POLARSYSTEME UND DAMIT ZUSAMMENHÄNGENDE BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN. DAS PRINZIP VON HUYGENS IN DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE

Von

L. LOCHER-ERNST, Winterthur

1. Einleitung. Wir denken uns ein nicht ausgeartetes Polarsystem in der Ebene oder im Raume vorgelegt. Die Bedeutung, welche im Aufbau der Geometrie den Polarsystemen zukommt, braucht hier nicht betont zu werden. Man betrachtete bisher eine Polarität im allgemeinen sozusagen ausschliesslich nur als ein Korrespondenzprinzip, gemäss dem zum Beispiel die projektiven Eigenschaften des Punktraumes mit denen des Ebenenraumes formal identisch sind. Es liegt nahe, die Frage zu stellen, ob der Punktraum sich durch eine Folge von im allgemeinen stetigen Transformationen in den Ebenenraum überführen lasse. Um eine in der Natur der Sache begründete Lösung dieser zunächst etwas allgemeinen Frage zu finden, werden wir noch naheliegende Bedingungen hinzu nehmen. Es zeigt sich, dass die verlangte Umformung durch eine Gruppe von Berührungstransformationen geleistet werden kann. Hierbei sind die Transformationen von derart einfacher Natur, dass man wohl von *der* Lösung des gestellten Problems sprechen darf. Man stösst hierbei auf die nichteuklidische Form der Dilatationsgruppe, also auf das Huygens'sche Prinzip in der nichteuklidischen Geometrie.[1])

---

[1]) Nach Abschluss der vorliegenden Arbeit fand ich, dass *S. Lie* in der Abhandlung *Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie* (Berichte über die Verhandlungen der kön. sächsischen Ges. d. Wiss. Leipzig, Bd. 47, 1895, S. 501 u. 502) eine eingliedrige Gruppe von Transformationen betrachtete, welche die Polarenbeziehung enthält. Es werden aber dort weder die Transformationsformeln explizit aufgestellt noch wird der Zusammenhang mit der nichteuklidischen Geometrie, der mir hier die Hauptsache erscheint, aufgezeigt.

2. Erklärung der Transformationen in der Ebene. Wir legen vorbereitend zunächst ein ebenes Polarsystem zugrunde; nachher sollen die Verhältnisse im Raume ausführlicher behandelt werden. Jedes ebene, nicht ausgeartete Polarsystem bestimmt einen Kegelschnitt, dessen Gleichung in homogenen Punktkoordinaten x_i bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems lautet:

$$(xx) \equiv x_1{}^2 + x_2{}^2 + \varepsilon x_3{}^2 = 0. \tag{1}$$

Hierbei ist ε reell, für $\varepsilon > 0$ ergibt sich eine nullteilige, für $\varepsilon < 0$ eine ovale Kurve. Der Kegelschnitt (1) heisse die *absolute Kurve.* Wir setzen abkürzend:

$$(\xi x) \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \varepsilon \xi_3 x_3. \tag{2}$$

Das Punktfeld soll nun durch eine einparametrige Schar von im allgemeinen stetigen Transformationen in das Geradenfeld derart übergeführt werden, dass hierbei ein Punkt in seine Polare bezüglich der absoluten Kurve umgeformt wird. Den Parameter t nennen wir kurz *Zeit.*

Bezeichnungen: Die Gleichung einer Geraden a schreiben wir in der Form

$$a_1 x_2 + a_2 x_2 + \varepsilon a_3 x_3 = 0$$

und nennen a_1, a_2, a_3 die Koordinaten von a.

Mit $x * a$ bezeichnen wir das folgende Linienelement: Das Zeichen links des Sternchens stellt den Punkt $x(x_1 x_2 x_3)$, das Zeichen rechts die Gerade $a(a_1 a_2 a_3)$ des Linienelementes dar. Zwischen den Grössen x_1, x_2 x_3, a_1, a_2, a_3, besteht die Inzidenzbeziehung

$$(a\,x) = (x\,a) = 0. \tag{3}$$

Durch das Polarsystem wird dem Linienelement $\xi * \alpha$ das Linienelement $\alpha * \xi$ zugeordnet. Dem Punkt $\xi(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ entspricht nämlich die Gerade mit den Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, und der Geraden α $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Punkt mit den Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (Es liegt in der Sache, dass z. B. die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 sowohl die Koordinaten eines Punktes als auch diejenigen einer Geraden bezeichnen. Es empfiehlt sich nicht, für den Punkt ξ und die Gerade ξ mit denselben Koordinatenwerten verschiedene Zeichen einzuführen; das Beiwort „Punkt“ bzw. „Gerade“ genügt.)

Das Linienelement $\xi * \alpha$ (Zeit $t=0$) werde nun wie folgt in das Linienelement $\alpha * \xi$ (Zeit $t=\infty$) übergeführt: Der Punkt des Elementes bewege sich auf der Verbindungsgeraden $l=\xi\alpha$ des Ausgangspunktes ξ mit dem Endpunkt α. Zur Zeit t sei der Punkt ξ nach x gelangt. Die Gerade des Elementes $\xi * \alpha$ drehe sich hierbei um den Pol L von l inbezug auf die absolute Kurve. Zur Zeit t sei die Ausgangsgerade α in die Lage a gelangt; $x * a$ ist also das Linienelement zur Zeit t. Durch diese Operation werden die Linienelemente $\xi * \alpha$ des festen *Punktes* ξ (α variabel mit $(\xi\alpha)=0$) in die Linienelemente der festen *Geraden* $\xi(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ übergeführt. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die der Zeit t entsprechenden Lagen der Elemente, welche aus den ∞^4 Elementen der Ebene hervorgehen, richtig zu koordinieren. Es wird sich zeigen dass die folgende Koordinierung die richtige ist: Die Gerade $l=\xi\alpha$ schneide die absolute Kurve in den (reellen oder imaginären) Punkten $e(e_1 e_2 e_3)$ und $e'(e_1' e_2' e_3')$. *Die Zeit t, die der Lage x des vom Ausgangspunkt ξ ausgehenden Punktes entspricht, sei gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte ξ, α, x, e:*

$$t = (\xi\alpha x e) = (\overline{\xi x} : \overline{\alpha x}) : (\overline{\xi e} : \overline{\alpha e}). \tag{4}$$

