

UNE SOLUTION DU PROBLÈME À DEUX DIMENSIONS DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Par

D. RADENKOVIĆ

I

Nous allons montrer ici une solution exacte du problème à deux dimensions de la Théorie de l'élasticité pour une plaque rectangulaire. La méthode de solution est basée sur la fonction de tension que nous construisons à la manière proposée par *A. E. H. Love*¹⁾ comme une solution générale du problème biharmonique pour une région simplement connexe.

Désignons la fonction cherchée par χ ; les tensions sont alors en raison directe aux dérivées secondes de χ et le problème consiste à déterminer χ satisfaisant l'équation différentielle

$$\Delta\Delta\chi = 0 \quad (1)$$

et les conditions aux limites que l'on peut toujours réduire à la forme

$$\chi = 0; \quad \frac{\partial\chi}{\partial\nu} = \frac{\partial V}{\partial\nu} \quad (2a, 2b)$$

où V est une fonction harmonique. On peut toujours représenter χ par une série:

$$\chi = A_0\chi_0 + \sum_1^{\infty} (A_n\chi_n + A_n'\chi_n'). \quad (3)$$

¹⁾ *A. E. H. Love* - Biharmonical Analysis. - (The Journal of The London Mathematical Society, Vol. 3, Part. 2, № 10, 1928).

Les fonctions χ_0 , χ_n et χ_n' sont construites selon le fait connu que l'expression $xv - yu$ satisfait l'équation biharmonique pour une fonction arbitraire analytique $u + iv$ de $z (\equiv x + iy)$ où x, y sont les coordonnées des points dans la région donnée. Ainsi que nous pouvons écrire par exemple

$$\chi_n = \operatorname{Re}(-iz^* \zeta^{n+1}) - \Phi\{\operatorname{Re}(-iz^* \zeta^{n+1})\}, \quad (4)$$

où nous désignons par $\Phi\{ \}$ une fonction harmonique dans la région qui à son contour a la même valeur que l'expression entre parenthèses; par z^* la valeur conjuguée de la variable z et par ζ la variable dans un plan auxiliaire. Ce plan est choisi de telle façon que la région donnée y est représentée conformément à l'intérieur du cercle $|\zeta| < 1$, ce qui s'obtient par la transformation de la forme

$$z = -i \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s+1} \zeta^{2s+1} \quad (5)$$

où les coefficients a_{2s+1} sont des nombres réels.

Les fonctions auxiliaires χ_n etc. exprimées en coordonnées polaires (ρ, φ) du plan ζ ont la forme des polynômes trigonométriques. Or, puisque l'équation différentielle (1) et la première des conditions aux limites (2a) sont déjà satisfaites par (4), pour résoudre le problème on n'a qu'à représenter $(\partial V / \partial \nu)_{\rho=1}$ dans (2b) par une série de Fourier et à déterminer les A dans (3) par la comparaison des coefficients en formant $(\partial \chi / \partial \nu)_{\rho=1}$.

En déterminant les coefficients A par ce procédé, nous sommes amenés aux systèmes infinis des équations linéaires dont chacune contient un nombre infini des coefficients inconnus A . Pour simplifier ces systèmes on introduit, par exemple, au lieu des χ_n de nouvelles fonctions $\chi_n^{(n)}$ que l'on obtient en posant dans (4) à la place de $\operatorname{Re}(-iz^* \zeta^{n+1})$ les expressions:

$$\operatorname{Re}[iz^*(\zeta^{n+1} + r_{n,n-1} \zeta^{n-1} + r_{n,n-3} \zeta^{n-3} \dots)] \quad (6)$$

où l'on détermine les $r_{n,n-m}$ de telle façon que dans la dérivée $(\partial \chi_n^{(n)} / \partial \rho)_{\rho=1}$ tous les coefficients des $\cos s\varphi$ s'annulent pour $s < n$ („promotion du rang“). Le système des équations défini-

nissant les A_n paires devient alors:

$$A_0 = 0,$$

$$A_2 \beta_{22} = 2 C_2,$$

$$A_2 \beta_{24} + A_4 \beta_{44} = 4 C_4, \quad (7)$$

où les β_{mn} et les C_n sont les coefficients des séries trigonométriques représentant $(\partial\chi/\partial\nu)_{\rho=1}$ et $(\partial V/\partial\nu)_{\rho=1}$ respectivement.

La réduction des conditions aux limites à la forme (2) n'est qu'un problème de l'analyse harmonique à l'intérieur du cercle $|\rho| < 1$.

