ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS ET ENSEMBLES PARTIELLEMENT BIEN ORDONNÉS

Par

GEORGES KUREPA

A plusieurs reprises (v. [2], [3], [4], [5]) j'avais affaire à une classe d'ensembles partiellement ordonnés, à savoir ceux vérifiant la condition suivante:

Tout sous-ensemble ordonné de l'ensemble est bien ordonné.

Un pareil ensemble sera dit *partiellement bien ordonné* ou *ensemble rangé.*

1. Notation. Pour un élément a et un sous-ensemble F d'un ensemble partiellement ordonné

$$(E;\leqslant) \tag{1}$$

nous désignerons par

$$(-\infty, a]_F,\ (-\infty, a)_F,\ (a, \infty)_F \quad \text{et} \quad [a, \infty)_F \tag{2}$$

respectivement

l'ensemble de tous les $x \varepsilon F$ vérifiant

$$x \leqslant a,\ x < a,\ a < x \quad \text{et} \quad a \leqslant x \tag{3}$$

respectivement.

Il va sans dire que $\leqslant$ désigne la relation binaire, par rapport à laquelle l'ensemble E est partiellement ordonné.

Nous désignerons par

$$(-\infty, a, \infty)_F \tag{4}$$

l'ensemble de tous les points de F dont chacun est comparable à a; par conséquent,

$$(-\infty, a, \infty)_F = (-\infty, a)_F \cup [a, \infty)_F = (-\infty, a]_F \cup (a, \infty)_F. \tag{5}$$

2. L'énoncé du théorème. Le but de la Note sera d'établir le théorème suivant:

Tout ensemble partiellement ordonné $(E;\leqslant)$ *contient un sous-ensemble partiellement bien ordonné* W *tel que*

$$E=\bigcup_x(-\infty,x]_E,\quad (x\in W);\tag{6}$$

par conséquent quel que soit le point $a\in E$, *il existe au moins un point* $x\in W$ *tel que* $a\leqslant x$.

Dans le cas où l'ensemble E est ordonné, le théorème est presque évident (v. Hausdorff, [1] p. 86); en se servant d'une terminologie de F. Hausdorff (remontant peut-être à Du Bois Reymond), le théorème pourrait s'énoncer de la façon suivante:

Tout ensemble partiellement ordonné est confinal[1]*) à un de ses sous-ensembles partiellement bien ordonnés.*

Remarque. Tout ensemble partiellement ordonné est coïnitial avec l'un de ses sous-ensembles.

En effet, en considérant un sous-ensemble X de $(E;\leqslant)$ avec lequel l'ensemble $(E;\geqslant)$ est confinal, l'ensemble primitif $(E;\leqslant)$ est coïnitial avec X.

3. Opérateur $\mathring{R}$. Lemme. Tout ensemble partiellement ordonné contient un sous-ensemble anti-ordonné[2]) — nous en désignerons l'un quelconque par

$$\mathring{R}X\tag{7}$$

tel que tout point de X soit comparable à un point de $\mathring{R}X$ et dès lors:

$$X=\bigcup_x(-\infty,x,\infty)_X,\quad (x\in\mathring{R}X).\tag{8}$$

---

[1]) G, H étant deux sous-ensembles d'un ensemble partiellement ordonné, nous dirons que G et H sont *confinaux*, si on a le système suivant:

$$G=\bigcup_h(-\infty,h]_G,\ (h\in H),$$
$$H=\bigcup_g(-\infty,g]_H,\ (g\in G).$$

Dans les mêmes hypothèses G et H sont *coïnitiaux* si:

$$G=\bigcup_h[h,\infty)_G,\ (h\in H),$$
$$H=\bigcup_g[g,\infty)_H,\ (g\in G).$$

[2]) C'est-à-dire sans points distincts comparables.

En effet,

$$x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots, \quad (\xi < \delta) \tag{9}$$

étant une bonne ordination quelconque de X (par conséquent, nous admettons la possibilité d'une bonne ordination de X), déterminons par récurrence l'ensemble

$$a_0, a_1, \ldots, a_\eta, \ldots, \quad (\eta < \mu) \tag{10}$$

de la façon suivante:

Pour commencer, nous poserons $a_0 = x_0$; soit β un ordinal quelconque et supposons que les points a_ξ, $(\xi < \beta)$ soient extraits de (9) et qu'ils soient deux à deux *incomparables*. Alors, en considérant l'ensemble

$$X \setminus \bigcup_\xi (-\infty, a_\xi, \infty), \quad (\xi < \beta), \tag{11}$$

celui-ci est ou bien vide ou bien non vide. Dans le premier cas la construction est terminée et l'on désignera par $\mathring{R}X$ l'ensemble des a_ξ, $(\xi < \beta)$. Dans le cas où l'ensemble (11) n'est pas vide, le procès ne sera par terminé et nous désignerons par a_β le premier point de la suite (9) ne faisant pas partie de (11).