Es zeigt sich, dass man aus jedem Ausgangselement $\xi * \alpha$ *zwei* Elemente $x * a$, $x' * a'$ hervorgehen lassen muss, die sich für $t=\infty$ zum Endelement $\alpha * \xi$ vereinigen. Hierbei soll gelten:

$$t = (\xi \alpha x e) = (\xi \alpha x' e'). \tag{4'}$$

Im folgenden Abschnitt werden die Transformationsformeln für die geschilderten Operationen hergeleitet.

3. Analytische Darstellung. Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkte e, e' der Verbindungsgeraden

$$\rho x_i = \xi_i + \lambda \alpha_i \quad (\rho \text{ ein Proportionalitätsfaktor, } i=1,2,3) \tag{5}$$

der Punkte ξ und α mit der absoluten Kurve. Aus

$$(\xi\xi) + 2\lambda(\alpha\xi) + \lambda^2(\alpha\alpha) = 0$$

folgt wegen $(\alpha\xi)=0$:

$$\lambda = +\sqrt{-\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)}}, \qquad \lambda' = -\sqrt{-\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)}}. \tag{6}$$

Somit:

$$\rho e_i = \xi_i + \lambda\alpha_i, \qquad \rho' e'_i = \xi_i + \lambda'\alpha_i.$$

Sind

$$\rho x_i = \xi_i + \mu\alpha_i, \qquad \rho' x'_i = \xi_i + \mu'\alpha_i \tag{7}$$

die Koordinaten des Punktes x bzw. x' zur Zeit t, so folgt aus (4), (4′) und (7) die bekannte Beziehung

$$t = \frac{\mu}{\lambda}, \quad \text{also } \mu = \lambda t \quad \text{bzw. } \mu' = \lambda' t. \tag{8}$$

Somit:

$$\rho x_i = \xi_i + \lambda t\alpha_i, \qquad \rho' x'_i = \xi_i + \lambda' t\alpha_i. \tag{9}$$

Für die Koordinaten von x (und auch von x') gelten wegen $(\xi\alpha) = 0$ nach (6) und (9) die Beziehungen:

$$\rho^2 (xx) = (\xi\xi) + 2\lambda t (\xi\alpha) + \lambda^2 t^2 (\alpha\alpha) = (1 - t^2)(\xi\xi), \tag{10}$$

$$\rho (\xi x) = (\xi\xi) + \lambda t (\xi\alpha) = (\xi\xi). \tag{11}$$

Die Koordinaten der Punkte x, x' erfüllen somit die Gleichung:

$$\Omega(\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, x_1\, x_2\, x_3\, t) \equiv (\xi\xi)(xx) - (1 - t^2)(\xi x)^2 = 0. \tag{12}$$

Das ist die Gleichung *einer Kegelschnittschar; jede Kurve der Schar berührt die absolute Kurve in ihren Schnittpunkten mit der Polaren* $(\xi x) = 0$ *des festen Punktes* ξ. Wir können diese Kurven also nichteuklidische Kreise nennen. Für $t = 1$ ergibt sich die absolute Kurve selbst. Für $t = 0$ entartet offensichtlich der betreffende Kegelschnitt in das Paar der Tangenten vom Punkte ξ an die absolute Kurve. Für $t \to \infty$ ergibt sich als Grenzfall die doppelt zu zählende Polare des Punktes ξ.

Nun betrachten wir die Gerade $\alpha\,(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$ durch den Punkt ξ. Sie schneide die Polare von ξ im Punkte L, dem Pol der „Leitlinie" $l = \xi\alpha$ des Punktes x. L und l sind polare Elemente für sämtliche Kurven der Schar (12). Die Gerade $a\,(a_1\, a_2\, a_3)$ des Elementes $x * a$ soll also die t-Kurve der Schar berühren. Zur Bestimmung von $a_1\, a_2\, a_3$ ist zunächst die Inzidenzbedingung

$$(ax) = 0 \tag{13}$$

zu erfüllen. In den laufenden Koordinaten X_i hat die Tangente an die t-Kurve die Gleichung

$$\Omega_1 X_1 + \Omega_2 X_2 + \Omega_3 X_3 = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}. \tag{14}$$

Aus

$$\Omega_1 = 2(\xi\xi)\, x_1 - 2(1-t^2)(\xi x)\, \xi_1 = \frac{2}{\rho}(\xi\xi)[\rho x_1 - (1+t^2)\xi_1] =$$
$$= \frac{2}{\rho}\, t\, (\xi\xi)[\lambda\alpha_1 + t\,\xi_1],$$
$$\Omega_2 = \frac{2}{\rho}\, t\,(\xi\xi)[\lambda\alpha_2 + t\,\xi_2], \qquad \Omega_3 = \frac{2}{\rho}\,\varepsilon t\,(\xi\xi)[\lambda_3\alpha + t\,\xi_3]$$

folgt durch Einsetzen in (14) und Vergleich mit $(aX) = 0$ (mit σ als Proportionalitätsfaktor):

$$\sigma a_i = t\,\xi_i + \lambda\alpha_i. \tag{15}$$

Für das Element $x' * a'$ entsprechend:

$$\sigma' a_i' = t\,\xi_i + \lambda'\alpha_i. \tag{15'}$$

Die Formeln

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\, x_i = \xi_i + \lambda t \alpha_i \\ \sigma\, a_i = t\,\xi_i + \lambda\alpha_i \end{array}\right. \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = -\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)} \tag{16}$$

stellen die im zweiten Abschnitt geschilderte Transformation dar; wir nennen sie $T(t)$ (bzw. $T'(t)$ für λ'). Sie führt das Linienelement $\xi * \alpha$ in das Element $x * a$ (bzw. $x' * a'$) über. *$T(t)$ bzw. $T'(t)$ ist eine Berührungstransformation mit der Leitgleichung* (12).