II

Cette solution générale du problème biharmonique pour une région simplement connexe est applicable aux problèmes à deux dimensions de la Théorie de l'élasticité et nous l'employons ici pour résoudre un problème technique.

Considérons le cas d'une plaque rectangulaire soumise aux charges comme le montre la figure 1.²⁾ Afin de trouver la distribution des tensions dans la plaque, nous allons déterminer la fonction de tension pour ce cas, c'est à dire une fonction biharmonique satisfaisant les conditions aux limites montrées sur les figures 2a et 2b.

Pour simplifier la solution des problèmes harmoniques nous adoptons la fonction χ_1 , définie par les conditions aux limites ci-dessus, sous la forme

$$\chi_1 = \chi - \frac{Px^2}{4a} + \Phi(\theta), \quad (8)$$

où $\Phi(\theta)$ est une fonction harmonique dans la région donnée ayant sur son contour telle valeur que χ s'y annule partout.

²⁾ Au point de vue technique nous avons ici le problème de la distribution des tensions dans les fondations ou bien dans les articulations formées en pierre de taille, qui est déjà traité dans la littérature. Ainsi dans le „Beton und Eisen“ (N° 4, 1935) H. Bay et R. Bortsch ont donné deux solutions indépendantes du même problème.

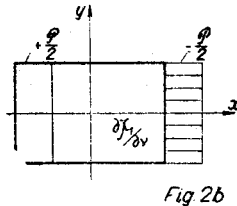
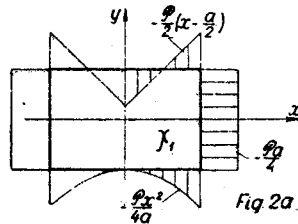
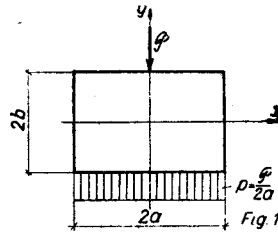
Notre problème revient alors à :

Trouver une fonction biharmonique χ avec les conditions aux limites du rectangle :

$$\chi = 0; \quad \frac{\partial \chi}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\theta) \quad (9)$$

où $\Phi(\theta)$ est une fonction harmonique avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \theta &= +\frac{P}{2} \left(\frac{x^2}{2a} - x + \frac{a}{2} \right) && \text{pour } y = +b \quad 0 < x < a, \\ \theta &= +\frac{P}{2} \left(\frac{x^2}{2a} + x + \frac{a}{2} \right) && \text{'' '' } -a < x < 0, \\ \theta &= 0 && \text{sur le reste du contour.} \end{aligned} \right\} (10)$$



Les conditions aux limites (9) correspondent à (3a, 3b) et pour les obtenir dans cette forme nous n'avons à résoudre qu'un problème harmonique.

Solution du problème harmonique. — En cas d'une plaque rectangulaire la transformation (5) est donnée par :

$$z = -i \frac{2a}{K} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-1} P_n(\cos 2\alpha) \zeta^{2n+1}, \quad (11)$$

où P_n sont les coefficients de Legendre, et α un angle aigu, réel, tel que $\sin \alpha (\equiv k)$ est le module de la fonction elliptique de Jacobi $\operatorname{sn} u$, dont les périodes $4K$ et $2iK'$ sont en rapport $K'/K = b/a$.

Nous nous bornerons dans ce qui suit au cas d'une plaque carrée.

Alors $a = b$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\cos 2\alpha = 0$; $k = \sin \alpha = 0,707$; $K = 1,8541$

et la transformation prend la forme:

$$z = -i \frac{2a}{K} \left(\zeta - \frac{1}{10} \zeta^5 + \frac{1}{24} \zeta^9 - \frac{5}{208} \zeta^{13} + \frac{35}{2176} \zeta^{17} - \frac{3}{256} \zeta^{21} + \dots \right). \quad (12)$$

Il ne faut pas perdre de vue qu'ici l'axe $\varphi = 0$ correspond au sens négatif de l'axe des y ; le sens positif du circuit est de gauche à droite.

