $n \to \infty$*

$$|k : k \leqslant n, k \in A|/n \to \sigma > 0 \tag{4.1}$$

и для каждого $C > 1$

$$|k : k \leqslant n, k \in A, m - k \in A|/n \to \sigma^2 \tag{4.2}$$

равномерно по $m \in [n, Cn]$. Тогда справедливы следующие три утверждения:

(1) $|T_n| \sim n!\, n^{\sigma-1} L(n) e^{-\sigma\gamma}/\Gamma(\sigma)$, $n \to \infty$, *где функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности, причем $L(n) = \exp\Big(\sum\limits_{m\in A, m\leqslant n} 1/m - \sigma \ln n\Big)$, γ – постоянная Эйлера.*

(2) *Распределение случайной величины $\zeta_n' = (\zeta_n - l(n))/\sqrt{\sigma \ln n}$ слабо сходится к стандартному нормальному закону, где $l(n) = \sum\limits_{m\in A,\, m\leqslant n} 1/m$.*

(3) *Распределение случайной величины ζ_{nm} для произвольного фиксированного $m \in A$ слабо сходится при $n \to \infty$ к пуассоновскому распределению с параметром $1/m$.*

Для других классов множеств A аналогичные задачи решались в работах Ю.В. Болотникова, В.Е. Тараканова, В.Н, Сачкова, А.В. Колчина, В.Ф. Колчина, А.И. Павлова [4, 12, 13, 17–20].

Отметим, что в работе [33] впервые показано, что асимптотика $|T_n|/n!$ может отличаться от степенной функции произвольным медленно меняющимся множителем. Это обстоятельство существенно расширило класс рассматривавшихся ранее множеств A. До этого изучались только множества, у которых $|T_n|/n!$ имело чисто степенную асимптотику.

В работе [36] приводятся примеры множеств A, удовлетворяющих соотношениям (4.1) и (4.2).

Пусть заданы некоторая функция $g(t)$ при $t \geqslant 0$ и конечное объединение Δ отрезков из $[0, 1]$. Число $m \in N$ мы будем включать в множество A тогда и только тогда, когда $\{g(m)\} \in \Delta$ ($\{a\}$ есть дробная часть числа a).

Теорема 4.3. *Пусть для некоторого $\alpha > 1$ и медленно меняющейся на бесконечности функции $l(t)$*

$$g(t) = t^\alpha l(t),$$

причем для $n = 1, 2, \ldots, [\alpha] + 2$ при $t \to \infty$

$$\frac{d^n}{dt^n} l(t) = o\big(t^{-n} l(t)\big)\,. \tag{4.3}$$

Тогда выполнены соотношения (4.1) и (4.2).

Известно, что для всякой медленно меняющейся функции существует эквивалентная ей на бесконечности, обладающая свойством (4.3). Для большинства использующихся медленно меняющихся функций оно выполнено.

Отдельно разобраны случаи $\alpha \in (0,1)$ [35] и целого α [65].

В работе [38] показано, что если A – случайно и случайные величины $\eta_k = \chi\{k \in A\}$ независимы и $P\{\eta_k = 1\} = \sigma > 0$, то почти наверное выполнены соотношения (4.1) и (4.2). Таким образом, для рассматриваемого класса случайных множеств A справедлива предельная теорема, аналогичная теореме 4.2. Тем самым подтверждена гипотеза, высказанная профессором В. Ф. Колчиным в 1989 году на семинаре в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН. В [38] разобрана также ситуация, когда случайные величины η_k имеют различные распределения.

5. Некоторые предельные теоремы в схеме рекордов

Пусть заданы две последовательности независимых в совокупности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ и $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$, причем $P\{\xi_i \leqslant x\} = F(x)$, $i \in N$, $P\{\eta_i \leqslant x\} = G(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Будем предполагать, что $F(0) = 0$ и $G(x)$ – непрерывна. Положим

$$K = \{i : i \in N, \eta_i > \eta_j \, \forall j < i\} \cup \{0\}, \; S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \; n \in N, \; S_0 = 0,$$

$$N(t) = \max\{n \geqslant 0, S_n \leqslant t\}, \; M(t) = \max\{i : i \in K, i \leqslant N(t)\},$$