Or, il est manifeste que le procédé prendra fin au plus tard pour le nombre $\beta = \delta$ et que l'ensemble (10) sera déterminé.

4. Ensembles E_α et le nombre γ. Ceci étant, définissons le nombre γ et les sous-ensembles

$$E_0, E_1, \ldots, E_\alpha, \ldots \ldots \quad (\alpha < \gamma) \tag{12}$$

de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
&E_0 = \mathring{R}E;\\
&E_1 = \mathring{R}(E \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_E), \quad (x \in E_0); \qquad (13)\\
&- - - - - - - - - - - - - -\\
&E_\alpha = \mathring{R}(E \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_E), \quad (x \in \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi).\\
&- - - - - - - - - - - - - -
\end{aligned}$$

L'ordinal γ sera le premier nombre ν tel que l'ensemble E_ν soit vide, donc

$$\left.\begin{aligned}
&E_\xi \supset v, \quad (\xi < \gamma),\\
&E_\nu = v, \quad (\nu \geqslant \gamma).
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

5. L'ensemble W. Posons

$$W = \bigcup_{\alpha} E_\alpha, \quad (\alpha < \gamma). \tag{15}$$

Nous prouverons que l'ensemble W ainsi construit est partiellement bien ordonné et confinal à E.

Tout d'abord, d'après la définition du nombre γ, on a

$$E \setminus \bigcup_{x} (-\infty, x]_E = \text{vide}, \quad (x \in \bigcup_{\alpha < \gamma} E_\alpha),$$

ce qui, vu la relation

$$E \supseteq (-\infty, x]_E,$$

veut dire que

$$E = \bigcup_{x} (-\infty, x]_E, \quad (x \in W). \tag{16}$$

Donc W est confinal à E.

6. Le rang γW **et les rangées** $R_\alpha W$ **de** W. Il s'agit de prouver que W est partiellement bien ordonné. Nous prouverons même que[1])

$$R_\alpha W = E_\alpha, \quad (\alpha < \gamma), \tag{17}$$

$$\gamma W = \gamma. \tag{18}$$

Pour abréger, posons

$$S_\alpha = E \setminus \bigcup_{x} (-\infty, x]_E, \quad (x \in \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi) \tag{19}$$

[1]) Pour un ensemble partiellement bien ordonné W, la *rangée initiale* $R_0 W$ *de* W c'est l'ensemble de tous les points initiaux de W; d'une façon générale l'on pose

$$R_\alpha W \supseteq R_0 W (\setminus \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi W)$$

et l'on désigne par γW le premier ordinal γ tel que $R_\gamma W$ soit vide; on a ainsi le rang γW de W et la suite

$$R_\xi W, \quad (\xi < \gamma W)$$

des *rangées* de W.

donc

$$E = \bigcup_x (-\infty, \ x]_E \cup S_\alpha, \qquad (x \varepsilon \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi). \tag{20}$$

La décomposition (20) est une coupure de l'ensemble E.[1]) Tout d'abord, les deux ensembles: S_α et son complément

$$\bigcup_x (-\infty, \ x]_E, \qquad (x \varepsilon \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi) \tag{21}$$

sont sans point commun. D'autre part, il est bien évident que l'ensemble (21) est une portion initiale de E sans être identique à E, ce qui veut dire que, pour tout $\alpha < \gamma W$, l'ensemble S_α est une portion finale non vide de E. Par conséquent, S_α étant une portion finale de E, on a:

$$[x, \infty)_{S_\alpha} = [x, \infty)_E, \quad (x \varepsilon S_\alpha) \tag{22}$$

pour tout $\alpha < \gamma W$.

Prouvons que, pour tout $\alpha < \gamma$:

$$E_\alpha = R_0 (\bigcup_x [x, \infty)_E), \quad (x \varepsilon S_\alpha). \tag{23}$$

Vu les relations (22), la relation (23) est équivalente à

$$E_\alpha = R_0 (\bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha}), \quad (x \varepsilon S_\alpha). \tag{24}$$

Or, d'après (13) et (19), l'ensemble E_α est un sous-ensemble anti-ordonné de S_α vérifiant l'égalité

$$S_\alpha = \bigcup_x (-\infty, \ x)_{S_\alpha} \ \cup \ \bigcup [x, \infty)_{S_\alpha}, \ (x \varepsilon S_\alpha). \tag{25}$$

Étant donné que E_α est un sous-ensemble anti-ordonné de la section finale

$$\bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha}, \ (x \varepsilon E_\alpha)$$

de la section finale S_α de E, la formule (24) et donc (23) en résulte immédiatement.