Beweis: Es gilt für festes t:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\Omega}{\partial x_i}\, dx_i = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\Omega}{\partial \xi_i}\, d\xi_i. \tag{17}$$

Hieraus ergibt sich durch Einsetzen:

$$a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \varepsilon a_3\, dx_3 = \frac{\lambda(1-t^2)}{\rho\sigma}(\alpha_1\, d\xi_1 + \alpha_2\, d\xi_2 + \varepsilon\alpha_3 d\xi_3).$$

Das ist aber die Bedingung dafür, dass durch $T(t)$ vereinigte Linienelemente wieder in vereinigte Elemente übergeführt werden.

Der Uebergang des Punktfeldes in das Geradenfeld ist leicht zu überschauen: Die Linienelemente eines Punktes ξ entfernen sich im allgemeinen stetig von ξ derart, dass sie in jeder Lage einen Kegelschnitt bilden, der die absolute Kurve in ihren Schnittpunkten mit der Polaren von ξ berührt (also einen nichteuklidischen Kreis). Zur Zeit $t=1$, die einen Ausnahmemoment darstellt, fallen sämtliche Linienelemente in diejenigen der absoluten Kurve. Weiter schmiegen sie sich dann für $t \to \infty$ von zwei Seiten her immer näher an die Polare des Ausgangspunktes ξ. Nach dieser allgemeinen Uebersicht sind nun noch die Unstetigkeiten anzugeben.

Es können entweder der Punkt ξ, hingegen nicht die Gerade α, oder die Gerade α (als Tangente), hingegen nicht der Punkt ξ, oder sowohl der Punkt ξ als auch die Gerade α des Ausgangselementes $\xi * \alpha$ der absoluten Kurve angehören. Wir schreiben zur Untersuchung die Formeln (16) in der Form:

$$\bar{\rho} x_i = \xi_i \sqrt{(\alpha\alpha)} + t\alpha_i \sqrt{-(\xi\xi)}, \quad \bar{\sigma} a_i = t\xi_i \sqrt{(\alpha\alpha)} + \alpha_i \sqrt{-(\xi\xi)}. \quad (18)$$

Im ersten Falle gilt $(\xi\xi)=0$, $(\alpha\alpha) \neq 0$. (18) liefert für jedes endliche, von Null verschiedene t das Element $x * a = \xi * \xi$. Das Ausgangselement dreht sich somit sprungweise um den Punkt ξ der absoluten Kurve in die Tangentenlage. Die Formeln lassen frei, wie für $t \to \infty$ das Element $\xi * \alpha$ sich um den Punkt ξ in die Tangentenlage dreht.

Im zweiten Falle ist $(\xi\xi) \neq 0$, $(\alpha\alpha)=0$. (18) liefert für jedes endliche, von Null verschiedene t das Element $x * a = \alpha * \alpha$. Das Ausgangselement $\xi * \alpha$ verschiebt sich also ruckartig längs der Tangente α in das Element $\alpha * \alpha$, dessen Punkt der absoluten Kurve angehört. Wie für $t \to \infty$ diese Verschiebung längs α in die Endlage $\alpha * \alpha$ vollzogen wird, lassen die Formeln (18) offen.

Schliesslich ist im dritten Falle $(\xi\xi)=(\alpha\alpha)=0$, d.h. das Ausgangselement ist ein Linienelement der absoluten Kurve selbst. (18) lässt frei, zu bestimmen, dass solche Elemente für alle t fest bleiben sollen.

Den einfachen Beweis, dass die Operationen $T(t)$ eine Gruppe bilden sowie den Zusammenhang mit den nichteuklidischen Geometrien werden wir nachher allgemein für den Fall des räumlichen Polarsystems vortragen.

4. Realitätsverhältnisse. Für $\varepsilon > 0$, also eine nullteilige Kurve, wird für jedes reelle Linienelement $\xi * \alpha$ sowohl $(\xi\xi) > 0$ als auch $(\alpha\alpha) > 0$. λ ist somit imaginär, die Transformation (16) führt für reelle von Null verschiedene t-Werte reelle Ausgangselemente $\xi * \alpha$ im allgemeinen durch das Imaginäre. Wählen wir aber t rein imaginär und führen den reellen Parameter $\tau = -t\sqrt{-1}$ ein, so kann man die Transformation *durchwegs reell* verlaufen lassen. Wir setzen:

$$t = \tau\sqrt{-1}, \quad \lambda = \sqrt{-1}\,\lambda^*, \quad \text{also} \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)}}\,.$$

(16) schreiben wir also in der Form (σ ist nicht derselbe Proportionalitätsfaktor wie oben):

$$\rho x_i = \xi_i - \tau\lambda^*\alpha_i, \qquad \sigma a_i = \tau\xi_i + \lambda^*\alpha_i. \tag{19}$$

(12) erhält dann die Form:

$$(\xi\xi)(xx) - (1+\tau^2)(\xi x)^2 = 0. \tag{20}$$

Im Falle $\varepsilon < 0$, also für eine ovale absolute Kurve, sind für die Bewegung eines Ausgangselementes $\xi * \alpha$ drei Fälle zu unterscheiden:

Der Punkt ξ des Elementes liegt ausserhalb der absoluten Kurve, d. h. $(\xi\xi) > 0$, und die Gerade α trifft sie nicht reell, d. h. $(\alpha\alpha) < 0$. Die Bewegung verläuft im Reellen.