Pour transformer les conditions aux limites (10) nous avons:

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{Re}(z), \\ x^2 &= \frac{1}{2} [\operatorname{Re}(z^2) + zz^*] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ou bien sur le contour ($\rho = 1$):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2a}{K} (\sin \varphi - 0,100 \sin 5\varphi + 0,042 \sin 9\varphi - \\ &\quad - 0,024 \sin 13\varphi \dots) \\ x^2 &= \left(\frac{2a}{K} \right)^2 (0,506 - 0,500 \cos 2\varphi - 0,105 \cos 4\varphi + \\ &\quad + 0,100 \cos 6\varphi + 0,045 \cos 8\varphi - 0,052 \cos 10\varphi - \\ &\quad - 0,026 \cos 12\varphi + 0,028 \cos 14\varphi \dots) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Le problème harmonique devient alors:

Trouver une fonction harmonique $\Phi(\theta)$, paire en φ , dont les valeurs sur la circonférence du cercle $\rho = 1$ sont:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= Pa \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{K} (\sin \varphi - 0,100 \sin 5 \varphi + 0,042 \sin 9 \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 0,024 \sin 13 \varphi \dots) + \frac{1}{K^2} (0,506 - 0,500 \cos 2 \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 0,105 \cos 4 \varphi + 0,100 \cos 6 \varphi \dots) \right\} \\ &\quad \text{pour } 3 \frac{\pi}{4} < \varphi < \pi \\ \theta &= 0 \quad \quad \quad \text{,,} \quad 0 < \varphi < 3 \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

et symétriquement sur le reste du contour.

Posant pour $\Phi(\theta)$:

$$\Phi(\theta) = \sum_t C_t \rho^t \cos t \varphi \quad (16)$$

et développant les conditions (15) en une série de Fourier nous obtenons au moyen de la comparaison des coefficients:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\theta) &= Pa (0,030 - 0,057 \rho \cos \varphi + 0,049 \rho^2 \cos 2 \varphi - \\ &\quad - 0,031 \rho^3 \cos 3 \varphi + 0,025 \rho^4 \cos 4 \varphi - 0,015 \rho^5 \cos 5 \varphi + \\ &\quad + 0,007 \rho^6 \cos 6 \varphi - 0,003 \rho^7 \cos 7 \varphi + 0,001 \rho^8 \cos 8 \varphi \dots). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Fonctions auxiliaires $\chi_n^{(n)}$. — En raison de symétrie des charges par rapport à l'axe des y , la fonction biharmonique cherchée prend la forme

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \chi_n^{(n)} \quad (18)$$

où les fonctions auxiliaires $\chi_n^{(n)}$ ne dépendent que de la forme du contour. Nous donnons ici les expressions pour ces fonctions jusqu'à $\chi_6^{(6)}$ en cas de la plaque carrée:

$$\chi_1^{(1)} = \frac{2a}{K} [(\rho^3 - \rho) \cos \varphi - 0,1 (\rho^7 - \rho^3) \cos 3 \varphi + \\ + 0,042 (\rho^{11} - \rho^7) \cos 7 \varphi - 0,024 (\rho^{15} - \rho^{11}) \cos 11 \varphi \dots];$$

$$\beta_{11} = 2,000 \frac{2a}{K}; \quad \beta_{13} = 0,400 \frac{2a}{K}; \quad \beta_{15} = 0,000.$$

$$\chi_2^{(2)} = \frac{2a}{K} [(\rho^4 - 0,1 \rho^8 - 0,9 \rho^2) \cos 2 \varphi + \\ + 0,042 (\rho^{12} - \rho^6) \cos 6 \varphi - 0,024 (\rho^{16} - \rho^{10}) \cos 10 \varphi \dots];$$

$$\beta_{22} = 1,400 \frac{2a}{K}; \quad \beta_{24} = 0,000; \quad \beta_{26} = 0,250 \frac{2a}{K}.$$

$$\chi_4^{(4)} = \frac{2a}{K} [(-0,1 \rho^{10} - 0,5 \rho^2 - 0,4) + \\ + (0,950 \rho^6 + 0,042 \rho^{14} - 0,992 \rho^4) \cos 4 \varphi - \\ - (0,024 \rho^{18} - 0,021 \rho^{10} - 0,003 \rho^8) \cos 8 \varphi + \\ + 0,012 (\rho^{14} - \rho^{12}) \cos 12 \varphi \dots];$$

$$\beta_{44} = 2,316 \frac{2a}{K}; \quad \beta_{46} = 0,000.$$

$$\chi_5^{(5)} = \frac{2a}{K} [(-0,100 \rho^{11} + 0,016 \rho^9 + 0,435 \rho^3 - 0,351 \rho) \cos \varphi + \\ + (0,042 \rho^{15} - 0,163 \rho^5 - 0,043 \rho^7 + 0,165 \rho^3) \cos 3 \varphi + \\ + (\rho^7 - 0,007 \rho^{13} - 0,993 \rho^5) \cos 5 \varphi + \\ + (-0,024 \rho^{19} + 0,018 \rho^{11} + 0,006 \rho^7) \cos 7 \varphi \dots];$$