---

[1]) Chaque décomposition d'un ensemble partiellement ordonné E en deux parties disjointes non vides dont l'une est une portion initiale de E (et donc l'autre une portion finale de E) s'appelle une coupure de E. Il va sans dire qu'un ensemble $F \subseteq E$ est une portion $\begin{smallmatrix}\text{initiale}\\ \text{finale}\end{smallmatrix}$ de E si la relation $x \varepsilon F$ entraîne respectivement:

$$(-\infty, \ x]_E \subseteq F,$$
$$[x, \infty)_E \subseteq F.$$

Puisque

$$E_\alpha \subseteq S_\alpha, \; E_\xi \subseteq E \setminus S_\alpha, \; (\xi < \alpha), \tag{26}$$

les ensembles (12) sont deux à deux sans point commun. De plus,

$$S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_\alpha \supset \cdots, \; (\alpha < \gamma),$$

ce qui, avec (26), entraîne

$$E_\xi \subseteq S_\alpha \text{ pour tout } \alpha \leqslant \xi < \gamma). \tag{27}$$

Dès lors, si $\xi > \alpha$, l'ensemble E_ξ aussi bien que E_α appartiennent au composant supérieur de la coupure (20) c'est-à-dire:

$$E_\xi \subseteq \bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha} \; (= \text{d'après } (22)) =$$

$$= \bigcup [x, \infty)_E, \quad (x \in E_\alpha, \alpha \leqslant \xi < \gamma). \tag{28}$$

Vu la relation (24), on en déduit pour tout $\alpha < \gamma$:

$$E_\alpha = R_0 (\bigcup_\xi E_\xi), \quad (\alpha \leqslant \xi < \gamma). \tag{29}$$

Ceci étant, prouvons la validité des formules (17) et (18).

Tout d'abord

$$R_\alpha W = E_\alpha, \text{ pour tout } \alpha < \gamma. \tag{30}$$

En effet, dans le cas $\alpha = 0$, la formule (30) provient de (29) en y posant $\alpha = 0$. Soit $0 < \alpha < \gamma$ et supposons que la formule (30) ait lieu pour tout $\xi < \alpha$ c'est-à-dire que

$$R_\xi W = E_\xi, \quad (\xi < \alpha). \tag{31}$$

Prouvons alors que

$$R_\alpha W = E_\alpha. \tag{32}$$

En effet, d'après sa définition même, l'ensemble $R_\alpha W$ vérifie:

$$R_\alpha W = R_0 (W \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi W = (\text{à cause de } (31)) =$$

$$= R_0 (W \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi) = (\text{à la suite de la définition de}$$

W et du fait que les E_ξ sont deux à deux disjoints) =

$$= R_0 \Big(\bigcup_{\alpha \leqslant \xi < \gamma} \Big) R_\xi = (\text{à la suite de } (29)) = E_\alpha \text{ ce qui}$$

prouve la formule (32).

Ainsi par l'induction, l'égalité (30) est prouvée complètement.

De plus, puisque d'après (15) et (14):

$$W = \bigcup_{\alpha<\gamma} E_\alpha = (\text{à la suite de } (31)) = \bigcup_{\alpha<\gamma} R_\alpha W$$

et que $E_\alpha \neq v$ pour tout $\alpha < \gamma$, cela prouve que $\gamma W = \gamma$ ce qui prouve enfin que l'ensemble W est un sous-ensemble partiellement bien ordonné de E et que son rang γW coïncide avec le nombre γ de (14).

Ainsi le théorème est complétement démontré.

7. La condition (C). Dans la théorie des tableaux ramifiés (Thèse, Paris, 1935) j'ai fait ressortir l'intérêt qu'on a à étudier des ensembles partiellement ordonnés vérifiant la condition (C) que voici:

Quel que soit l'élément a de l'ensemble, l'ensemble $(-\infty, a)$ *de tous les prédécesseurs de a est ordonné.*

C'est qu'un tableau ramifié c'est un ensemble partiellement bien ordonné vérifiant la condition (C).

En conséquence du théorème que nous venons de démontrer on a le théorème suivant:

Tout ensemble partiellement ordonné vérifiant la condition C est confinal à un de ses tableaux ramifiés.

L'Institut Mathématique de l'Université de Zagreb.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914.

[2] G. Kurepa: Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse, Paris 1935. (aussi; Publ. Math. Belgrade, Tome IV. 1935, 1—138).

[3] „ „ L'Hypothèse du continu et les ensembles partiellement ordonnés, Comp. Rend. Ac. Sc. Paris, 205, 1937 p. 1196—1198.

[4] „ „ Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés, C. R. Soc. Sci. Varsovie, 1939.

[5] „ „ L'Hypothèse du continu et le problème de Suslin (Publ. de Inst. Math; Belgrade 1948, Tome II, p. 26 –36.