SUR LA DÉFINITION ET L'ORDINATION DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

Par

GEORGES KUREPA

Le but de la Note sera de définir l'ensemble K des nombres complexes comme des transformations réelles de l'ensemble $\{0,1\}$ constitué des éléments neutres 0 et 1 du corps C des nombres réels, *la transformation identique i y jouant le rôle de l'unité imaginaire.* En élargissant l'ordre complet de C on ordonnera partiellement l'ensemble K de telle manière à obtenir un corps commutatif partiellement ordonné archimédien induisant la topologie usuelle au sein de l'ensemble K.

1. Les ensembles C et {0, 1}. Sans aucun doute, les éléments les plus distingués du continu linéaire

$$C \tag{1.1}$$

de tous les nombres réels sont les nombres

$$0 \text{ et } 1, \tag{1.2}$$

0 étant l'élément neutre du groupe $(C;+)$[1]) et 1 étant l'élément neutre du groupe $(C\setminus(0).$[1])

Par conséquent, la paire la plus distinguée tirée de C c'est l'ensemble

$$\{0, 1\} \tag{1.3}$$

constitué précisément des éléments neutres 0 et 1.

---

[1]) Il va sans dire que $(C;+)$ veut dire l'ensemble C dans lequel est défini l'opérateur binaire; notons que $C\setminus(0)$ est l'ensemble qu'on obtient de C en lui enlevant l'ensemble (0) composé du nombre 0.

Ceci étant, si nous considérons une transformation uniforme quelconque

$$f \qquad \text{de } \{0, 1\} \qquad \text{en } C \tag{1.4}$$

on aura les deux nombres réels bien déterminés $f(0)$ et $f(1)$, et schématiquement la fonction f peut être représentée comme „la paire ordonnée"

$$(f(0); f(1)). \tag{1.5}$$

Voici quatre exemples de certaines transformations de $\{0, 1\}$ en C:

$$(0, 0);\ (0, 1);\ (1, 0);\ (1, 1).$$

Les deux transformations $(0, 0)$, $(1, 1)$ sont des constantes, zéro et l'unité respectivement; la transformation $\{0,1\}$ coïncide avec l'identité = la transformation identique de $\{0, 1\}$ et, de ce fait, peut être désignée par i de telle manière que la transformation

$$i \text{ est définie par: } i(0) = 0,\ i(1) = 1, \tag{1.6}$$

donc i est représenté par le schéma $(0; 1)$:

$$i = (0, 1). \tag{1.7}$$

2. Définition de l'ensemble K des nombres complexes. Ceci étant, définissons l'ensemble des nombres complexes comme l'ensemble

$$K \tag{2.1}$$

de toutes les fonctions uniformes réelles définies dans $\{0, 1\}$ organisé de manière à vérifier les quatre conditions I—IV que voici:

I. L'ordination partielle de K. Si $f, g \varepsilon K$, alors la relation

$$f \leqslant g \text{ (ou } g \geqslant f) \tag{2.2}$$

sera équivalente au système:

$$\begin{aligned} f(0) &\leqslant g(0) \\ f(1) &\leqslant g(1). \end{aligned} \tag{2.3}$$

II. Addition dans K. La somme de deux nombres complexes f, g, symboliquement

$$f + g, \tag{2.4}$$

est la transformation de $\{0, 1\}$ en C définie par le système:

$$(f+g)(0)=f(0)+g(0),$$

$$(f+g)(1)=f(1)+g(1). \qquad (2.5)$$

III. Multiplication dans K. Le produit

$$fg \qquad (2.6)$$

des deux nombres complexes f, g est la transformation suivante de $\{0, 1\}$ en C:

$$(fg)(0)=f(0)g(0)-f(1)g(1)$$

$$(fg)(1)=f(0)g(1)+f(1)g(0). \qquad (2.7)$$

IV. Le plongement du continu linéaire C dans l'ensemble K se fait par l'identification

$$x=(x;0) \quad (x \varepsilon C), \qquad (2.8)$$

c'est-à-dire en considérant tout nombre réel x comme la transformation de $\{0, 1\}$ faisant correspondre à 0 et 1 les nombres réels x et 0, respectivement. En particulier, les nombres réels 0 et 1 coïncident ainsi avec les fonctions:

$$0(0)=0(1)=0$$

et

$$1(0)=1, \ i(1)=0 \quad \text{respectivement.}$$

On se rend facilement compte que $(K;+)$ est un groupe commutatif; le nombre réel 0 étant son élément neutre; de même; $(K \setminus (0); \cdot)$ est un groupe commutatif, le nombre réel 1 étant son élément neutre.