$$T(t) = 1 - F(t), \; V(t) = \int_0^t T(u)\, du \quad (t \geqslant 0).$$

Пусть ν_i – момент i-го скачка в случайном процессе рекордов $\{\eta_{M(t)}, t \geqslant 0\}$, $\nu_0 = 0$. В работе [30] изучается асимптотика $P\{\tau_i > t\}$ при $t \to \infty$ и фиксированных $i \in N$, где $\tau_i = \nu_i - \nu_{i-1}$. Здесь доказаны следующие три теоремы.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть для всех* $a \in (0,1)$

$$\limsup_{t \to \infty} V(at)/V(t) < 1.$$

Тогда для каждого $i \in N$ *при* $t \to \infty$

$$P\{\tau_i > t\} \overset{w}{\sim} T(t) L^i(t)/i!,$$

где $L(t)$ *– неубывающая, медленно меняющаяся на бесконечности функция, равная* $\ln(t/V(t))$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть* $M\xi_1 = m < \infty$ *и* $T(t) = o\big((t \ln t)^{-1}\big)$ *при* $t \to \infty$. *Тогда для всех* $i \in N$ *при* $t \to \infty$

$$P\{\tau_i > t\} \sim m t^{-1} \ln^{i-1}(t)/(i-1)!$$

Теорема 5.3. *Пусть для всех $a \in (0,1)$ и некоторого $i \in N$*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_0^{at} uf_i(u)\,du}{\int_0^t uf_i(u)\,du} < 1,$$

где $f_i(t) = L^i(t)(T(t) + it^{-1}V(t)/L(t)), L(t) = \ln(t/V(t))$. *Тогда*

$$P\{\tau_i > t\} \sim f_i(t)/i! \quad (t \to \infty).$$

Теорема 5.1 охватывает случаи, когда $M\xi_1 = \infty$ и когда функция $g(t) = tP\{\xi_1 > t\}$ не является медленно меняющейся на бесконечности. Теорема 5.2 справедлива при $M\xi_1 < \infty$ и $g(t) = o(1/\ln t)$, $t \to \infty$. Наиболее сложной для доказательства является теорема 5.3, в которой исследуется промежуточный случай, когда $g(t)$ медленно меняется на бесконечности.

Теоремы 5.1–5.3 обобщают соответствующие результаты из статей Д. П. Гейвера, П. Эмбрехтса, Е. Омея, М. Весткотта [44, 46, 63, 64].

В работе [37] рассматриваются так называемые k-е рекордные моменты. Для каждого $n \geqslant 0$ построим по случайным величинам $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ вариационный ряд

$$\eta_{0,n} \leqslant \eta_{1,n} \leqslant \ldots \leqslant \eta_{n,n}.$$

k-ые ($k \in N$) рекордные моменты $\{\nu^{(k)}(n), n = 0,1,2,\ldots\}$ определяются следующим образом: $\nu^{(k)}(0) = k-1$ и

$$\nu^{(k)}(n+1) = \min\bigl\{j > \nu^{(k)}(n), \eta_j > \eta_{j-k,j-1}\bigr\},\ n = 0,1,2,\ldots$$

В [37] доказана следующая теорема.

Теорема 5.4. *Для всех $k, n \in N$ при $t \to \infty$*

$$P\left\{\nu^{(k)}(n) > t\right\} \sim \frac{k^n(k-1)!}{(n-1)!} t^{-k} (\ln t)^{n-1}.$$

k-ые рекордные моменты впервые введены в работах В. Дзюбдзиела и Б. Копоциньски [42, 43]. Производящие функции для них найдены в работе В. Б. Невзорова [16]. Обзор по рекордам имеется в книге В. Б. Невзорова [15].

6. Вероятности больших уклонений для безгранично делимых случайных величин

Пусть случайная величина ξ имеет безгранично делимое распределение, то-есть, для характеристической функции ξ справедливо представление

$$Me^{it\xi} = \exp\left(i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) G(dx)\right),$$

где $G(dx)$ – ее спектральная мера Леви на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ (возможно, неограниченная в окрестности нуля), причем конечны интегралы

$$\int_{-1}^{1} x^2 G(dx), \quad \int_{-\infty}^{-1} G(dx), \quad \int_{1}^{\infty} G(dx),$$

$\sigma \geqslant 0$, γ – некоторое действительное число, переменная $t \in (-\infty,\infty)$. Через $F(x)$ обозначим функцию распределения $\xi : F(x) = P\{\xi \leqslant x\}$. Положим

$$q(t) = \int_{t}^{\infty} G(dx), t \geqslant 0.$$

В 1961 году В.М. Золотарев [10] показал, что если $\xi \geqslant 0$ и $q(t)$ правильно меняется на бесконечности, то $P\{\xi > t\} \sim q(t)$ $(t \to \infty)$. В работе [31] мы обобщаем и уточняем этот результат. Здесь, в частности, доказаны следующие две теоремы.