Der Punkt ξ liegt ausserhalb der absoluten Kurve, die Gerade α trifft sie reell, d. h. $(\xi\xi) > 0$, $(\alpha\alpha) > 0$. Die Bewegung erfolgt durch das Imaginäre.

Der Punkt ξ liegt im Inneren, die Gerade α schneidet somit reell, also $(\xi\xi) < 0$, $(\alpha\alpha) > 0$. Die Bewegung verläuft im Reellen. (Es ist naheliegend, im zweiten Falle die imaginären Bahnen durch reelle zu ersetzen, indem man an ihrer Stelle die reellen „Kreise“ nimmt, welche die absolute Kurve von aussen her berühren.)

5. Uebersicht der Transformationen im Raume. Wir legen nunmehr ein nicht ausgeartetes räumliches Polarsystem zugrunde. Es bestimmt eine Quadrik, die wir die absolute Fläche nennen. Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems hat diese in homogenen Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 die Gleichung

$$(xx) \equiv x_1^2 + x_2^2 + \varepsilon x_3^2 + \varepsilon' x_4^2 = 0. \tag{21}$$

Hierbei sind $\varepsilon, \varepsilon'$ reell. Für $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ stellt (21) eine nullteilige, für $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' < 0$ eine ovale, für $\varepsilon < 0$, $\varepsilon' < 0$ eine ringartige Fläche dar. Wir schreiben abkürzend:

$$(\xi x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \varepsilon \xi_3 x_3 + \varepsilon' \xi_4 x_4. \tag{22}$$

Bezeichnungen: Die Gleichung einer Ebene a schreiben wir in der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon a_3 x_3 + \varepsilon' a_4 x_4 = 0, \quad \text{d. h.} \, (ax) = 0, \tag{23}$$

und nennen a_1, a_2, a_3, a_4 die Koordinaten der Ebene.

Mit $x * a$ bezeichnen wir das folgende *Flächenelement:* Das an *erster* Stelle stehende Zeichen x bedeute den *Punkt* des Flächenelementes, das an *zweiter* Stelle stehende Zeichen a seine Ebene $a\,(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$. Die acht Grössen x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2, a_3, a_4 sind die Koordinaten des Flächenelementes; wegen der Homogenität und der Inzidenzbedingung

$$(ax) = 0 \tag{24}$$

handelt es sich um wesentlich *fünf* Grössen.

Mit diesen Bezeichnungen gilt: Das zugrunde gelegte Polarsystem ordnet dem *Punkt* $\xi\,(\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4)$ die *Ebene* $\xi\,(\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4)$, der *Ebene* α den *Punkt* $\alpha\,(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4)$ zu. Dem Flächenelement $\xi * \alpha$ entspricht somit das Flächenelement $\alpha * \xi$.

Es handelt sich nun darum, jeden Punkt ξ des Raumes durch eine Folge von im allgemeinen stetigen Transformationen in die zugehörige Polarebene bezüglich der absoluten Fläche umzuformen. Hierbei sollen die sämtlichen ∞^2 Flächenelemente des *Punktes* ξ im allgemeinen stetig in die ∞^2 Flächenelemente der *Polarebene* ξ übergeführt werden.

Zunächst soll die Bewegung geschildert werden, der das Ausgangselement $\xi * \alpha$ unterworfen wird. Der Punkt des Elementes beschreibe die Verbindungsgerade $l = \xi\alpha$ des Ausgangspunktes ξ mit dem End*punkt* α, dem Pol der *Ebene* α. d sei die Schnittgerade der Ausgangsebene α mit der Polar*ebene* ξ des *Punktes* ξ. Die Ausgangsebene α drehe sich um d. Die *Leitlinie* l und die *Drehlinie* d sind konjugierte Polaren des Polarsystems. Der wesentliche Umstand besteht nun wiederum darin, diese Bewegungen der verchiedenen Flächenelemente des Raumes richtig zu koordinieren, das heisst anzugeben, welche Lagen „gleichzeitig“ erreicht werden sollen. Der Ausgangslage ordnen wir die

Zeit $t=0$ zu. Wir setzen fest: Zur Zeit $t=1$ sollen sämtliche ∞^5 Flächenelemente des Raumes in solche Lagen gelangen, in denen sie die absolute Fläche berühren. Die Zeit $t=1$ stellt einen Ausnahmemoment dar. Die folgende allgemeine Zeitfestlegung wird den soeben erwähnten Sonderfall in sich schliessen.

Es seien e, e' die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der Leitlinie l des Ausgangselementes $\xi * \alpha$ mit der absoluten Fläche. Nun seien dem Element $\xi * \alpha$ zur Zeit t (ungleich 0 und ungleich ∞) *zwei* Lagen $x * a$ und $x' * a'$ derart zugeordnet, dass die Doppelverhältnisse $(\xi \alpha x e)$ bzw. $(\xi \alpha x' e')$ den Wert t haben:

$$(\xi \alpha x e) = (\xi \alpha x' e') = t. \tag{25}$$

Das Ausgangselement $\xi * \alpha$ wird also in *zwei* Elemente aufgelöst, die sich für $t=\infty$ im Endelement $\alpha * \xi$ wieder vereinigen sollen.