On voit immédiatement que, pour tout nombre complexe z, on a

$$z=(z(0);z(1))=(z(0);0)+(0;z(1))=(1;0)z(0)+(0;1)z(1),$$

donc

$$z=(1;0)z(0)+(0;1)z(1)$$

et, à la suite de (1.7) et (2.8),

$$z=1 \cdot z(0)+iz(1)$$

et finalement

$$z=z(0)+i\,z(1), \quad (z \varepsilon K). \qquad (2.9)$$

On a ainsi la décomposition bien connue de tout nombre complexe en „partie réelle“ $z(0)$ et „partie imaginaire“ $iz(1)$. En particulier, $ii = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$, donc

$$ii = -1.$$

Bref, le nombre complexe i (l'unité imaginaire) est la transformation identique de l'ensemble $\{0,1\}$ en soi même, ce qui montre la commodité et l'intérêt de le désigner par la lettre initiale i du mot „identité“.

3. Les signes $=, <, >$ et $||$. En convenant que pour deux nombres complexes f, g on définit: l'égalité

$$f = g \tag{3.1}$$

par le système

$$f \leqslant g \text{ et } g \leqslant f \tag{3.2}$$

et l'inégalité

$$f < g \text{ ou } g > f \tag{3.3}$$

par le système

$$f \leqslant g,\ f \neq g \tag{3.4}$$

et l'incomparabilité

$$f \,||\, g \text{ ou } f \,||\!\leqslant g \tag{3.5}$$

par le fait qu'aucune des relations

$$f \leqslant g,\ g \leqslant f \tag{3.6}$$

n'ait lieu, on se rend compte que l'ensemble K des nombres complexes devient partiellement ordonné par rapport à la relation $\leqslant$.

L'ordination partielle ainsi introduite dans K généralise l'ordination complète du continu C des nombres réels, et nous verrons qu'elle suffit à définir l'espace des nombres complexes en attachant à tout $E \subseteq K$ son ensemble de fermeture $\overline{E}$.

4. Nombres complexes positifs. Calcul avec des inégalités. Un nombre complexe f sera dit *positif*, si $f > 0$. Dans le plan des nombres complexes, l'ensemble des nombres positifs est constitué par l'ensemble des points du demi-axe des x positifs, du premier quadrant et du demi-axe positif y; son symétrique par rapport à l'origine 0 constitue l'ensemble de tous les nombres complexes négatifs. Les nombres complexes appartenant au troisième ou au quatrième quadrant sont incomparables à 0: ils ne sont ni positifs ni negatifs ni 0.

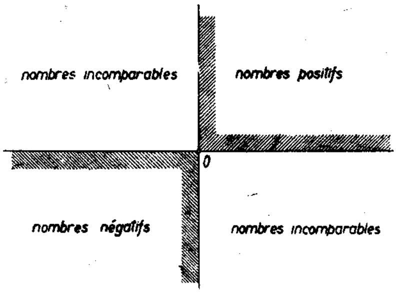

Fig. 1

L e m m e 4.1. Pour que $f=g$, il faut et il suffit que $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, en particulier, la constante 0[1]) est le seul nombre complexe égal au nombre réel 0.

L e m m e 4.2. Pour que $f \leqslant g$, il faut et il suffit que $f-g \leqslant 0$, donc

$$f(0)-g(0) \leqslant 0$$
$$f(1)-g(1) \leqslant 0.$$

L e m m e 4.3. Pour que

$$f \| g, \tag{4.1}$$

il faut et il suffit que

$$(f(0)-g(0))(f(1)-g(1)) < 0. \tag{4.2}$$

En effet, si

$$f \| g,$$

alors on n'a pas plus

$$f \leqslant g$$

que $g \leqslant f$.