$$\beta_{55} = 1,924 \frac{2a}{K}.$$

$$\chi_6^{(6)} = \frac{2a}{K} [(-0,100 \rho^{12} + 0,042 \rho^{16} + 0,297 \rho^4 - 0,030 \rho^8 - \\ - 0,210 \rho^2) \cos 2 \varphi + (\rho^8 - 0,024 \rho^{20} + 0,012 \rho^{12} - \\ - 0,988 \rho^6) \cos 6 \varphi - 0,007 (\rho^{16} - \rho^{10}) \cos 10 \varphi \dots];$$

$$\beta_{66} = 1,676 \frac{2a}{K}.$$

Comme exemple nous allons montrer ici comment on obtient $\chi_4^{(4)}$:

$$\chi_4^{(4)} = \operatorname{Re}[-iz^*(\zeta^5 - r_{4,0}\zeta)] - \Phi\{\operatorname{Re}[-iz^*(\zeta^5 - r_{4,0}\zeta)]\}.$$

$$\operatorname{Re}[-iz^*(\zeta^5 - r_{4,0}\zeta)] = \frac{2a}{K} \left[(\rho^6 \cos 4\varphi - \frac{1}{10}\rho^{10} + \frac{1}{24}\rho^{14} \cos 4\varphi - \frac{5}{208}\rho^{18} \cos 8\varphi \dots) - r_{4,0}(\rho^2 - \frac{1}{10}\rho^6 \cos 4\varphi + \frac{1}{24}\rho^{10} \cos 8\varphi \dots) \right].$$

$$\Phi\{\operatorname{Re}[-iz^*(\zeta^5 - r_{4,0}\zeta)]\} = B_1 + B_2\rho^4 \cos 4\varphi + B_3\rho^8 \cos 8\varphi + \dots$$

$$B_1 = \frac{2a}{K}(-\frac{1}{10} - r_{4,0}); \quad B_2 = \frac{2a}{K}(1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{10}r_{4,0}); \quad \text{etc.}$$

$$\chi_4^{(4)} = \frac{2a}{K} \left[(-\frac{1}{10}\rho^{10} - r_{4,0}\rho^2 + \frac{1}{10} + r_{4,0}) + \dots \right].$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{1}{10}\rho^{10} - r_{4,0}\rho^2 + \frac{1}{10} + r_{4,0} \right)_{\rho=1} = 0.$$

$$r_{4,0} = \frac{1}{2}.$$

$$\chi_4^{(4)} = \frac{2a}{K} \left[\left(-\frac{1}{10}\rho^{10} + \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{19}{20}\rho^6 + \frac{1}{24}\rho^{14} - \frac{119}{120}\rho^4 \right) \cos 4\varphi \dots \right].$$

Le calcul des coefficients, A_n . — Lorsque le problème harmonique est résolu et que les fonctions auxiliaires sont connues, il est facile de déterminer les A_n dans (18) au moyen de la seconde condition (9). Deux systèmes d'équations analogues à (7) donnent:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 0,0285 \\ A_2 = -0,0700 \\ A_3 = 0,0565 \\ A_4 = -0,0432 \\ A_5 = 0,0291 \\ A_6 = -0,0146 \times \frac{Pk}{2} \end{array} \right\} \quad (19)$$

En introduisant $\chi = \sum A_n \chi_n^{(n)}$ avec les A_n déterminés ci-dessus et $\Phi(\theta)$ exprimé par (17) dans (8) nous obtenons la fonction de tension cherchée et par là notre problème est résolu.