Теорема 6.1. *Пусть*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{q(t)}{q(2t)} < \infty. \tag{6.1}$$

Тогда $P\{\xi > t\} \overset{w}{\sim} q(t)$ *при* $t \to \infty$.

Теорема 6.2. *Пусть* $M|\xi| < \infty$, *выполнено* (6.1) *и при некотором* $a > 0$ *у функции* $q(t)$ *существует непрерывная производная* $q'(t)$, *вогнутая на множестве* $[a,\infty)$. *Тогда* $P\{\xi > t\} = q(t) - M\xi q'(t) + o(q(t)/t)$ *при* $t \to \infty$.

Теорема 6.1 пересекается с результатами М.С. Сгибнева, П. Эмбрехтса, Ч.М. Голди и Н. Веравербеке [23, 45], однако случай, когда $P\{\xi > t\} \overset{w}{\sim} q(t)$, но $P\{\xi > t\} \not\sim q(t)$ при $t \to \infty$, в этих работах не содержится. Случай, когда мера Леви безгранично делимого распределения сосредоточена на конечном множестве, рассмотрен в литературе достаточно подробно (см. ссылки в статье [1]). Наиболее общие результаты здесь получены В.М. Кругловым и С.Н. Антоновым [1].

В работах [34, 39] изучается также асимптотика плотности безгранично делимых распределений на бесконечности. Приведем два результата.

Теорема 6.3. *Пусть мера* $G(dt)$ *ограничена и обладает непрерывной на* $[0,\infty)$ *плотностью* $g(t)$, *существует* $\alpha > 0$ *такое, что функция* $b(t) = tg(t)$ *невозрастает при* $t \geqslant \alpha$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{g(t)}{g(2t)} < \infty, \tag{6.2}$$

то-есть, $g(t)$ *мажорируемо меняется на бесконечности* [41] *и для произвольного* $\lambda > 1$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{r(\lambda t)}{r(t)} < 1, \tag{6.3}$$

где $r(t) = \int_t^\infty g(y)\,dy$, $t > 0$. *Тогда при* $t \to \infty$

$$f(t) \overset{w}{\sim} g(t), \tag{6.4}$$

где $f(t) = \frac{d}{dt}F(t)$, $t > 0$.

Теорема 6.4. *Представим меру G в виде $G = G_A + G_B$, где G_A – ее абсолютно непрерывная часть, и пусть $g(t)$ – плотность меры G_A. Предположим, что для всех $n \in N$*

$$\int_1^\infty t^n G_B(dt) < \infty,$$

существуют $\epsilon > 0$ и $\alpha > \epsilon$, что $g(t) \geqslant 1/t$, $\forall t \in (0, \epsilon]$, функция $b(t) = tg(t)$ монотонна и непрерывна при $t \geqslant \alpha$, выполнены соотношения (6.2) и (6.3). Тогда справедливо соотношение (6.4).