6. Analytische Darstellung der Transformation im Raume. Wir bestimmen für die im vorausgegangenen Abschnitt geschilderten Bewegungen der einzelnen Flächenelemente die entsprechenden Transformationsformeln. Die Leitlinie l mit den Punkten

$$\rho x_i = \xi_i + \lambda \alpha_i$$

schneidet die absolute Fläche in den Punkten e, e'; für die zugehörigen Parameterwerte λ ergibt sich wegen der Inzidenzrelation durch Einsetzen in (21):

$$\lambda = +\sqrt{-\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)}}, \quad \lambda' = -\sqrt{-\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)}}; \tag{26}$$

$$\rho e_i = \xi_i + \lambda \alpha_i, \quad \rho' e_i' = \xi_i + \lambda' \alpha_i. \tag{27}$$

Ist das Element $\xi * \alpha$ zur Zeit t in die Lage $x * a$ bzw. $x' * a'$ gelangt, und machen wir den Ansatz

$$\rho x_i = \xi_i + \mu \alpha_i \quad \text{bzw.} \quad \rho' x_i' = \xi_i + \mu' \alpha_i,$$

so ergibt sich wegen (25) in bekannter Weise $t = \mu/\lambda$ bzw. $t = \mu'/\lambda'$. Für den Punkt x bzw. x' des Elementes $x * a$ bzw. $x' * a'$ gilt also:

$$\rho x_i = \xi_i + \lambda t \alpha_i, \quad \rho' x_i' = \xi_i + \lambda' t \alpha_i, \tag{28}$$

wofür wir oft nur $\rho x_i = \xi_i + \lambda t \alpha_i$ schreiben.

Für die derart bestimmten Koordinaten gelten die Beziehungen:

$$\rho^2 (xx) = (\xi\xi) + 2\lambda t (\xi\alpha) + \lambda^2 t^2 (\alpha\alpha) = (1 - t^2)(\xi\xi), \tag{29}$$

$$\rho (\xi x) = (\xi\xi) + \lambda t (\xi\alpha) = (\xi\xi). \tag{30}$$

Die Koordinaten x_i erfüllen also die Gleichung:

$$\Omega (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 x_1 x_2 x_3 x_4 t) \equiv (\xi\xi)(xx) - (1 - t^2)(\xi x)^2 = 0. \tag{31}$$

Für jeden festen Punkt ξ stellt (31) eine Schar von Quadriken dar mit dem Parameter t. *Alle Flächen der Schar berühren die absolute Fläche längs der Kurve, in der jene von der Polarebene des Punktes ξ geschnitten wird*, wie man aus der Gleichung (31) sofort ablesen kann. Wir können sie also nichteuklidische Kugeln nennen. Für $t = 0$ ergibt sich als Ausartung der Kegel mit der Spitze ξ, der die absolute Fläche berührt. Für $t = 1$ liefert (31) die absolute Fläche. Für $t = \infty$ ergibt sich die doppelt zu zählende Polarebene des Punktes ξ.

Den ∞^2 Flächenelementen des Punktes ξ entsprechen somit zur Zeit t lauter Flächenelemente, deren Punkte x, x' auf der Quadrik (31) liegen. Nun sollen die Ebenen der Elemente nach Abschnitt 5 sämtlich durch die Polare d der Geraden $l = \xi\alpha$ gehen. d und l sind aber nicht nur bezüglich der absoluten Fläche, sondern auch bezüglich jeder Quadrik der Schar (31) konjugiert. Es sind also die Ebenenkoordinaten a_i des Elementes $\dot{x} * a$ derart zu bestimmen, dass die Ebene

$$(a\, X) = 0 \tag{32}$$

(laufende Punktkoordinaten X_i) die entsprechende Quadrik berührt. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte x der Quadrik (31) lautet:

$$\sum_{i=1}^{4} \Omega_i X_i = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}. \tag{33}$$

Eine leichte Rechnung ergibt mit Hilfe von (30) und (28):

$$\Omega_1 = \frac{2}{\rho} t (\xi\xi)(t \xi_1 + \lambda \alpha_1), \text{ usw.} \tag{34}$$

Vergleichen von (32) und (33) liefert mit σ als Proportionalitätsfaktor:

$$\sigma a_i = t\xi_i + \lambda\alpha_i, \quad \text{entsprechend} \quad \sigma' a_i' = t\xi_i + \lambda'\alpha_i. \tag{35}$$

Die Transformation $T(t)$ (bzw. $T'(t)$ für λ')

$$\begin{cases} \rho x_i = \xi_i + \lambda t \alpha_i \\ \sigma a_i = t\xi_i + \lambda\alpha_i \end{cases} \quad \text{mit } \lambda^2 = -\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)} \tag{36}$$

führt also das Ausgangselement durch die Stationen $x * a$ bzw. $x' * a'$ in das Endelement $\alpha * \xi$ über. Die Flächenelemente des festen Punktes ξ gehen hierbei über in die Flächenelemente einer Quadrik, welche sich für $t \to \infty$ der Polarebene des Punktes ξ anschmiegt.

Dass $T(t)$ bzw. $T'(t)$ wirklich eine Berührungstransformation mit der Leitgleichung (31) darstellt, ist leicht direkt zu beweisen: Für jedes feste t folgt aus (31):

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} dx_i = -\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial\Omega}{\partial \xi_i} d\xi_i. \tag{37}$$

Durch Einsetzen erhält man hieraus nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \varepsilon a_3\,dx_3 + \varepsilon' a_4\,dx_4 = \frac{\lambda(1-t^2)}{\rho\sigma} (\alpha_1\,d\xi_1 + \alpha_2\,d\xi_2 + \\ + \varepsilon\alpha_3\,d\xi_3 + \varepsilon'\alpha_4\,d\xi_4). \end{aligned} \tag{38}$$

Diese Relation ist aber bekanntlich die Bedingung dafür, dass vereinigte Elemente wieder in vereinigte Elemente transformiert werden.

Es ist leicht zu überblicken, wie sich ein Punkt des Punktraumes in die ensprechende Ebene des Ebenenraumes umwandelt: Seine Flächenelemente — wobei jedes sich in zwei aufspaltet — entfernen sich im allgemeinen stetig von ihm derart, dass sie ständig eine Quadrik (nichteuklidische Kugel) umhüllen, welche die absolute Fläche berührt. Im Ausnahmemoment $t = 1$ werden die Flächenelemente aller Punkte zu Elementen der absoluten Fläche. Für $t \to \infty$ schmiegen sie sich von zwei Seiten her immer näher an die Polarebene des Ausgangspunktes.