Or, la relation f non $\leqslant g$ veut dire que le système

$$f(0) \leqslant g(0), \quad f(1) \leqslant g(1)$$

ne subsiste pas; il en est de même du système

$$f(0)-g(0) \leqslant 0, \quad f(1)-g(1) \leqslant 0$$

ce qui veut dire qu'on n'a pas

$$(f(0)-g(0))(f(1)-g(1)) \geqslant 0 \tag{4.3}$$

et donc qu'on a (4.2).

La même conclusion subsiste dans le cas où g non $\leqslant f$.

---

1) Bien entendu, nous ne considérons que des fonctions réelles uniformes dans $\{0,1\}$.

Inversement, si l'inégalité (4.2) a lieu, cela veut dire qu'on n'a pas (4.3) et par conséquent qu'on n'a ni

$$f(0)-g(0)\leqslant 0, \quad f(1)\leqslant g(1)$$

ni

$$f(0)-g(0)\geqslant 0, \quad f(1)-g(1)\geqslant 0,$$

c'est-à-dire qu'on n'a ni $f\leqslant g$ ni $f\geqslant g$, ce qui, par définition, veut dire que $f\|g$.

Lemme 4.4. Si $f\leqslant g \quad f'\leqslant g'$,

$$\text{alors } f+f'\leqslant g+g'.$$

Lemme 4.5. Si $f\geqslant 0$, $g\geqslant 0$ ou si $f\leqslant 0$, $g\leqslant 0$, alors ou bien $fg\geqslant 0$ ou bien $fg\|0$, ce qu'on peut exprimer par

$$fg \text{ non} < 0, \quad fg \not< 0.$$

$$\text{Si } f\leqslant 0,\ g\geqslant 0, \text{ alors } fg \not> 0.$$

Prenons le cas $f\geqslant 0$, $g\geqslant 0$, donc $f(0)\geqslant 0 \;\; g(1)\geqslant 0$

$$g(0)\geqslant 0 \;\; g(1)\geqslant 0$$

et par conséquent

$$f(0)g(1)+f(1)g(0)\geqslant 0,$$

ce qui, d'après (2.7), veut dire précisément que

$$(fg)(1)\geqslant 0.$$

Si, de plus, $(fg)(0)$ est $\geqslant 0$, cela voudra dire que $fg\geqslant 0$; si, par contre $(fg)(0)<0$, cela voudra dire que $(fg)(0)<0$, $(f,g)(1)\geqslant 0$, donc $f\|g$.

De la même façon, on démontre le reste du lemme 4.5.

Lemme 4.6. Si $f\leqslant g$ et $z\geqslant 0$, alors $zf \not> zg$, c'est-à-dire ou bien $zf\leqslant zg$ ou bien $zf\|zg$. Si $f\leqslant g$ et $z\leqslant o$, alors

$$fz \not< gz.$$

En particulier, si $f>0$, alors $-f<0$; si $f\|0$, alors $-f\|0$.

Prenons le cas $f\leqslant g, z\geqslant 0$; cela veut dire que $g-f\geqslant 0$, et à la suite du lemme 4.5:

$$(g-f)z\not< 0,$$

et par conséquent[1])

$$gz - fz \text{ non } < 0,$$

d'où gz, non $< fz$, c'est-à-dire fz non $> gz$.

5. Sur le postulat d'Archimède.

Lemme 5.1. Si le nombre complexe f est positif, alors, quel que soit le nombre complexe g:

$nf \not< g$, c'est-a-dire ou bien $nf \geqslant g$ ou bien $nf \| g$, pour presque tous les entiers positifs n.

En effet, le nombre complexe f étant > 0, au moins l'un des nombres réels

$$f(0),\ f(1) \text{ est } > 0;$$

par conséquent N étant l'ensemble des nombres naturels, pour presque tous les $n \varepsilon N$ subsiste au moins une des inégalités

$$nf(0) \geqslant g(0)$$

$$nf(1) \geqslant g(1).$$

Dès lors, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $n \varepsilon N$ vérifiant

$$nf(0) \leqslant g(0)$$

$$nf(1) \leqslant g(1)$$

et donc $nf \leqslant g$, ce qui veut dire que pour presque tous les $n \varepsilon N$ on a

$$nf \not< g.$$

En particulier, si non seulement $f(0) \geqslant 0$, $f(1) \geqslant 0$ mais encore

$$f(0) > 0, \quad f(1) > 0, \tag{5.1}$$

ce qu'on peut exprimer en disant que l'élément f est *complètement positif*, et le désigner par

$$f \rangle\rangle\, 0, \tag{5.2}$$

l'on a le

Lemme 5.2. Quel que soit le nombre complexe g, si $f \rangle\rangle\, 0$, alors $nf \rangle\rangle\, g$ pour presque tous les $n \varepsilon N$.