Литература

1. С.Н. Антонов, В.М. Круглов, *Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве*, Теор. вероят. примен. 27 (1982), 625–642.
2. В.П. Белогрудь, *Об одной тауберовой теореме*, Матем. заметки **15**:2 (1974), 187–190.
3. Э.А. Бендер, *Асимптотические методы в теории перечислений*, в кн.: *Перечислительные задачи комбинаторного анализа*, Мир, Москва, 1979, 266–310.
4. Ю.В. Болотников, В.Н. Сачков, В.Е. Тараканов, *О некоторых классах случайных величин на циклах случайных подстановок*, Матем. Сб. **108**:1 (1976), 91–104.
5. В.А. Ватутин, *Дискретные предельные распределения числ частиц в критических ветвящихся процессах Беллмана–Харриса*, Теор. вероят. примен. **26**:1 (1977), 150–155.
6. В.А. Ватутин, А.М. Зубков, *Ветвящиеся процессы*, Итоги науки и техники. Серия: Теория вероятн., матем. статистика, теорет. кибернетика, ВИНИТИ **23** (1985), 3–67.
7. В.С. Владимиров, Ю.Н. Дрожжинов, Б.И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, Москва, 1986.
8. В.С. Владимиров, *Многомерное обобщение тауберовой теоремы Харди и Литтлвуда*, Изв. АН СССР сер. мат. **40** (1976), 1084–1101.
9. В.Л. Гончаров, *Из области комбинаторики*, Изв. АН СССР, сер. мат. **8** (1944), 3–48.
10. В.М. Золотарев, *Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых законов распределения*, Теор. вероят. примен. **6**:3 (1961), 330–334.
11. М.В. Келдыш, *Об одной тауберовой теореме*, Труды МИАН СССР **38** (1951), 77–86.
12. А.В. Колчин, *Суммы независимых случайных величин и некоторые комбинаторные задачи*, Кандидатская диссертация, МГУ, 1994.
13. В.Ф. Колчин, *О числе циклов подстановок с ограничениями на длины циклов*, Дискрет. мат. **3**:2 (1991), 97–109.
14. В.И. Мацаев, Ю.А. Палант, *О распределении спектра полиномиального операторного пучка*, ДАН Арм. ССР, **42**:5 (1966), 836–845.
15. В.Б. Невзоров, *Рекорды. Математическая теория*, Фазис, Москва, 2000.
16. В.Б. Невзоров, *Производящие функции для к–х рекордных моментов – мартингальный подход*, Записки научных семинаров ЛОМИ, **184** (1990), 208–214.
17. А.И. Павлов, *О числе циклов и цикловой структуре подстановок некоторых классов*, Матем. сб. **124**:4 (1984), 536–556.
18. А.И. Павлов *О некоторых классах подстановок с теоретико–числовыми ограничениями на длины циклов*, Матем. сб. **129**:2 (1986), 252–263.
19. А.И. Павлов, *О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества*, Дискрет. Мат. **3**:3 (1991), 109–123.
20. А.И. Павлов, *О подстановках с длинами циклов из заданного множества*, Теор. вероят. примен. **31**:3 (1986), 618–619.
21. А.Г. Постников, *Тауберова теория и ее применения*, Наука, Москва, 1979.
22. С.М. Сагитов, *Три предельные теоремы для редуцированных критических ветвящихся процессов*, Успехи Мат. Наук **5** (1955), 183–202.