Aus den am Schlusse von Abschnitt 3 gemachten Bemerkungen für den Fall der Ebene sind die Unstetigkeiten für die Transformationen im Raume ohne weiteres klar.

7. Die Umformung des Geradenraumes. Jetzt prüfen wir, wie eine Gerade umgeformt wird, d. h. in welche Gebilde die ∞^2 Flächenelemente einer Geraden g transformiert werden. Betrachten wir zuerst alle Elemente, deren Punkte der Geraden g angehören und deren Ebenen in der festen Ebene $\alpha\,(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)$ durch g liegen. Diese Elemente bilden den *Streifen* g/α. Jedes Element $\xi*\alpha$ des Streifens g/α hat die Verbindungsgerade der *Punkte* ξ und α zur Leitlinie. Die Leitlinien der sämtlichen Elemente des Streifens bilden somit das Strahlenbüschel $\alpha(g)$. Die Ebene des Büschels schneidet die absolute Fläche in einem Kegelschnitt G. Die Elemente, die in G die absoluten Fläche berühren, stellen die Stationen der von Streifen g/α ausgehenden Elemente zur Zeit $t=1$ dar. Zur Zeit $t=(\xi\alpha x e)=(\xi\alpha x' e')$ bilden die Punkte x, x' der entsprechenden Stationen somit einen Kegelschnitt G_t, der zu $G_1=G$ zentrisch kollinear ist, wobei der *Punkt* α das Zentrum, g die Achse und t die Charakteristik der zentrischen Kollineation bedeuten.

Betrachten wir jetzt die sämtlichen Flächenelemente, deren Punkte alle in den festen Punkt ξ auf g fallen und deren Ebenen alle durch g laufen, d. h. das *Elementenbüschel* $\xi]g$. Die Leitlinien der Elemente dieses Büschels bilden das Strahlenbüschel $\xi(h)$, wobei h die bezüglich der absoluten Fläche konjugierte Polare zu g ist. Fur Zeit $t=1$ gelangen die Punkte dieser Elemente in die Schnittkurve H der Ebene ξh mit der absoluten Fläche. Den Punktort H_t für die Zeit t erhält man aus dieser Kurve $H=H_1$ durch die zentrische Kollineation mit dem Zentrum ξ, der Achse h und der Charakteristik t.

Um den Punktort der sämtlichen Elemente der Geraden g zur Zeit t zu finden, können wir somit entweder die Schnittkurven G der Ebenen des Büschels mit dem Träger g oder die Schnittkurven der Ebenen des Büschels mit dem Träger h mit der absoluten Fläche, kurz das Netz (G) bzw. (H) geeignet kollinear umformen. Die Leitlinien der sämtlichen Elemente der Geraden g bilden die lineare Kongruenz mit den Achsen g und h, *Die aus den Flächenelementen einer Geraden g durch $T(t)$ und $T'(t)$ hervorgehenden Elemente bilden eine Quadrik $\Phi(g,t)$, welche die absolute Fläche in ihren vier Schnittpunkten mit g und h, der Polaren von g, berührt.*

Beweis: g schneide die absolute Fläche in den Punkten $\eta(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)$ und $\zeta(\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4)$; die Polare h von g schneide die absolute Fläche in den Punkten β $(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)$ und γ $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)$. Die Punkte β, γ sind die Berührungspunkte der Tangentialebenen durch g, η und ζ die Berührungspunkte der Tangentialebenen durch h. Die Geraden $\beta\eta, \beta\zeta, \gamma\eta, \gamma\zeta$ sind Erzeugende der absoluten Fläche. Laut Voraussetzung bestehen die acht Beziehungen:

$$(\beta\beta) = 0, \quad (\gamma\gamma) = 0, \quad (\eta\eta) = 0, \quad (\zeta\zeta) = 0, \tag{39}$$

$$(\beta\eta) = 0, \quad (\beta\zeta) = 0, \quad (\gamma\eta) = 0, \quad (\gamma\zeta) = 0. \tag{40}$$

Die Koordinaten ξ_i, α_i jedes Flächenelementes $\xi * \alpha$ der Geraden g lassen sich nun mit Hilfe der Parameter μ, ν in der Form darstellen:

$$\xi_i = \eta_i + \mu\zeta_i, \qquad \alpha_i = \beta_i + \nu\gamma_i. \tag{41}$$

Wegen (39) und (40) ist die Inzidenzbedingung $(\xi\alpha) = 0$ erfüllt. Ferner wird:

$$(\xi\xi) = 2\mu\,(\eta\zeta), \qquad (\alpha\alpha) = 2\nu\,(\beta\gamma);$$

also:

$$\lambda^2 = -\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)} = -\frac{\mu\,(\eta\zeta)}{\nu\,(\beta\gamma)}. \tag{42}$$

Unterwerfen wir das Element $\xi * \alpha$ der Transformation (36), so gelten infolge (39), (40), (41) die Beziehungen:

$$\rho\,(\beta x) = \lambda t\,(\beta\gamma)\,\nu, \qquad \rho\,(\gamma x) = \lambda t\,(\beta\gamma),$$

$$\rho\,(\eta x) = (\eta\zeta)\,\mu, \qquad \rho\,(\zeta x) = (\eta\zeta);$$

somit wegen (42):

$$\frac{(\beta x)(\gamma x)}{(\eta x)(\zeta x)} = -\frac{(\beta\gamma)}{(\eta\zeta)}\,t^2.$$

Der Ort $\Phi\,(g,t)$ der Elemente $x * a$ ist also die Quadrik mit der Gleichung:

$$(\eta\zeta)\,(\beta x)\,(\gamma x) + t^2\,(\beta\gamma)\,(\eta x)\,(\zeta x) = 0, \tag{43}$$

aus der sich auch die im obigen Satze angegebenen Eigenschaften ablesen lassen.