Le calcul des tensions. — Nous allons calculer ici encore les tensions $\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$ le long de l'axe des y qui sont les plus intéressantes pour les applications. La fonction de tension étant donnée en termes de ρ, φ nous devons d'abord donner les expressions pour la transformation des dérivées. On a :

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{1}{D^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} - \left(x_{\rho\rho} \frac{\partial \chi}{\partial x} + y_{\rho\rho} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) & 2x_\rho y_\rho x_\rho & x_\rho x_\rho \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} - \left(x_{\rho\varphi} \frac{\partial \chi}{\partial x} + y_{\rho\varphi} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) & 2x_\rho y_\rho y_\varphi & x_\varphi x_\rho \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho \partial \varphi} - \left(x_{\rho\varphi} \frac{\partial \chi}{\partial x} + y_{\rho\varphi} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) & (x_\rho y_\varphi + x_\varphi y_\rho) & x_\varphi x_\rho \end{vmatrix} \quad (20)$$

où
$$D = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} \quad (21)$$

et
$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \rho} y_\varphi - \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} y_\rho}{D}; \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \rho} x_\rho - \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} x_\varphi}{D} \quad (22)$$

ce qui, en raison de symétrie par rapport à l'axe des y , devient :

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{1}{y_\rho^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} - \frac{y_{\rho\rho}}{y_\rho^3} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \quad (23)$$

Bien entendu les dérivées de la fonction $\Phi(\theta)$ sont données par les expressions de la même forme.

Par un calcul simple mais assez long nous obtenons la distribution des tensions normales en direction des x le long de l'axe des y montrée sur la figure 3. Les données numériques sont en très bon accord avec les valeurs calculées précédemment par Bay et par Bortsch.

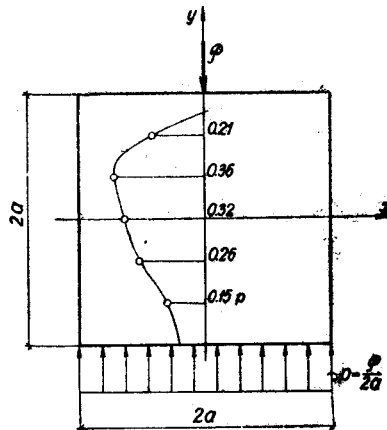


Fig. 3

Nous ajoutons ici encore un tableau des valeurs des deux premières dérivées des fonctions $\chi_n^{(n)}$ et $y(\rho, \varphi)$ par rapport à ρ , le long de l'axe des y . Puisque les fonctions $\chi_n^{(n)}$ sont indépendantes des charges, on peut utiliser ce tableau pour le calcul des tensions en différents cas des charges.

T A B L E A U
des valeurs des dérivées des $\chi_n^{(n)}$ et $y(\rho, \varphi)$

$\frac{y}{a}$	ρ	φ	y_ρ	$y_{\rho\rho}$	$\frac{\partial \chi_1^{(1)}}{\partial \rho}$	$\frac{\partial^2 \chi_1^{(1)}}{\partial \rho^2}$	$\frac{\partial \chi_2^{(2)}}{\partial \rho}$	$\frac{\partial^2 \chi_2^{(2)}}{\partial \rho^2}$
$\frac{2}{3}$	0,63	π	0,929	-0,402	-0,254	-3,669	-0,184	+2,512
$\frac{1}{3}$	0,31	π	0,995	-0,060	+0,684	-2,029	-0,440	-0,665
0	0	0	-1,000	0	-1,000	0	0	-1,800
$-\frac{1}{3}$	0,31	0	-0,995	+0,060	-0,684	+2,029	-0,440	-0,665
$-\frac{2}{3}$	0,63	0	-0,929	+0,402	+0,254	+3,669	-0,184	+2,512
$\frac{y}{a}$	$\frac{\partial \chi_3^{(3)}}{\partial \rho}$	$\frac{\partial^2 \chi_3^{(3)}}{\partial \rho^2}$	$\frac{\partial \chi_4^{(4)}}{\partial \rho}$	$\frac{\partial^2 \chi_4^{(4)}}{\partial \rho^2}$	$\frac{\partial \chi_5^{(5)}}{\partial \rho}$	$\frac{\partial^2 \chi_5^{(5)}}{\partial \rho^2}$	$\frac{\partial \chi_6^{(6)}}{\partial \rho}$	$\frac{\partial^2 \chi_6^{(6)}}{\partial \rho^2}$
$\frac{2}{3}$	+0,244	-2,218	+0,191	+0,631	+0,133	-0,412	-0,320	-0,380
$\frac{1}{3}$	+0,418	+0,474	+0,208	+0,120	+0,226	-0,544	-0,110	-0,302
0	-0,300	0	0	+1,000	-0,351	0	0	-0,420
$-\frac{1}{3}$	-0,418	-0,474	+0,208	+0,120	-0,226	+0,544	-0,110	-0,302
$-\frac{2}{3}$	-0,244	+2,218	+0,191	+0,631	-0,133	+0,412	-0,320	-0,380