23. М.С. Сгибнев, *Асимптотика безгранично делимых распределений в R*, Сибир. мат. ж. **31**:1 (1990), 135–140.
24. Я.Т. Султанаев, *О спектре неполуограниченных обыкновенных дифференциальных операторов*, Кандидатская диссертация, МГУ, 1974.
25. В.А. Топчий, *Предельные теоремы для критических общих ветвящихся процессов с долгоживущими частицами*, Стохастические и детерминированные модели сложных систем, Новосибирск, (1988), 114–154.
26. А.Л. Якымив, *Многомерные тауберовы теоремы и их применение к ветвящимся процессам Беллмана–Харриса*, Матем. сб. **115**:3 (1981), 463–477.
27. А.Л. Якымив, *Многомерные тауберовы теоремы типа Карамата, Келдыша и Литтлвуда*, ДАН СССР **270**:3 (1983), 558–561.
28. А.Л. Якымив, *Две предельные теоремы для критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса*, Мат. заметки **36**:1 (1984), 109–116.
29. А.Л. Якымив, *Асимптотика вероятности продолжения критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса*, Труды МИАН СССР **177** (1986), 177–205.
30. А.Л. Якымив, *Асимптотические свойства моментов изменения состояний в случайном процессе рекордов*, Теор. вероят. примен. **31**:3 (1986), 577–581.
31. А.Л. Якымив, *Асимптотическое поведение одного класс безгранично делимых распределений*, Теор. вероят. примен. **32**:4 (1987), 691–702.
32. А.Л. Якымив, *О числе А–подстановок*, Мат. сб. **180**:2 (1989), 294–303.
33. А.Л. Якымив, *О подстановках с длинами циклов из заданного множества*, Дискрет. мат. **1**:1 (1989), 125–134.
34. А.Л. Якымив, *Асимптотика плотности безгранично делимого распределения на бесконечности*, Проблемы устойчивости стохастических моделей, Труды семинара, ВНИИСИ, Москва, (1990), 123–131.
35. А.Л. Якымив, *О случайных подстановках с длинами циклов из заданного множества*, Вероят. процессы прилож.: Межвуз. сб., МИЕЕМ, Москва, (1991), 24–27.
36. А.Л. Якымив, *О некоторых классах подстановок с длинами циклов из заданного множества*, Дискрет. мат. **4**:3 (1992), 128–134.
37. А.Л. Якымив, *Асимптотика к-х рекордных моментов*, Теор. вероят. примен. **40**:4 (1995), 925–928.
38. А.Л. Якымив, *О числе подстановок с длинами циклов из случайного множества*, Дискрет. мат. **12**:4 2000, 53–62.
39. А.Л. Якымив, *Об асимтотике плотности безгранично делимых распределений на бесконечности*, Теор. вероят. примен. (в печати).
40. N.H. Bingham, *Tauberian theorems in probability theory*, Lect. Notes in Math. 1379, (1989), 6–20.
41. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular variation*, Cambridge University Press, 1987.
42. W. Dziubdziela, *Rozklady graniczne ekstremalnych statistyk pozycyjnuch*, Roczniki Polsk. Tow. Mat. ser. **9** (1977), 45–71.
43. W. Dziubdziela, B. Kopocinsky, *Limiting properties of the k-th record values*, Zastosow. Mat. **15**:2 (1976), 187–190.
44. P. Embrechts, E. Omey, *On subordinated distribution and random record processes*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **93** (1983), 339–353.
45. P. Embrechts, Ch.M. Goldie, N. Veraverbeke, *Subexponentiality and infinite divisibility*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **49** (1979), 335–347.
46. D.P. Gaver, *Random record models*, J. Appl. Prob. **13** (1976), 538–547.
47. R. Grübel, *Über unbergenzt teilbare Verteilungen*, Arch. Math. **41** (1983), 80–88.
48. L. de Haan, *On regular variation and its applications to the weak convergence of sample extrems*, Mathematical Centre Tracts 32, Amsterdam, 1970.
49. L. de Haan, *On functions derived from regularly varying functions*, J. Austral. Math. Soc. A **23** (1977), 431–438.
50. J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj) **4** (1930), 38–53.
51. J. Karamata, *Über die Hardy–Littlewoodsche Umkehrungen des Abelschen Steitigkeitssatzes*, Math. Z. **32** (1930), 319–320.
52. J. Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze*, Math. Z. **33**:2 (1931), 294–299.

53. J.E. Littlewood, *The converse of Abel's theorems for power series*, Proc. London Math. Soc. **9** (1910), 434–448.
54. E. Omey, *Multivariate regular variation and application in probability theory*, Brussel, 1989.
55. T. Ostrogorski, *Abelian type theorems for some integral transforms in R^n*, Publ. Inst. Math. **35(49)** (1984), 93–103.
56. T. Ostrogorski, *Asymptotic behaviour of Fourier transforms in R^n*, Publ. Inst. Math. **35(49)** (1984), 103–117.
57. S. Pilipović, B. Stanković, A. Takači, *Asymptotic behaviour and Stieltjes transformation of distributions*, Teubner Texte für Mathematik 116, 1990
58. T. Selander, *Bilateral Tauberian theorems of Keldysh type*, Ark. Mat. **5**:6 (1963), 85–96.
59. U. Stadtmüller, R. Trautner, *Tauberian theorems for Laplace transforms*, J. Reine Angew. Math. **311/312** (1979), 283–290.
60. U. Stadtmüller, R. Trautner, *Tauberian theorems for Laplace transform in dimension $d > 1$*, J. Reine Angew. Math. **323** (1981), 127–138.
61. U. Stadtmüller, *A refined Tauberian theorem for Laplace transform in dimension $d > 1$*, J. Reine Angew. Math. **328** (1983), 72–83.
62. A. J. Stam, *Regular variation in R^d_+ and Abel–Tauber theorem*, Report T.W., 189, Groningen, Math. Inst. Rijkuniversiteit, 1977.
63. M. Westcott, *The random record model*, Proc. Roy. Soc. London A **356**:1687 (1977), 529–547.
64. M. Westcott, *On the tail behaviour of record-time distributions in a random record process*, Ann. Prob. **7**:5 (1979), 868–873.
65. A.L. Yakymiv, *Limit theorems for random A-permutations*, Proc. 3-rd Petrozavodsk Conf. on Probab. Methods in Discr. Math., 1993, p. 459–469.

Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН
Москва, Россия