---

[1]) C'est que dans K l'opération de multiplication est distributive par rapport à l'addition et à son inverse (soustraction).

Bien entendu, la relation

$$nf \rangle\rangle g \quad \text{veut dire } nf - g \gtrless 0 \text{ c'est-à dire}$$

$$nf(0) > g(0) \tag{5.3}$$

$$nf(1) > g(0). \tag{5.4}$$

En disant qu'un groupe additif, et en particulier un corps de nombres, partiellement ordonné est *archimédien* si, pour tout couple de ses éléments positifs a et b, la relation

$$na \not< b$$

ne subsiste que pour un nombre fini (ou zéro) de fois, les considérations précédentes montrent qu'on a le

Theorème 5.1. *L'ensemble* $(K; \leqslant; +; \cdot)$ *des nombres complexes est un corps partiellement ordonné archimédien dans lequel est plongé le corps ordonné de nombres réels.*

6. L'opérateur sup E $(E \subseteq K)$.

Un ensemble $E \subseteq K$ sera dit *borné supérieurement*, s'il y a un $x \varepsilon K$ vérifiant

$$E \subseteq (-\infty; x]_K{}^{1)}; \tag{6. 1}$$

un pareil nombre x sera dit le majorant de E.

Theorème 6.1. sur la non-lacunarité de l'ensemble partiellement ordonné $(K; \leqslant)$:

E étant un ensemble non vide borné supérieurement extrait de $(K; \leqslant)$, *il y a un et un seul élément de* K: *la borne supérieure ou le supremum de* E:

$$\sup E \quad \text{ou} \quad \sup_{x \varepsilon E} x \tag{6. 2}$$

vérifiant la relation

$$E \subseteq (-\infty, z)_K \tag{6.3}$$

sans que celle-ci soit vérifiée pour un élément $z < \sup E$.

En effet, en désignant respectivement par

$$E(0) \quad \text{et} \quad E(1)$$

l'ensemble de tous les coefficients des parties réelles et des parties imaginaires des éléments de E respectivement, les

[1] Notons que $(-\infty, x]_K$ désigne l'ensemble de tous les éléments $Z \varepsilon K$ vérifiant $Z \leqslant x$.

ensembles linéaires $E(0)$ et $E(1)$ sont non vides et bornés supérieurement; dès lors, les nombres réels

$$\sup E(0) \quad \text{et} \quad \sup E(1)$$

sont bien déterminés et on voit sans peine que le nombre complexe

$$\sup E(0) + i \sup E(1)$$

et le supremum cherché de l'ensemble E.

D'une manière analogue, on définit l'infimum (borne inférieure) d'un ensemble $E \subseteq K$ borné inférieurement, et on démontre son existence; on le désigne par

$$\inf E. \tag{6.4}$$

Si un ensemble E de nombres complexes est borné supérieurement et inférieurement, alors le segment

$$[\inf E; \quad \sup E]_K$$

et le plus petit segment de l'ensemble $(K; \leqslant)$ contenant l'ensemble E.[1])]

7. L'espace des nombres complexes. Tout d'abord, pour deux nombres complexes a, b nous définirons l'intervalle $a\,b$ (ou $b\,a$) comme l'ensemble de tous les nombres complexes z vérifiant

$$a < z < b;$$

il sera désigné par

$$(a, b)_K \quad \text{ou} \quad (b, a)_K. \tag{7.1}$$

Un intervalle simple de K sera, par définition, n'importe lequel

$$(a, b)_K \quad \text{avec} \quad a, b \in K. \tag{7.2}$$

Si a, b sont deux points incomparables ou égaux, alors l'intervalle $a\,b$ est vide. Si a, b sont distincts et comparables, alors