8. Realitätsverhältnisse. Wir nehmen das Ausgangselement $\xi * \alpha$ immer reell an. Ist die absolute Fläche oval, also $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' < 0$, so sind wie in der Ebene drei Fälle zu unterscheiden.

Liegt erstens der Punkt ξ im Aeusseren, und schneidet die Ebene α des Elementes $\xi * \alpha$ die absolute Fläche nicht reell, also $(\xi\xi) > 0$ und $(\alpha\alpha) < 0$, so verläuft die Bewegung im Reellen.

Liegt zweitens der Punkt ξ im Aeusseren, schneidet aber die Ebene α die absolute Fläche reell, also $(\xi\xi) > 0$ und $(\alpha\alpha) > 0$, so erfolgt die Bewegung durch das Imaginäre (sie kann aber leicht durch eine reelle Bewegung dargestellt werden, indem man statt der imaginären Flächenteile die reellen Kugelteile nimmt, welche die absolute Fläche von aussen berühren).

Liegt drittens der Punkt ξ im Innern, schneidet also die Ebene α die absolute Fläche immer reell, so wird $(\xi\xi) < 0$ und $(\alpha\alpha) > 0$. Die Bewegung solcher Elemente verläuft also durchwegs im Reellen.

Im Falle einer nullteiligen Fläche ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$) als absoluter Fläche ist für jedes reelle Ausgangselement $\xi * \alpha$ sowohl $(\xi\xi) > 0$ als auch $(\alpha\alpha) > 0$; die Bewegung verläuft also durchwegs imaginär, sofern wir den Parameter *t reell* gegen ∞ wachsen lassen. Wir können aber in diesem Falle die Bewegung sämtlicher Elemente auch durchwegs reell verlaufen lassen. Wir setzen dazu wie in Abschnitt 4:

$$t = \tau\sqrt{-1}, \quad \lambda = \lambda^* \sqrt{-1}, \quad \text{also} \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{(\xi\xi)}{(\alpha\alpha)}}. \tag{44}$$

An Stelle von (36) tritt:

$$T(\tau) \begin{cases} \rho x_i = \xi_i - \tau\lambda^*\alpha_i \\ \sigma a_i = \tau\xi_i + \lambda^*\alpha_i \end{cases} ; \quad (\tau \text{ reell}) \tag{45}$$

und an Stelle von (31):

$$(\xi\xi)(xx) - (1 + \tau^2)(\xi x)^2 = 0. \tag{46}$$

Ist die absolute Fläche ringartig, so können auch hier für reelle t-Werte gewisse Bahnteile imaginär werden. Dies ist für solche Ausgangselemente $\xi * \alpha$ der Fall, für welche die Verbindungsgerade des Punktes ξ mit dem Pol der Ebene α die Fläche nicht reell schneidet,

9. Die Gruppe der nichteuklidischen Dilatationen. *Die Transformationen* $T(t)$ (bzw. $T'(t)$):

$$\rho x_i = \xi_i + \lambda t \alpha_i, \quad \sigma a_i = t\xi_i + \lambda \alpha_i \tag{47}$$

bilden eine einparametrige Gruppe.

Beweis. Durch $T(t)$ wird das Flächenelement $\xi * \alpha$ in das Element $x * a$ übergeführt:

$$(\xi * \alpha) . T(t) = x * a.$$

Nun wenden wir die Transformation $T(t')$ mit dem Parameter t' auf das Element $x * a$ an; $y * b$ sei das hervorgehende Element (ρ', σ' sind Proportionalitätsfaktoren):

$$\begin{cases} \rho' y_i = x_i + \Lambda t' a_i \\ \sigma' b_i = t' x_i + \Lambda a_i \end{cases} \text{mit} \quad \Lambda = \sqrt{-\frac{(x x)}{(a a)}} = \frac{\sigma}{\rho} \text{(nach (29)).}$$

Einsetzen von (47) liefert:

$$\rho\rho' y_i = (1 + tt')\xi_i + \lambda(t + t')\alpha_i,$$
$$\rho\sigma' b_i = (t + t')\xi_i + \lambda(1 + tt')\alpha_i$$

oder

$$\rho'' y_i = \xi_i + \lambda \frac{t + t'}{1 + tt'} \alpha_i, \quad \sigma'' b_i = \frac{t + t'}{1 + tt'} \xi_i + \lambda \alpha_i, \tag{48}$$

wobei ρ'', σ'' wieder Proportionalitätsfaktoren darstellen. (48) zeigt, dass die Folge der Operationen $T(t)$, $T(t')$ wieder eine Operation derselben Art liefert. Das Gesetz der Zusammensetzung lautet nach (48):

$$T(t)\, T(t') = T\left(\frac{t + t'}{1 + tt'}\right). \tag{49}$$

Entsprechend erhält man für die Transformation (45) mit dem Parameter τ das Gesetz:

$$T(\tau)\, T(\tau') = T\left(\frac{\tau + \tau'}{1 - \tau\tau'}\right). \tag{50}$$

Führt man statt t bzw. τ den Parameter s ein gemäss

$$\operatorname{tgh} s = t \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg} s = \tau, \tag{51}$$

so lautet das Gruppengesetz (49) bzw. (50) einfach

$$T(s)\, T(s') = T(s + s'). \tag{52}$$

Der neue Parameter s stellt (abgesehen von einer hier unwesentlichen multiplikativen Konstanten) die nichteuklidische Entfernung des Punktes x vom festen Ausgangspunkt ξ dar. Es gilt nämlich im hyperbolischen Fall einer ovalen absoluten Fläche für die Entfernung $\overline{\xi x}$ bekanntlich:

$$\mathrm{ch}^2\,\overline{\xi x} = \frac{(\xi x)^2}{(\xi\xi)(xx)};$$

für den elliptischen Fall (nullteilige absolute Fläche) ist der hyperbolische Kosinus durch den Kreiskosinus zu ersetzen. Nach (31) bzw. (46) wird somit

$$1 - t^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\overline{\xi x}} \quad \text{bzw.} \quad 1 + \tau^2 = \frac{1}{\cos^2\overline{\xi x}},$$

woraus (51) folgt für $\overline{\xi x} = s$.

Der euklidische Sonderfall. Entartet die absolute Fläche in den absoluten Kugelkreis, so erhalten wir aus unserer Transformationsgruppe eine wohlbekannte Gruppe von Berührungstransformationen. Die Quadriken, in welche ein Punkt ξ übergeführt wird, berühren die absolute Fläche längs eines Kegelschnittes. Im euklidischen Falle sind also diese Quadriken gewöhnliche Kugeln.

Die konjugierte Polare h einer Geraden g wird im euklidischen Fall durch die zu g senkrechte Stellung geliefert. β, γ (siehe Abschnitt 7) sind die (imaginären) Schnittpunkte der unendlich fernen Geraden h mit dem Kugelkreis. Seine (imaginären) Tangenten in β, γ schneiden sich im unendlich fernen (reellen) Punkt der Geraden g. Das im Abschnitt 7 erwähnte Tetraeder $\beta\gamma\eta\zeta$ artet in das Dreieck mit den Ecken $\beta, \gamma, \eta \equiv \zeta$ aus. Von den vier Erzeugenden $\beta\eta, \beta\zeta, \gamma\eta, \gamma\zeta$ des absoluten Gebildes fallen je zwei zusammen. *Die Quadriken $\Phi(g, t)$ in welche die Gerade g übergeführt wird, sind Drehzylinder mit g als Achse.*

Im euklidischen Falle ergibt sich somit die Gruppe der räumlichen Dilatationen. Da diese Gruppe den wesentlichen Inhalt des Huygens'schen Prinzips darstellt, dürfen wir sagen:

Die betrachtete Gruppe von Berührungstransformationen, welche den Punktraum in den gemäss einem gegebenen Polar-

system entsprechenden Ebenenraum überführen, ist die Gruppe der nichteuklidischen Dilatationen; sie stellt also die nichteuklidische Form des Huygens'schen Prinzips dar.

10. Schlussbemerkung. In der nichteuklidischen Geometrie sind die Begriffe Streckenmass und Winkelmass *formal* identisch. Mit Hilfe der nichteuklidischen Dilatationen ist es möglich, die formale Identität zu einer inhaltlichen zu erweitern in dem Sinne, dass beide Begriffe demselben Oberbegriff subsummiert werden können.

Wir schildern hier noch kurz die Verhältnisse in der ebenen Geometrie. Es seien $x * a$, $y * b$ zwei Linienelemente. Aus einem nachher ersichtlichen Grunde nennen wir das Elementenpaar $x * a$, $y * b$ *messbar*, wenn beide Elemente Linienelemente desselben nichteuklidischen Kreises darstellen. Ein Tangentenpaar der absoluten Kurve sowie die (doppelt zu zählenden) Geraden rechnen wir als Ausartungen auch zu den Kreisen.

Zwei Elemente bestimmen einen *Winkel*, wenn ihre Punkte zusammenfallen: Winkel $(x * a,\ x * b)$.

Zwei Elemente bestimmen eine *Strecke*, wenn ihre Geraden zusammenfallen: Strecke $(x * a,\ y * a)$.

Solche besonderen Elementenpaare sollen also auch messbar heissen.

Einem messbaren Elementenpaar $x * a$, $y * b$ werden wir nun ein Mass $M(x * a, y * b)$ zuordnen, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Für ein Paar $x * a$, $x * b$ sei M das übliche Winkelmass.
2. Für ein Paar $x * a$, $y * a$ sei M das übliche Streckenmass.
3. M sei gegenüber der Dilatationsgruppe invariant.

Es sei $x * a, y * b$ ein messbares Elementenpaar; u, v seien die Berührungspunkte des Kreises, dem die Elemente angehören, mit der absoluten Kurve, w der Schnittpunkt der Tangenten in u, v. Die Schnittpunkte der Geraden xw, yw mit der Geraden uv nennen wir a', b'; die Schnittpunkte der Geraden a, b mit uv nennen wir a'', b''.

Die vier Punkte u, v, x, y des Kreises bestimmen das Doppelverhältnis $(u v x y)$, das auch gleich ist dem Doppelverhältnis der

Tangenten in ihnen. Nach einem bekannten Satz[1]) gilt:

$$(u\,v\,x\,y)^2 = (u\,v\,a\,b)^2 = (u\,v\,a'\,b') = (u\,v\,a''\,b''). \tag{53}$$

Wir setzen nun für ein messbares Elementenpaar $x * a,\ y * b$:

$$M\,(x * a,\ y * b) = 2 \ln (u\,v\,x\,y) = 2 \ln (u\,v\,a\,b) =$$
$$= \ln (u\,v\,a'\,b') = \ln (u\,v\,a''\,b''). \tag{54}$$

Die derart definierte Grösse M erfüllt offenbar die drei obigen Bedingungen.

Anwendungen und Verallgemeinerungen seien einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Anmerkung: Die Verallgemeinerung obiger Transformationen auf den Fall einer beliebigen nicht involutorischen Reziprozität im projektiven R_n wird gegeben in der Arbeit *„Stetige Vermittlung der Korrelationen"*, Monatshefte für Mathematik, 54. Bd., Wien 1950.

Eingesandt: 28. Oktober 1949.

---

[1]) Vgl. etwa *C. Juel:* Vorlesungen über projektive Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der von Staudt'schen Imaginärtheorie. Springer, Berlin 1934. S. 90.