---

1) Si $a, b \in K$, alors le segment ab de E, symboliquement

$$[a, b]_K,$$

est l'ensemble de tous les $z \in K$ vérifiant l'une des relations

$$a \leqslant z \leqslant b \quad \text{ou} \quad b \leqslant z \leqslant a.$$

Bien entendu, si $a // b$, alors $[a, b]_K = v$ (vide).

on voit que l'intervalle $(a, b)_K$ est constitué des points du „rectangle" délimité par les droites parallèles aux axes et passant par les points a et b respectivement; les extrémités a, b ne font pas partie du rectangle $(a, b)_K$.

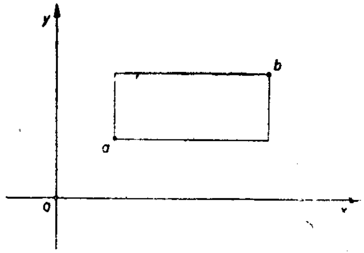

Fig. 2

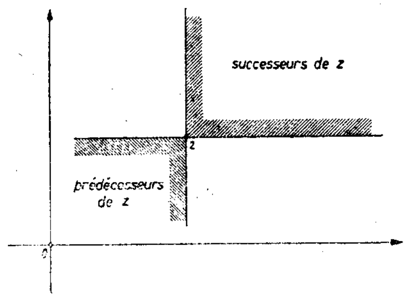

Fig. 3

Ceci étant, définissons les voisinages d'un nombre complexe quelconque z. Si, quelle que soit la famille F d'intervalles simples telle que la partie commune de tous les $X \varepsilon F$ coïncide avec l'élément z, un ensemble

$$V_z \subseteq K$$

contient au moins un élément de la famille F, l'ensemble V_z sera dit un *voisinage du nombre z*.

L e m m e 7.1. Chaque voisinage V_z de tout $z \varepsilon K$ contient un cercle dont le centre est le point z.

En effet, si nous considérons la famille des intervalles simples

$$\left(z - \frac{1}{n} - \frac{i}{n};\ z + \frac{1}{n} + \frac{i}{n}\right)_K, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

la partie commune des éléments de celle-ci est précisément le point z. A la suite de la définition de V_z, V_z contient au moins un rectangle

$$\left(z - \frac{1}{n} - \frac{i}{n};\ z + \frac{1}{n} + \frac{i}{n}\right)$$

dont le centre est au point z; par conséquent, V_z contient également l'intérieur de tout cercle dont le centre est au z et qui appartient au rectangle considéré.

Ainsi, à tout nombre complexe z correspond une famille de voisinages.

Ceci étant, on définit l'ensemble de fermeture $\bar{E}$ de tout $E \subseteq K$ comme l'ensemble de tous nombres complexes z vérifiant la condition suivante:

Tout voisinage V_z de z contient au moins un élément de E:

$$V_z \cap E \supset v \quad (= \text{ensemble vide}). \tag{7.3}$$

Ainsi l'ensemble partiellement ordonné K devient *l'espace partiellement ordonné* K, et cet espace coïncide avec l'espace des nombres complexes tel qu'il est défini couramment par l'intermédiaire de la distance ou du module de la différence.

En particulier, en disant qu'une suite

$$z_1, z_2, z_3, \ldots \tag{7.4}$$

de nombres complexes est *convergente* s'il existe un nombre complexe dont tout voisinage contient presque tous les termes de la suite, on voit sans peine que la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la suite (7.4) c'est le critère de convergence de Cauchy disant que, quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$, il y a un sphéroïde de diamètre $< 2\varepsilon$ contenant presque tous les termes de la suite. Bien entendu, l'espace partiellement ordonné K peut être défini moyennant une distance, en particulier au moyen de la distance

$$g(f, g) = \sqrt{(f(0) - g(0))^2 + (f(1) - g(1))^2},$$

et l'on peut prendre pour voisinage de z tout sphéroïde contenant z, le sphéroïde étant l'ensemble de tous les points dont la distance d'un point de l'espace est $< r$, r étant un nombre réel quelconque.

Remarquons que les considérations précédentes s'étendent à des classes plus étendues d'espaces partiellement ordonnés.